

Übung 3

Thermoelemente

A1: Thermoelement

Die von T.J. Seebeck im Jahre 1822 entdeckte Thermospannung wird heute noch im Rahmen von hochpräzisen Temperaturmessungen eingesetzt. Im Folgenden soll deshalb beispielhaft die Konzeption einer Temperaturmessung mit einem Thermoelementpaar für den Einsatz in einem Sinterofen entwickelt werden.

1. a) In einem Experiment (*Bild 1*) soll zunächst der Seebeck-Koeffizient η_B von Leiter B bestimmt werden, der später in einem Thermoelement verbaut werden soll. Das eine Ende des Leiters B wird dazu auf $T_2=420\text{ °C}$ erwärmt, während das andere Ende bei einer konstanten Temperatur von $T_1=20\text{ °C}$ gehalten wird. Eine Spannung $|U_{Th}|=6\text{ mV}$ wird gemessen. Aus welchem Material besteht Leiter B?

Hinweis: Tabelle 1 zeigt die Seebeck-Koeffizienten für verschiedenen Materialien.

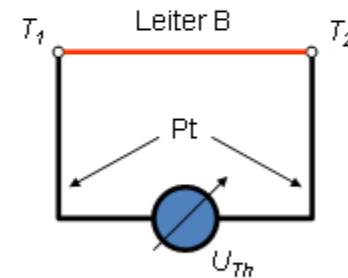


Bild 1: Messung der Thermospannung eines Leiters.

Tabelle 1: Thermokraft (Seebeck-Koeffizient η) verschiedener Materialien

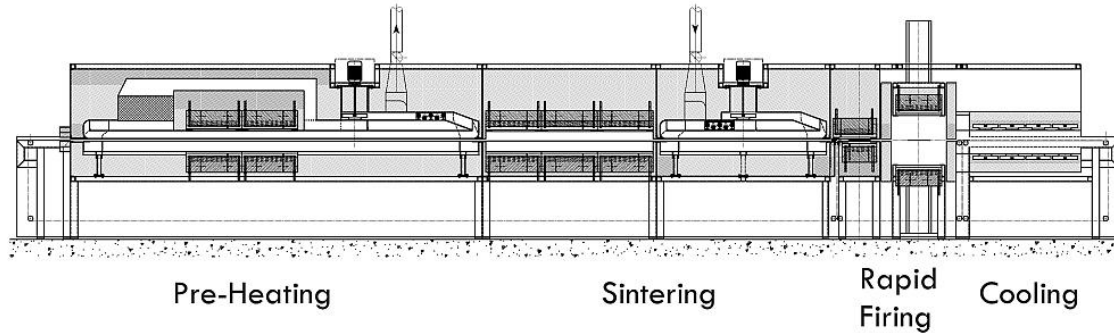
Material	Konstantan	Ni	Pt	PtRh	Cu	Fe	NiCr
$\eta / (\mu\text{V/K})$	-35,0	-15,0	0	6,9	7,8	19,2	25,4

Passive Bauelemente Sommersemester 2013

Übung 3

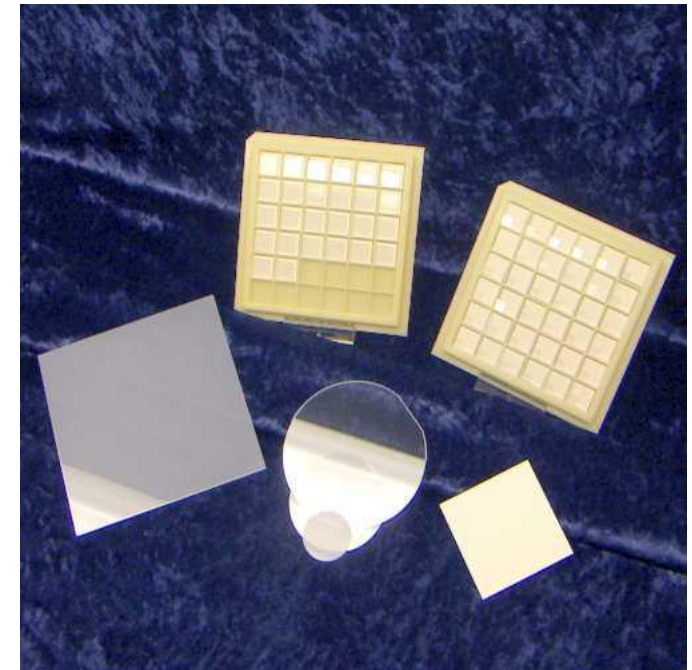
Sintering and Firing Furnace RTAF3600

[1]



[3]

[2]



A1: Thermoelement

Die von T.J. Seebeck im Jahre 1822 entdeckte Thermospannung wird heute noch im Rahmen von hochpräzisen Temperaturmessungen eingesetzt. Im Folgenden soll deshalb beispielhaft die Konzeption einer Temperaturmessung mit einem Thermoelementpaar für den Einsatz in einem Sinterofen entwickelt werden.

1. a) In einem Experiment (*Bild 1*) soll zunächst der Seebeck-Koeffizient η_B von Leiter B bestimmt werden, der später in einem Thermoelement verbaut werden soll. Das eine Ende des Leiters B wird dazu auf $T_2=420\text{ °C}$ erwärmt, während das andere Ende bei einer konstanten Temperatur von $T_1=20\text{ °C}$ gehalten wird. Eine Spannung $|U_{Th}|=6\text{ mV}$ wird gemessen. Aus welchem Material besteht Leiter B?

Hinweis: Tabelle 1 zeigt die Seebeck-Koeffizienten für verschieden Materialien.

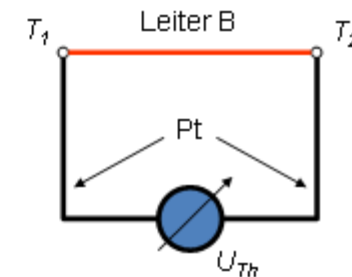
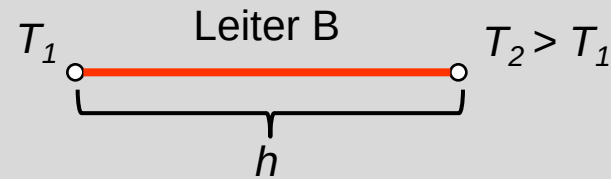


Bild 1: Messung der Thermospannung eines Leiters.

