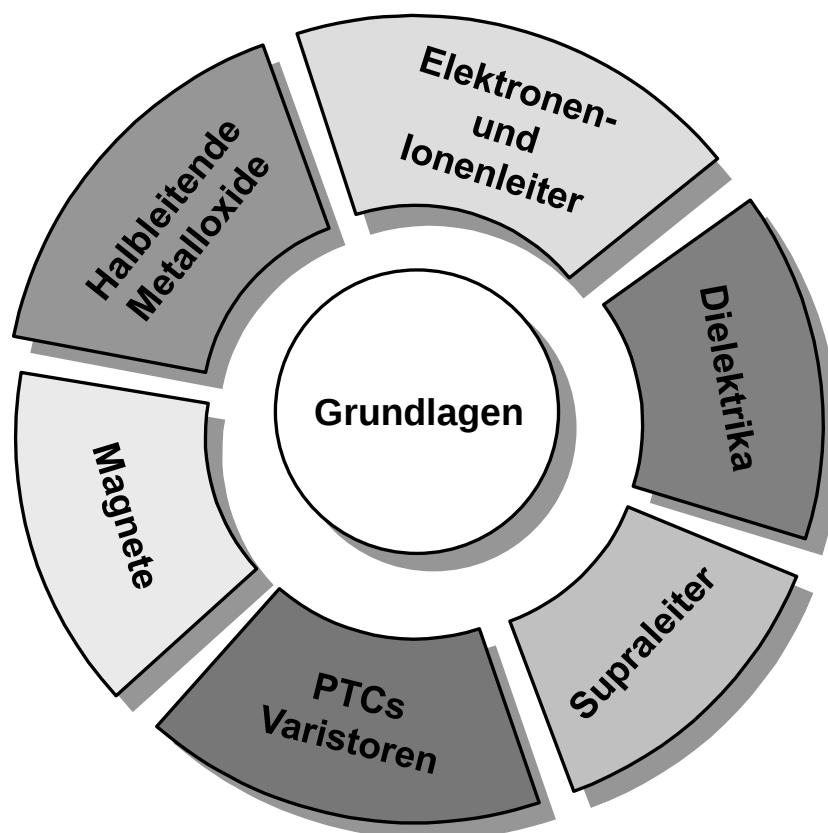


Formelsammlung

Passive Bauelemente

SS 2013



Inhaltsverzeichnis

A	GLEICHUNGEN	1
A.1	Aufbau von Atomen und Festkörpern	1
	Thermodynamik	1
	Massenwirkungsgesetz	1
	Diffusion	1
	Wärme	2
	Temperaturkoeffizienten	3
	Mechanik	3
A.2	Leiterwerkstoffe und ihre Bauelemente	3
	Grundlagen Leiter	3
	Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit	4
	Halbleiter	4
	Hoppingleiter	5
	Thermoelektrische Effekte	5
	Piezoresistiver Effekt	5
	Empirische Zusammenhänge	6
	Bauelemente mit nichtlinearen Widerständen	6
A.3	Dielektrische Werkstoffe und ihre Bauelemente	7
	Feld- und Materialgleichungen	7
	Piezoelektrizität	7
	Pyroelektrizität	7
	Ferroelektrizität	8
A.4	Magnetische Werkstoffe und ihre Bauelemente	8
	Feld- und Materialgleichungen	8
	Magnetische Momente der Atome	8
	Einsatz magnetischer Werkstoffe	9
B	ANHANG	10
B.1	Symbolverzeichnis	10
B.2	Konstanten	13
C	PERIODENSYSTEM	14

A Gleichungen

A.1 Aufbau von Atomen und Festkörpern

Thermodynamik

Gibbssche Fundamentalform

$$dE = -pdV + TdS + \phi dQ + \mu dN + \dots = \sum_i x_i dY_i \quad (\text{A.1-1})$$

Zusammenhang chemisches / elektrochemisches Potential

$$\tilde{\mu} = \mu + nF\Phi = \mu + z \cdot e_0 \cdot \phi \quad (\text{A.1-2})$$