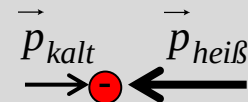
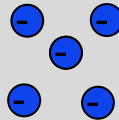
Tabelle 1: Thermokraft (Seebeck-Koeffizient η) verschiedener Materialien

Material	Konstantan	Ni	Pt	PtRh	Cu	Fe	NiCr
$\eta / (\mu\text{V/K})$	- 35,0	- 15,0	0	6,9	7,8	19,2	25,4

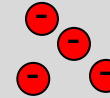
Thermodiffusion



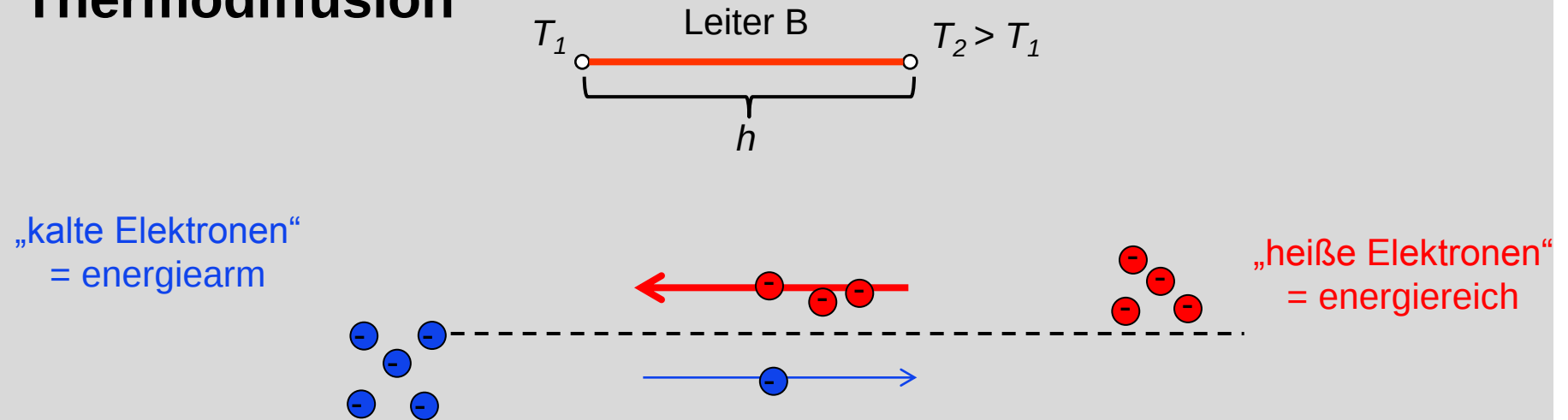
„kalte Elektronen“
= energiearm



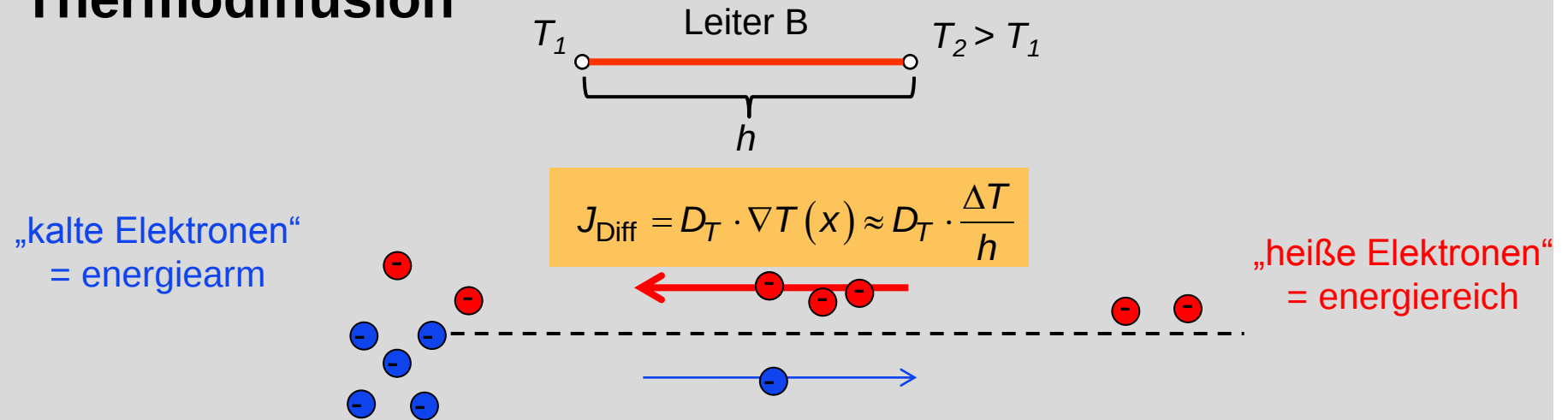
„heiße Elektronen“
= energiereich



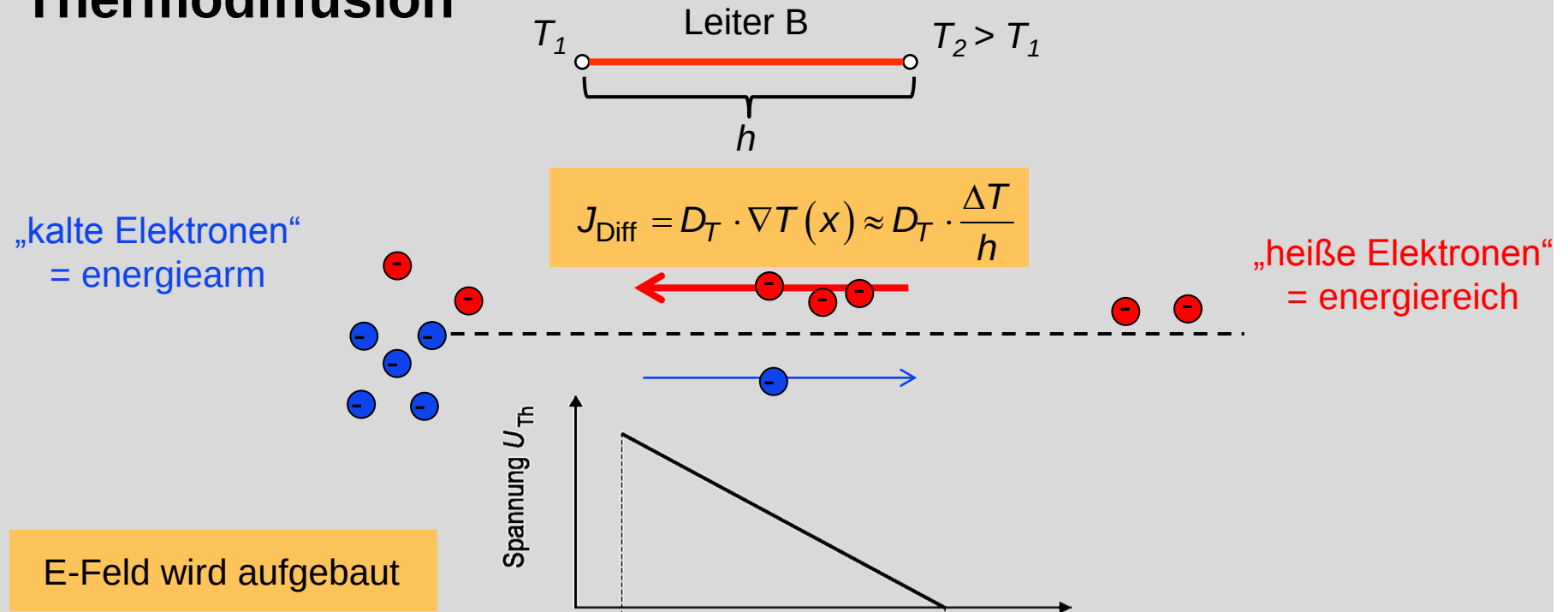
Thermodiffusion



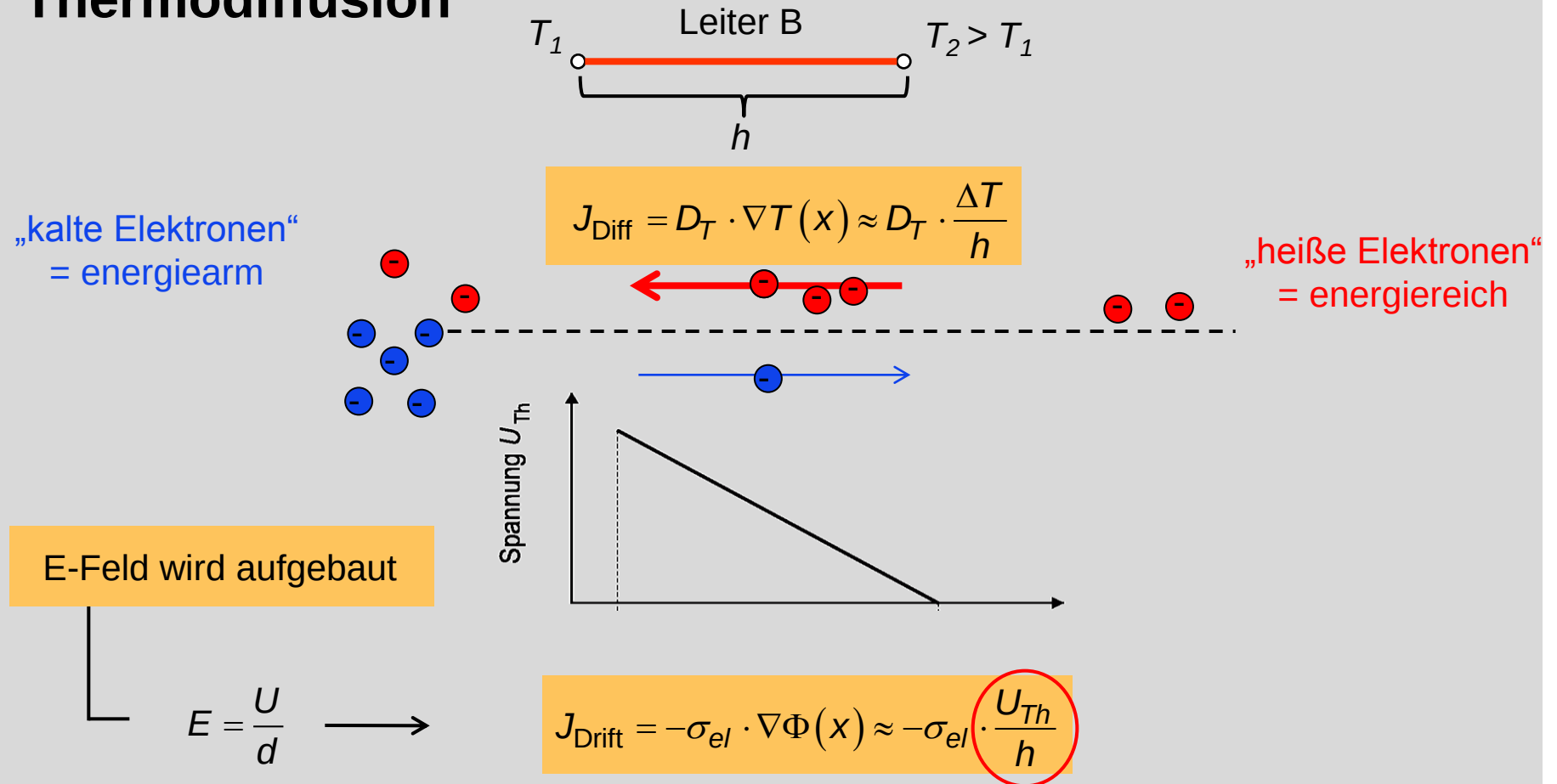
Thermodiffusion



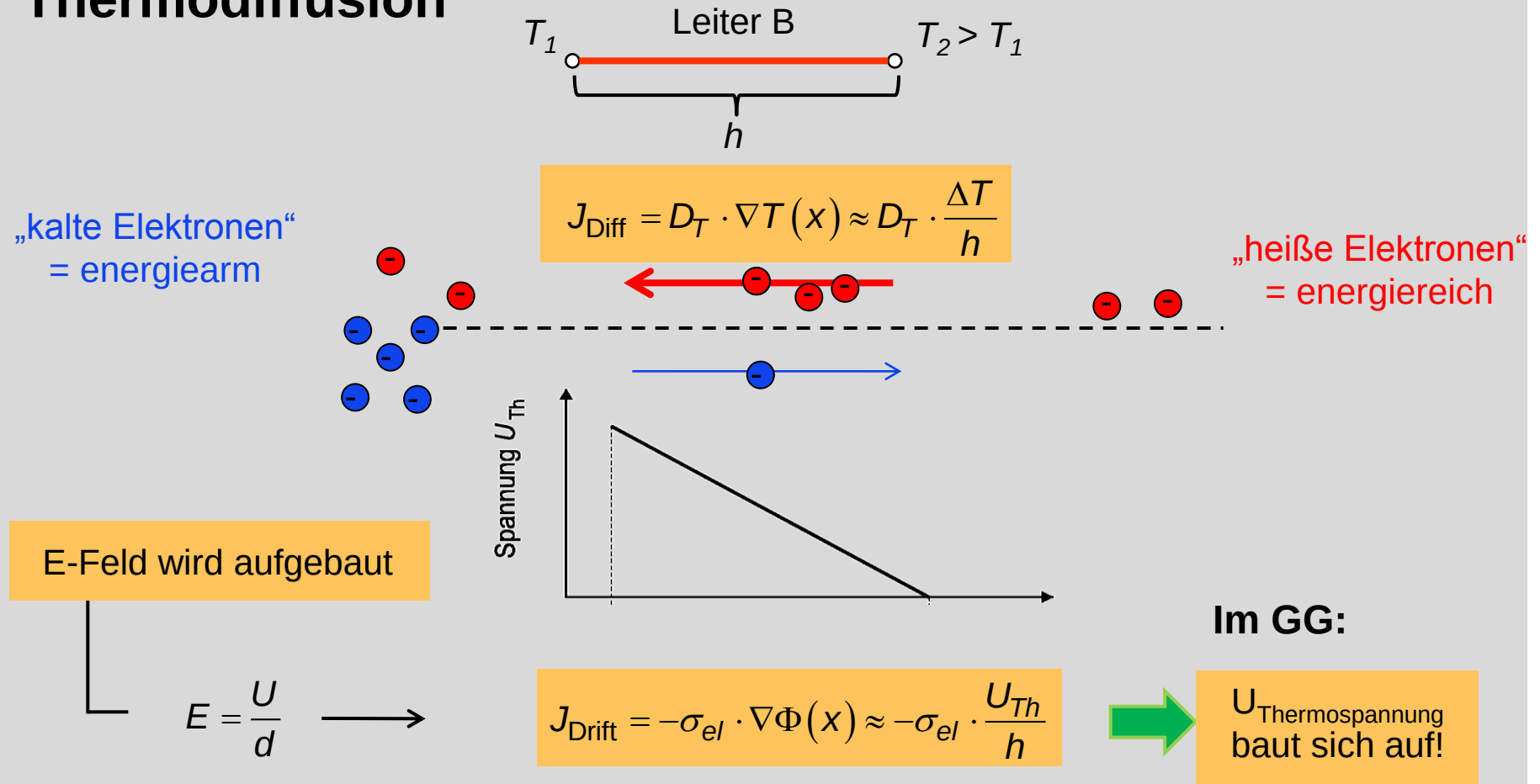
Thermodiffusion

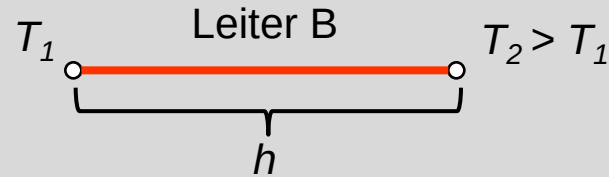


Thermodiffusion



Thermodiffusion





$$J_{\text{Diff}} = D_T \cdot \nabla T(x) \approx D_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

Im Gleichgewichtsfall ist

$$J_{\text{Diff}} + J_{\text{Drift}} = 0$$

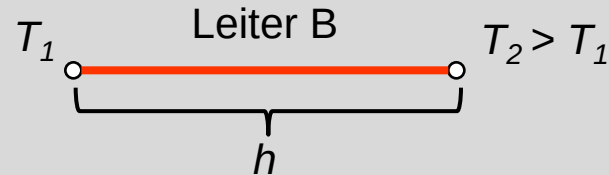
$$J_{\text{Drift}} = -\sigma_{el} \cdot \nabla \Phi(x) \approx -\sigma_{el} \cdot \frac{U_{Th}}{h}$$

←
„Es fließt genau
so viel hin, wie