Massenwirkungsgesetz

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B \rightleftharpoons \gamma \cdot C + \delta \cdot D \quad (\text{A.1-3})$$

$$\frac{[C]^\gamma \cdot [D]^\delta}{[A]^\alpha \cdot [B]^\beta} = K(T) = k_0 \cdot e^{-\frac{\Delta G}{kT}} \quad (\text{A.1-4})$$

Frenkel-Defekte

$$[V_A^x] = [A_i^x] = N_0 \cdot e^{-\frac{W_{Fr}}{kT}} \quad (\text{A.1-5})$$

Schottky-Defekte

in kovalenten Kristallen: $[V_A^x] = N_0 \cdot e^{-\frac{W_S}{kT}} \quad (\text{A.1-6})$

in ionischen Kristallen: $[V_A'] = [V_B^\bullet] = N_0 \cdot e^{-\frac{W_S}{2kT}} \quad (\text{A.1-7})$

Diffusion

Erstes Ficksches Gesetz

$$\vec{J}_n = -D \cdot \text{grad } c \quad (\text{A.1-8})$$

Zweites Ficksches Gesetz

$$\text{div grad } c = \Delta c = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} \quad \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} \right) \quad (\text{A.1-9})$$

Temperaturabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten

$$D = D_0 \cdot e^{-\frac{\Delta W}{kT}} \quad (\text{A.1-10})$$

Teilchenstromdichte

$$j_{Diff} = \frac{1}{A} \cdot \frac{dN}{dt} \quad (A.1-11)$$

Diffusionsprofil und Eindringtiefe bei unerschöpflicher Quelle

$$c(x,t) = c_0 \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^a e^{-u^2} du \right) \quad a = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

$$x_0 = 1,28 \cdot \sqrt{Dt} \quad (A.1-12)$$

Diffusionsprofil und Eindringtiefe bei begrenzter Quelle

$$c(x,t) = \frac{N_F}{\sqrt{\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad x_0 = 2 \cdot \sqrt{Dt} \quad (A.1-13)$$

Wärme

Wärmeleitung (Fourier-Gesetz)

$$P = -\lambda_W \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (A.1-14)$$

Konvektion (Newton-Gesetz)

$$P = \alpha_K \cdot A_0 \cdot (T - T_U) = G_{th} \cdot (T - T_U) \quad (A.1-15)$$

Wärmestrahlung (Stefan-Boltzmann-Gesetz)

$$P_{AB} = c \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_A^4 - T_B^4) \quad (A.1-16)$$

Molare Wärmekapazität

$$c_{W,m} = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (A.1-17)$$

Wärmestromdichte

$$q_W = \frac{P}{A} = n \cdot \frac{3}{2} kT \cdot v_{Drift} \quad (A.1-18)$$

Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda_W = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot \frac{n \cdot \tau}{m_n} \cdot k^2 T \quad (A.1-19)$$

Driftgeschwindigkeit eines Elektrons bei ΔT

$$v_{Drift} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k \cdot \tau}{m_n} \cdot \frac{dT}{dx} \quad (A.1-20)$$

Thermische Energie eines Elektrons

$$W_{th} = \frac{3}{2} kT \quad (\text{A.1-21})$$

Temperaturkoeffizienten

Anwendung

$$Y(T) = Y(T_N) \cdot (1 + \alpha_Y \cdot \Delta T) \quad \text{mit } \Delta T = T - T_N \quad (\text{A.1-22})$$

Berechnung

Temperaturkoeffizient (physikalisch)

$$TK_Y = \frac{1}{Y(T)} \cdot \frac{dY(T)}{dT} \quad (\text{A.1-22})$$

Temperaturkoeffizient (technisch)

$$\alpha_Y = \frac{1}{Y(T_0)} \cdot \frac{\Delta Y}{\Delta T} \quad \text{mit } \Delta T = T_A - T_B \quad \text{und } \Delta Y = Y(T_A) - Y(T_B) \quad (\text{A.1-23})$$

Mechanik

Querkontraktionszahl / Poissonzahl

$$\nu = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta A / A_0}{\Delta l / l_0} \right) \quad (\text{A.1-25})$$

Schubmodul

$$G_M = \frac{\tau_M}{\gamma_M} \quad (\text{A.1-25})$$

Elastizitätsmodul

$$E_M = \frac{\sigma_M}{\varepsilon_M} \quad (\text{A.1-25})$$

A.2 Leiterwerkstoffe und ihre Bauelemente

Grundlagen Leiter

Leitfähigkeit

$$\sigma = \sum_i \sigma_i = e_0 \cdot \sum_i |z_i| \cdot n_i \cdot \mu_i \quad (\text{A.2-1})$$

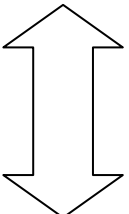
Beweglichkeit, Driftgeschwindigkeit und mittlere Stoßzeit / Intraband-Relaxationszeit der Spezies i

$$\mu_i = \frac{v_{D,i}}{E} = \frac{e_0 \cdot \tau_i}{m_i} \quad (\text{A.2-2})$$

Einstein-Beziehung für die Spezies i

$$D_i(T) = \frac{kT}{q_i} \mu_i(T) \quad (\text{A.2-3})$$

Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit

	Mechanismus	Temperaturabhängigkeit	Aktivierungsenergie E_A / [eV]	Größenordnung μ / [cm^2/Vs]
	Streuung an Gitterschwingungen und Störstellen	$\mu \sim T^{-3/2}$	~ 0	$10^2 \dots 10^4$
	Großes Polaron	$\mu \sim T^{-1/2}$	$\sim 0,1$	$10^0 \dots 10^2$
Hopping-leitung	Kleines Polaron	$\mu \sim f(T) \exp(-E_A/kT)$	$\sim 0,5$	$10^{-4} \dots 10^{-2}$

Halbleiter

Boltzmann-Verteilung

$$f_B(W, T) = e^{-\left(\frac{W - W_F}{kT}\right)} \quad (\text{A.2-4})$$

Eigenhalbleiter

Elektronenkonzentration im Leitungsband

$$n = N_L \cdot \exp\left(\frac{-(W_L - W_F)}{kT}\right) \text{ mit } N_L = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot m_n \cdot kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.2-5})$$

Löcherkonzentration im Valenzband

$$p = N_V \cdot \exp\left(\frac{-(W_F - W_V)}{kT}\right) \text{ mit } N_V = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot m_p \cdot kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.2-6})$$

Eigenleitungskonzentration

$$n_i = N_{eff} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta W_G}{2 \cdot kT}\right) \text{ mit } N_{eff} = \sqrt{N_L \cdot N_V} \quad (\text{A.2-7})$$

Störstellenhalbleiter

Elektronenkonzentration bei Donatordotierung

$$n = \begin{cases} \sqrt{N_D N_L} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta W_D}{2 \cdot kT}\right) & (\text{Reserve}) \\ N_D & (\text{Erschöpfung}) \end{cases} \quad (\text{A.2-8})$$

Löcherkonzentration bei Akzeptordotierung

$$p = \begin{cases} \sqrt{N_A N_V} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta W_A}{2 \cdot kT}\right) & (\text{Reserve}) \\ N_A & (\text{Erschöpfung}) \end{cases} \quad (\text{A.2-9})$$

Hoppingleiter

Diffusionskonstante der Polaronen

$$D = (1-c)a^2 \nu_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_A}{kT}\right) \quad (\text{A.2-10})$$

Thermoelektrische Effekte

Kontaktspannung zwischen zwei Metalle

$$-e_0 \cdot U_{12} = W_{A1} - W_{A2} \quad (\text{A.2-11})$$

Seebeck-Effekt

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T \quad (\text{A.2-12})$$

Peltier-Effekt

$$P_p = \pi_{AB} \cdot I \quad (\text{A.2-13})$$

Piezoresistiver Effekt

allgemeines, totales Differential des Widerstands

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho \quad (\text{A.2-14})$$

Definition: k-Faktor

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon_M \quad (\text{A.2-15})$$