zurück.“
|

Im GG:



$U_{\text{Thermospannung}}$
baut sich auf!



$$J_{\text{Diff}} = D_T \cdot \nabla T(x) \approx D_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

Im Gleichgewichtsfall ist

$$J_{\text{Diff}} + J_{\text{Drift}} = 0$$

$$\rightarrow U_{Th} = \frac{D_T}{\sigma_{el}} \cdot \Delta T = \eta \cdot \Delta T$$

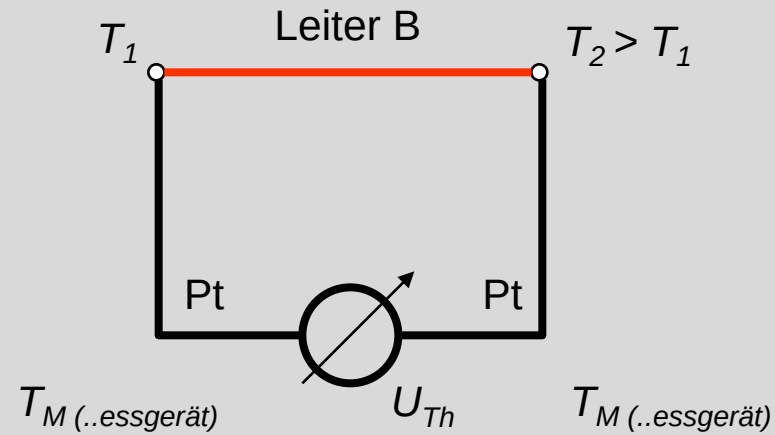
D_T : Thermodiffusionskoeffizient
 η : Seebeck-Koeffizient

$$J_{\text{Drift}} = -\sigma_{el} \cdot \nabla \Phi(x) \approx -\sigma_{el} \cdot \frac{U_{Th}}{h}$$