Empirische Zusammenhänge

Matthiessensche Regel

$$\rho = \rho^T(T) + \rho^I \quad (\text{A.2-16})$$

Wiedemann-Franz-Gesetz

$$L = \frac{\lambda_W}{\sigma} \cdot \frac{1}{T} \quad (\text{A.2-17})$$

Regel nach Grüneisen

$$\rho \propto T \cdot G(\Theta_D / T)$$

$$G(x) = x^{-4} \cdot \int_0^x \frac{s^5}{(e^s - 1) \cdot (1 - e^{-s})} ds \quad (\text{A.2-18})$$

Supraleiter erster Art

$$B_c(T) = B_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (\text{A.2-19})$$

Bauelemente mit nichtlinearen Widerständen

Varistoren

Kennlinie

$$I = \pm I_0 \cdot \left| \frac{U}{U_0} \right|^\alpha \quad (\text{A.2-20})$$

PTC-Widerstände

Korngrenzwiderstand

$$R_{KG} \sim \exp\left(\frac{W_B}{k \cdot T}\right) \quad (\text{A.2-21})$$

NTC-Widerstände

Temperaturabhängigkeit des Widerstands

$$R(T) = \frac{I}{en\mu(T) \cdot d^2} = A \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (\text{A.2-22})$$

Temperaturabhängigkeit des Widerstands bezogen auf Nenndaten

$$\frac{R(T)}{R_N} = \exp\left[B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N}\right)\right] \quad (\text{A.2-23})$$

A.3 Dielektrische Werkstoffe und ihre Bauelemente

Feld- und Materialgleichungen

Dielektrische Verschiebung

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (\text{A.3-1})$$

Polarisation (in linearer isotroper Materie $\chi_e = \text{const.}$)

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E \quad (\text{A.3-2})$$

Relative Dielektrizitätszahl

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (\text{A.3-3})$$

Dielektrische Polarisation

$$P = n\alpha \cdot E_{lok} \quad (\text{A.3-4})$$

Lokale Feldstärke

$$E_{lok} = E + \frac{P}{3\varepsilon_0} \quad (\text{A.3-5})$$

Clausius-Mosotti-Beziehung

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \quad (\text{A.3-6})$$

Piezoelektrizität

$$\varepsilon_M = s^E \cdot \sigma_M + d \cdot E \quad (\text{A.3-7})$$

$$D = d \cdot \sigma_M + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r^T \cdot E \quad (\text{A.3-8})$$

$$\varepsilon_M = s^D \cdot \sigma_M + g \cdot D \quad (\text{A.3-9})$$

$$E = -g \cdot \sigma_M + \frac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r^T} \quad (\text{A.3-10})$$

$$k^2 = \frac{\text{abgegebene mechanische Energie}}{\text{aufgenommene elektrische Energie}} = \frac{d^2}{s^E \cdot \varepsilon_r^T \cdot \varepsilon_0} = \frac{g^2 \cdot \varepsilon_r^T \cdot \varepsilon_0}{s^E} \quad (\text{A.3-11})$$

Pyroelektrizität

Pyrokoeffizient

$$\pi_P = \frac{dP_R}{dT} \quad (\text{A.3-12})$$

Temperaturabhängigkeit der Spannung bei offenen Elektroden

$$\Delta U = \pi_P \cdot \frac{A \cdot \Delta T}{C} \quad (\text{A.3-13})$$

Bei kurzgeschlossenen Elektroden fließt entsprechend der Temperaturänderung eine Ladung

$$\Delta Q = \pi_P \cdot A \cdot \Delta T \quad (\text{A.3-14})$$

Ferroelektrizität

Curie-Weiß-Gesetz

$$\varepsilon_r = \frac{C}{T - T_0} \quad (\text{A.3-15})$$

A.4 Magnetische Werkstoffe und ihre Bauelemente

Feld- und Materialgleichungen

Magnetische Flussdichte

$$B = \mu_0 \cdot H + J = \mu_0 \cdot (H + M) \quad (\text{A.4-1})$$

Magnetische Polarisation (in linearer isotroper Materie $\chi_m = \text{const.}$)

$$J = \mu_0 \cdot \chi_m \cdot H \text{ und } M = \chi_m \cdot H \quad (\text{A.4-2})$$