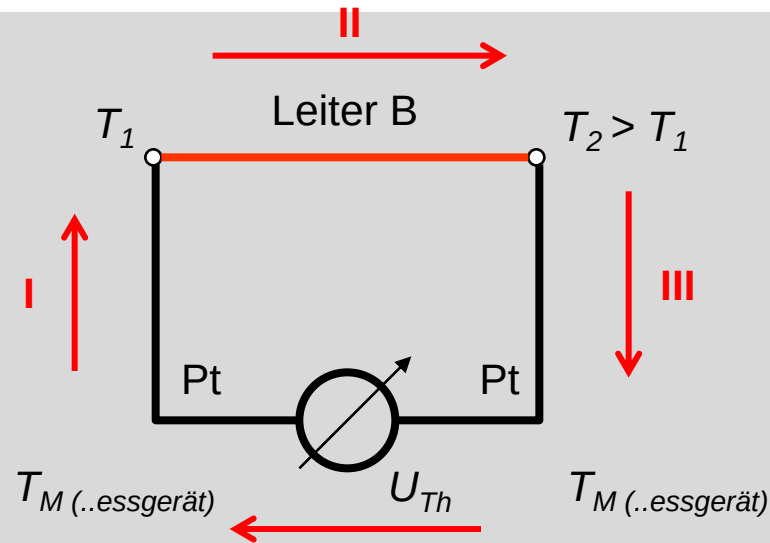
Im GG:

$U_{\text{Thermospannung}}$
baut sich auf!



*„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“*

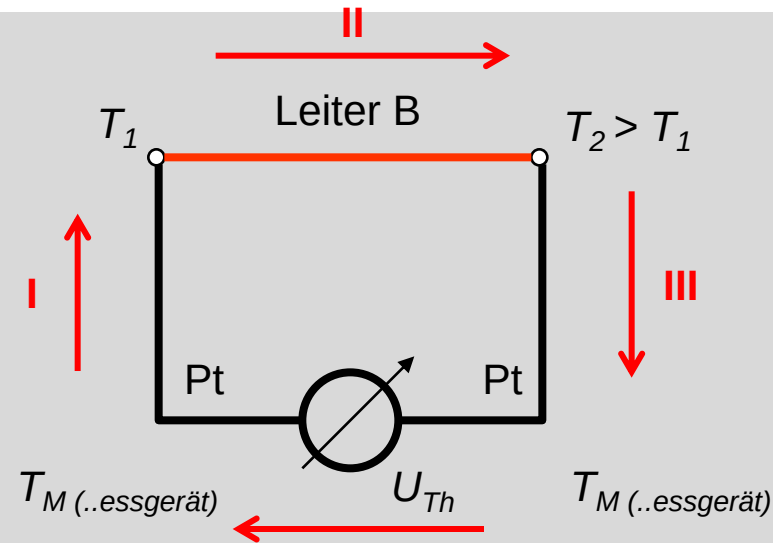
$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$



„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$\rightarrow U_{Th} +$

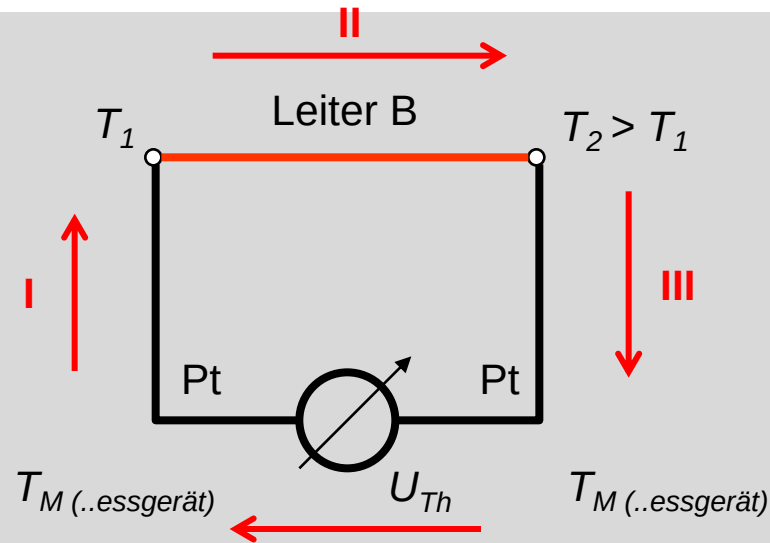


„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M)$$

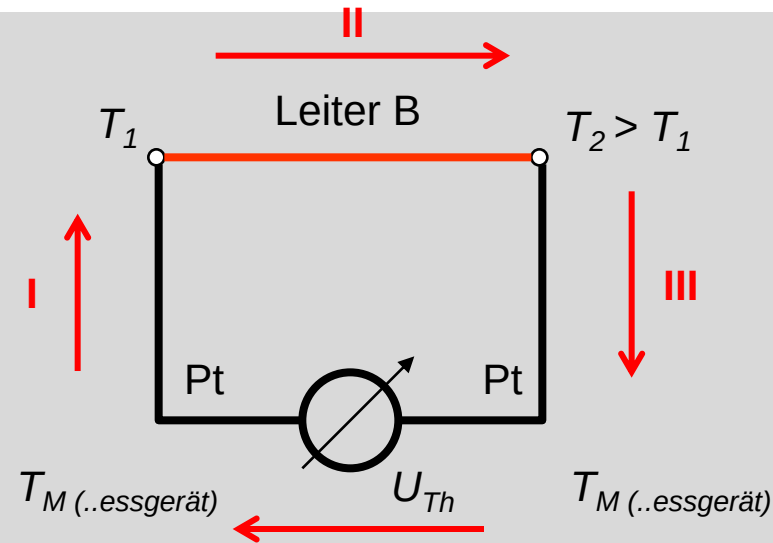
I



„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \underbrace{\eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M)}_I + \underbrace{\eta_B \cdot (T_2 - T_1)}_{II}$$



„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

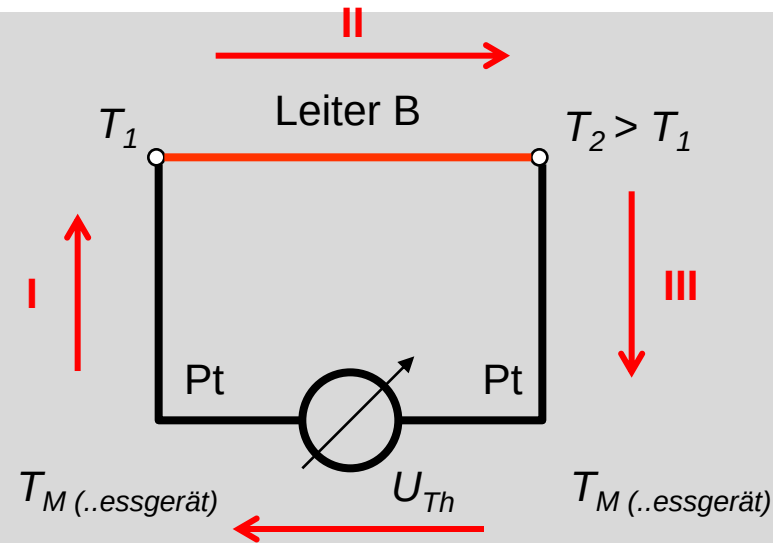
$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \underbrace{\eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M)}_I + \underbrace{\eta_B \cdot (T_2 - T_1)}_{II} + \underbrace{\eta_{Pt} \cdot (T_M - T_2)}_{III} = 0$$

I

II

III

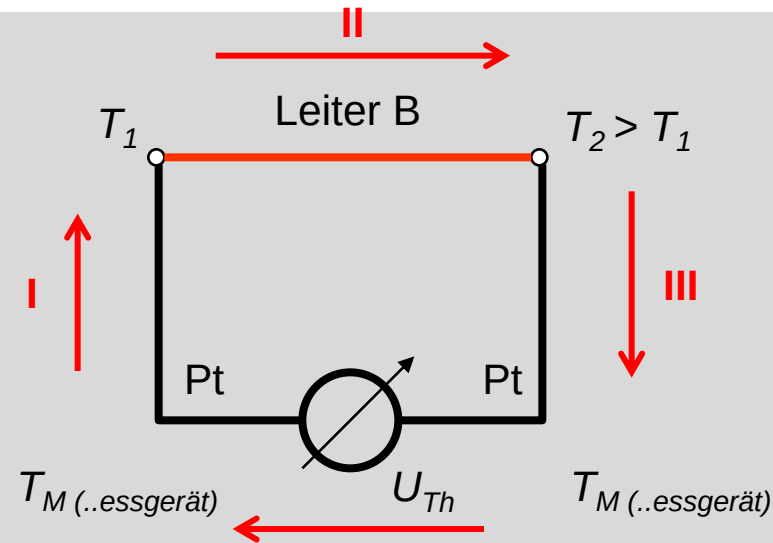


„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) + \eta_{Pt} \cdot (T_M - T_2) = 0$$

$$T_1 = T_{Messgerät}$$



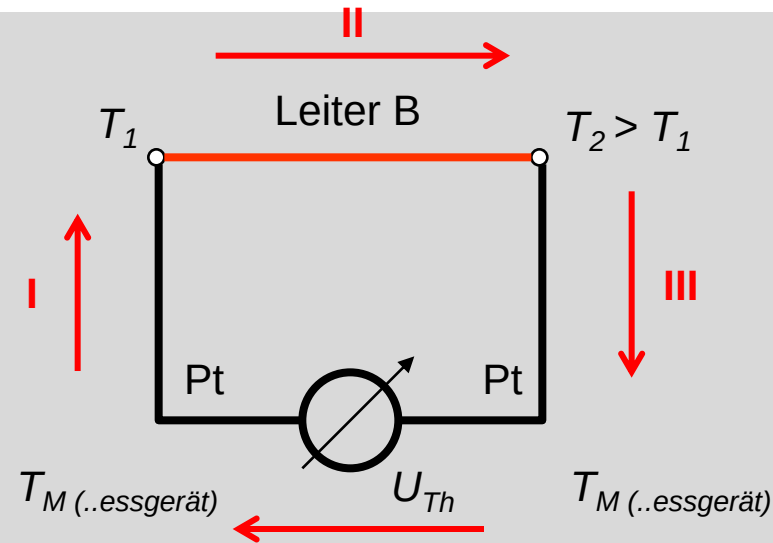
„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) + \eta_{Pt} \cdot (T_M - T_2) = 0$$

$$T_1 = T_{Messgerät}$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_1) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) - \eta_{Pt} \cdot (T_2 - T_1) = 0$$



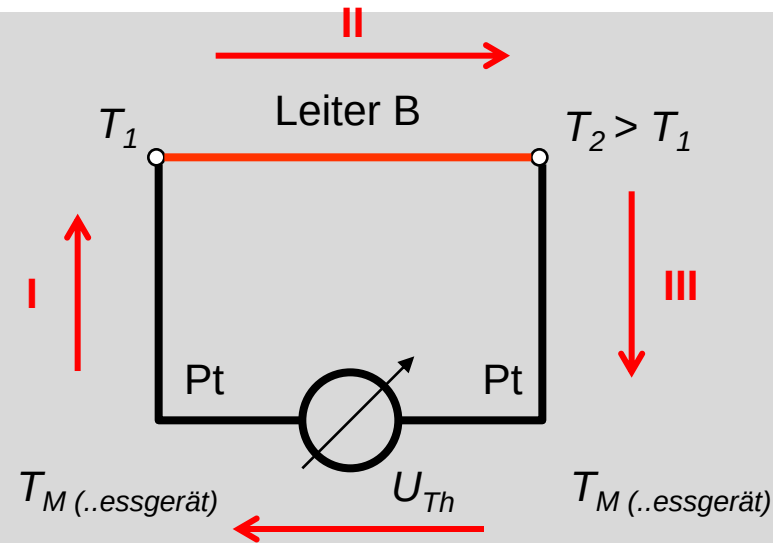
„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) + \eta_{Pt} \cdot (T_M - T_2) = 0$$

$$T_1 = T_{\text{Messgerät}}$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (\cancel{T_1} - T_1) + \eta_B \cdot \underline{(T_2 - T_1)} - \eta_{Pt} \cdot \underline{(T_2 - T_1)} = 0$$