Relative Permeabilität

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (\text{A.4-3})$$

Magnetische Momente der Atome

Magnetisches Bahnmoment

$$\mu_L = \frac{e_0 \omega}{2\pi} \cdot \pi r^2 = I \cdot \frac{e_0 \hbar}{2m_e} \equiv I \cdot \mu_B \quad (\text{A.4-4})$$

Eigendrehimpuls der Elektronen (Spin)

$$\mu_S = 2\mu_B \cdot S = \pm \mu_B \quad (\text{A.4-5})$$

Bohrsches Magneton

$$\mu_B = \frac{e_0 \hbar}{4\pi m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (\text{A.4-6})$$

Einsatz magnetischer Werkstoffe

Induktivität langer Spulen $l \gg r$

$$L \approx \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n^2 \cdot A}{l} \quad (\text{A.4-7})$$

Im Magnetfeld gespeicherte Energie

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \oint H(B) dB \quad (\text{A.4-8})$$

Hystereseverluste

$$P_H = V \cdot f \cdot \oint H dJ = V \cdot f \cdot \oint H dB \quad (\text{A.4-9})$$

B Anhang

B.1 Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Größe
α	Am ² s / V	Polarisierbarkeit
α_K	-	Materialkonstante (Newton-Gesetz)
α_Y	1 / K	technischer Temperaturkoeffizient
γ_M	-	Scherung
ε_M	-	mechanische Dehnung
ε_r	-	relative Dielektrizitätszahl
ε_r^T	-	Dielektrizitätskonstante bei $\sigma_M = \text{const}$
η_{AB}	V / K	Seebeck-Koeffizient
Θ_D	K	Temperaturkonstante Grüneisen-Regel
λ	W / (m·K)	Wärmeleitfähigkeit
μ	eV	chemisches Potential
μ_i	cm ² / (Vs)	Ladungsträgerbeweglichkeit Spezies i
μ_i	Am ²	magnetisches Moment i
μ_r	-	rel. magn. Permeabilität
μ_S	Am ²	Eigendrehimpuls der Elektronen (Spin)
ν	-	Querkontraktionszahl, Poisson-Zahl
ν_0	Hz	Schwingfrequenz Debye-Frequenz
π_{AB}	V	Peltier-Koeffizient
π_P	C / (m ² K)	Pyrokoeffizient
ρ	Ω m	spezifischer Widerstand
σ_i	m ² / N	Elastizitätskonstante bei i konstant
σ	1 / (Ω m)	elektrische Leitfähigkeit
σ_M	N / m ²	Zugfestigkeit
τ_i	s	Zeitkonstante i
τ_M	Pa	Scherspannung
Φ	V	Potential
χ_e	-	elektrische Suszeptibilität

Symbol	Einheit	Größe
χ_M	-	magnetischen Suszeptibilität
ω_D	Hz	Charakteristische Grenzfrequenz nach Debye
ω_E	Hz	Mittlere Schwingungsfrequenz von Phononen
A	m ²	Fläche
A	A	Konstante NTC
a	m	Sprungabstand
B	-	Konstante NTC
B_i	T	Magnetische Induktion der Art i
C	F	Kapazität
C	K	Curie-Konstante
c	-	Materialkonstante (Stefan-Boltzmann-Gesetz)
c	-	Prozentuale Besetzung von Plätzen
$c(x)$	1 / m ³	Konzentration
c_W	J / (kg·K)	spezifische Wärmekapazität
c_W	J / K	Wärmekapazität
$c_{W,m}$	J / (mol·K)	molare Wärmekapazität
D	As / m ²	elektrische Verschiebungsdichte
D_i	m ² / s	Diffusionskoeffizient der Spezies i
d	m / V	Piezoelektrische Ladungskonstante
E_i	J oder eV	Energie
E	V / m	elektrische Feldstärke
E_{lok}	V / m	lokale Feldstärke
E_M	N / m ²	Elastizitätsmodul
G	J	Freie Enthalpie
G_M	N / m ²	Schubmodul
G_{th}	W / K	thermischer Leitwert
g	Vm / N	Piezoelektrische Spannungskonstante
H	A / m	Magnetische Feldstärke
I	A	Strom
I_0	A	Nennansprechstrom
J	T	Magnetische Polarisierung
J_n	1 / (m ² s)	Partikelstromdichte

Symbol	Einheit	Größe
K	A	Materialkonstante Varistor
k	-	piezoelektrischer Kopplungsfaktor
k	-	k-Faktor (Dehnmessstreifen)
L	H	Induktivität
L	V^2 / K^2	Lorenzzahl
l	m	Länge
M	A / m	Magnetisierung
m_i	kg	(effektive) Masse der Spezies i
n	-	Windungszahl
n	$1 / m^3$	Elektronenkonzentration
N_A	$1 / m^3$	Konzentration der Akzeptoren
N_D	$1 / m^3$	Konzentration der Donatoren
N_{eff}	$1 / m^3$	mittlere effektive Zustandsdichte
N_F	$1 / m^2$	Flächenbelegung
N_i	-	Dichte von i
n_i	$1 / m^3$	Eigenleitungskonzentration, Ladungsträgeranzahl Spezies i
N_L	$1 / m^3$	effektive Zustandsdichte Leitungsband
N_V	$1 / m^3$	effektive Zustandsdichte Valenzband
P	As / m ²	elektrische Polarisation
P_i	W	Leistung i
P_r	As / m ²	remanente Polarisation
p	Asm	Dipolmoment
p	Pa	Druck
p	$1 / m^3$	Löcherkonzentration
Q	C	Ladung
q	W / m ²	Wärmestromdichte
q	C	Ladung der Spezies i
R	Ω	elektrischer Widerstand
T	K	Temperatur
TK	$1 / K$	physikalischer Temperaturkoeffizient
t	s	Zeit
U	J	innere Energie

Symbol	Einheit	Größe
U	V	elektrische Spannung
U_0	V	Nennansprechspannung
V	m ³	Volumen
$v_{D,i}$	m / s	Driftgeschwindigkeit der Spezies i
W_i	J oder eV	Energie i
x_0	m	Eindringtiefe
Z	-	Protonen/Elektronenzahl, Ordnungszahl
z_i	-	Ladungszahl der Spezies i

B.2 Konstanten

Konstante	Wert	Einheit	Bezeichnung
ε_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$	As / (Vm)	elektrische Feldkonstante
μ_0	$1,257 \cdot 10^{-6}$	Vs / (Am)	magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante)
μ_B	$9,274 \cdot 10^{-24}$	Am ²	Bohrsches Magneton
σ	$5,670 \cdot 10^{-8}$	W / (m ² K ⁴)	Stefan-Boltzmann-Konstante
c_0	$2,998 \cdot 10^8$	m / s	Vakuumlichtgeschwindigkeit
e_0	$1,602 \cdot 10^{-19}$	As	Elementarladung
F	$9,649 \cdot 10^4$	C / mol	Faraday-Konstante
h	$6,626 \cdot 10^{-34}$	Js	Plancksches Wirkungsquantum
$\hbar$	$1,055 \cdot 10^{-34}$	Js	Dirac-Konstante
k	$8,617 \cdot 10^{-5}$	eV / K	Boltzmann-Konstante
k	$1,381 \cdot 10^{-23}$	J / K	Boltzmann-Konstante
m_e	$9,109 \cdot 10^{-31}$	kg	Ruhemasse des Elektrons
N_A	$6,022 \cdot 10^{23}$	1 / mol	Avogadro-Konstante
R	8,314	J / (mol K)	Ideales Gas Konstante