„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

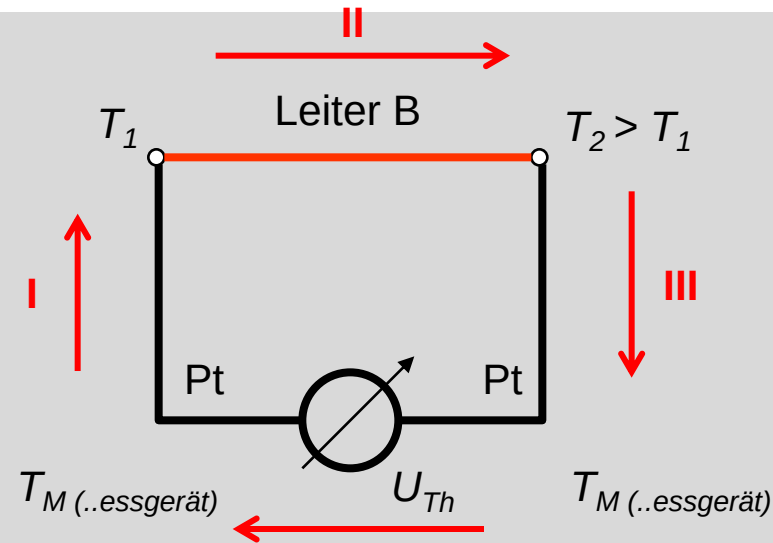
$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) + \eta_{Pt} \cdot (T_M - T_2) = 0$$

$$T_1 = T_{\text{Messgerät}}$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_1) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) - \eta_{Pt} \cdot (T_2 - T_1) = 0$$

$$\rightarrow -U_{Th} = (\eta_B - \eta_{Pt}) \cdot (T_2 - T_1)$$



„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

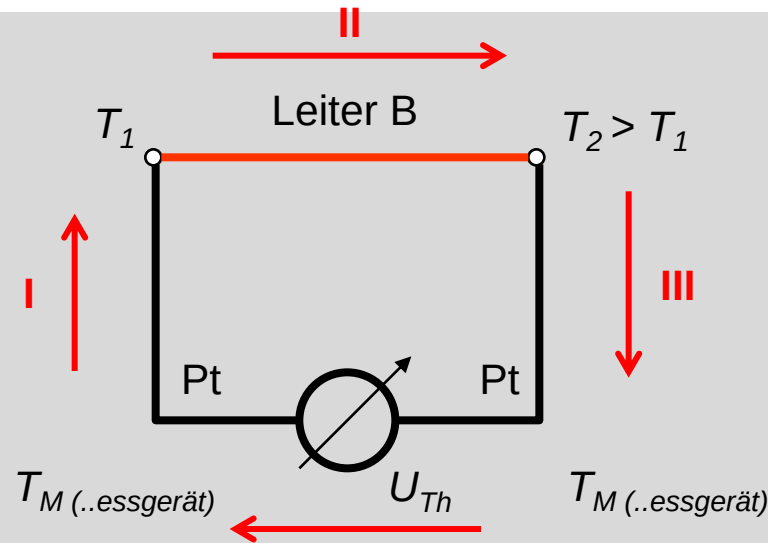
$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_M) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) + \eta_{Pt} \cdot (T_M - T_2) = 0$$

$$T_1 = T_{\text{Messgerät}}$$

$$\rightarrow U_{Th} + \eta_{Pt} \cdot (T_1 - T_1) + \eta_B \cdot (T_2 - T_1) - \eta_{Pt} \cdot (T_2 - T_1) = 0$$

$$\rightarrow -U_{Th} = (\eta_B - \eta_{Pt}) \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\rightarrow U_{Th} = (\eta_{Pt} - \eta_B) \cdot \Delta T$$



„Wie ist das
dann mit einem
Messgerät?“

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

Tabelle 1: Thermokraft (Seebeck-Koeffizient η) verschiedener Materialien

Material	Konstantan	Ni	Pt	PtRh	Cu	Fe	NiCr
$\eta / (\mu\text{V/K})$	- 35,0	- 15,0	0	6,9	7,8	19,2	25,4

„Platin wird als Referenzmaterial verwendet!“

$$\rightarrow U_{Th} = (\eta_{Pt} - \eta_B) \cdot \Delta T$$

$$U_{Th} = (\eta_{Pt} - \eta_B) \cdot \Delta T$$

Gesuchte Größe:

$$\eta_B$$

Formel umstellen:

$$\rightarrow \eta_B = -\frac{U_{Th}}{\Delta T} + \eta_{Pt}$$

$$U_{Th} = (\eta_{Pt} - \eta_B) \cdot \Delta T$$

Gesuchte Größe:

$$\eta_B$$

Formel umstellen:

$$\rightarrow \eta_B = -\frac{U_{Th}}{\Delta T} + \eta_{Pt}$$

Gegebene Größen:

$$U_{Th} = 6mV \quad \Delta T = (T_2 - T_1) = 420^\circ C - 20^\circ C \rightarrow \Delta T = 400K \quad \eta_{Pt} = 0 \frac{\mu V}{K}$$

$$U_{Th} = (\eta_{Pt} - \eta_B) \cdot \Delta T$$

Gesuchte Größe:

$$\eta_B$$

Formel umstellen:

$$\rightarrow \eta_B = -\frac{U_{Th}}{\Delta T} + \eta_{Pt}$$

Gegebene Größen:

$$U_{Th} = 6mV \quad \Delta T = (T_2 - T_1) = 420^\circ C - 20^\circ C \rightarrow \Delta T = 400K \quad \eta_{Pt} = 0 \frac{\mu V}{K}$$

In Formel einsetzen und berechnen:

$$\eta_B = -\frac{6mV}{(400K)} + 0 \frac{\mu V}{K} = -15 \frac{\mu V}{K}$$

$$U_{Th} = (\eta_{Pt} - \eta_B) \cdot \Delta T$$

Gesuchte Größe:

$$\eta_B$$

Formel umstellen:

$$\rightarrow \eta_B = -\frac{U_{Th}}{\Delta T} + \eta_{Pt}$$

Gegebene Größen:

$$U_{Th} = 6mV \quad \Delta T = (T_2 - T_1) = 420^\circ C - 20^\circ C \rightarrow \Delta T = 400K \quad \eta_{Pt} = 0 \frac{\mu V}{K}$$

In Formel einsetzen und berechnen:

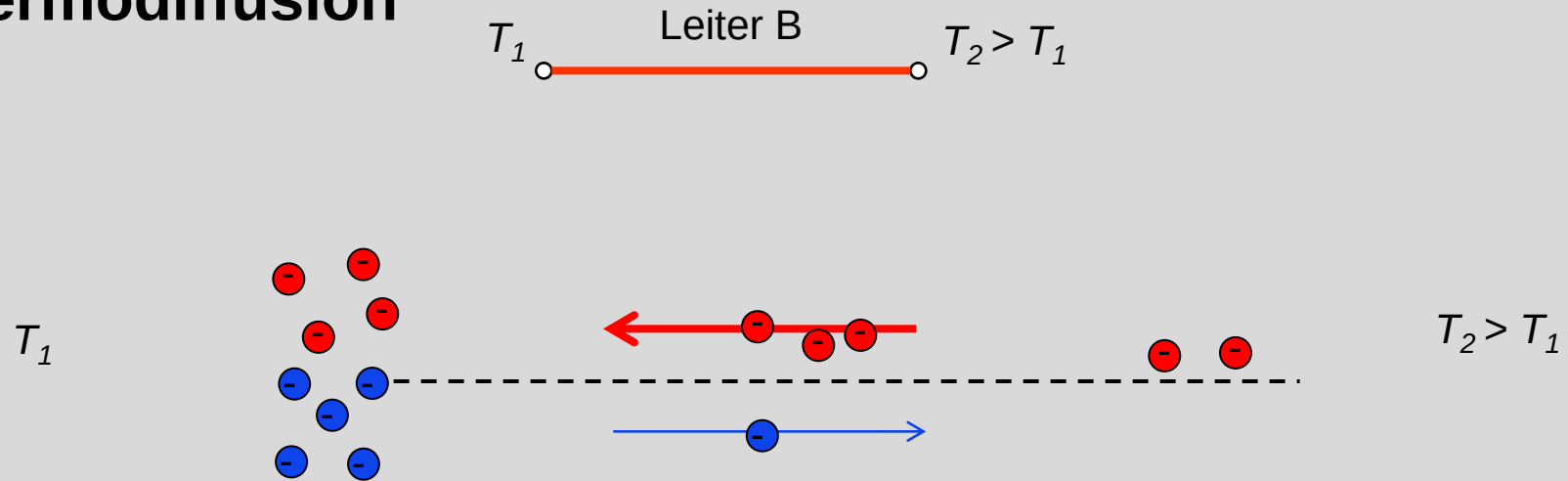
$$\eta_B = -\frac{6mV}{(400K)} + 0 \frac{\mu V}{K} = -15 \frac{\mu V}{K}$$

Tabelle 1: Thermokraft (Seebeck-Koeffizient η) verschiedener Materialien

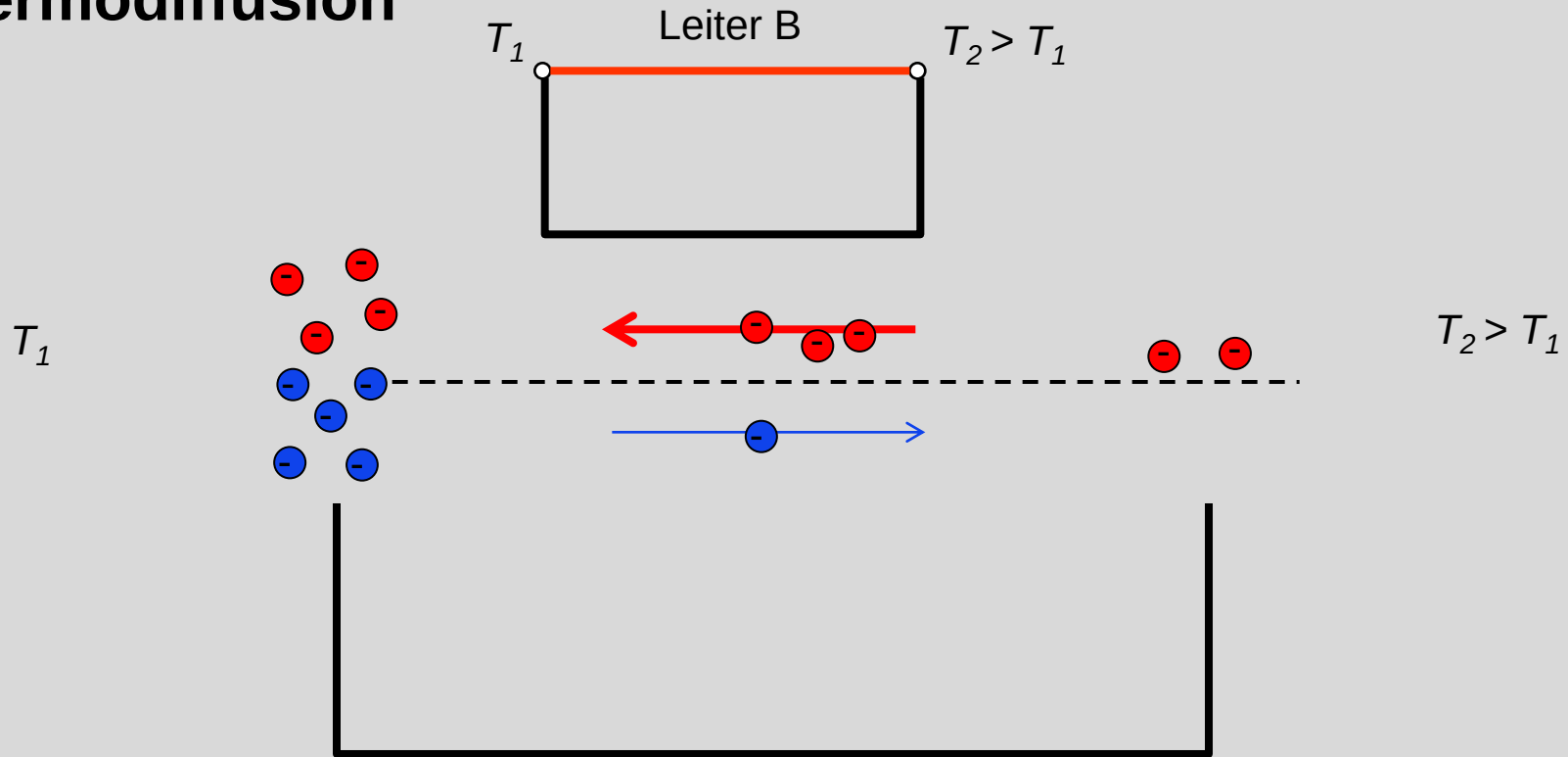
Material	Konstantan	Ni	Pt	PtRh	Cu
$\eta / (\mu V/K)$	-35,0	-15,0	0	6,9	7,8

b) Machen Sie sich klar, welcher Mechanismus für die Entstehung der Thermospannung verantwortlich ist und erklären Sie damit in welche Richtung ein Strom fließen würde, wenn man das Spannungsmessgerät in *Bild 1* kurzschließen würde.

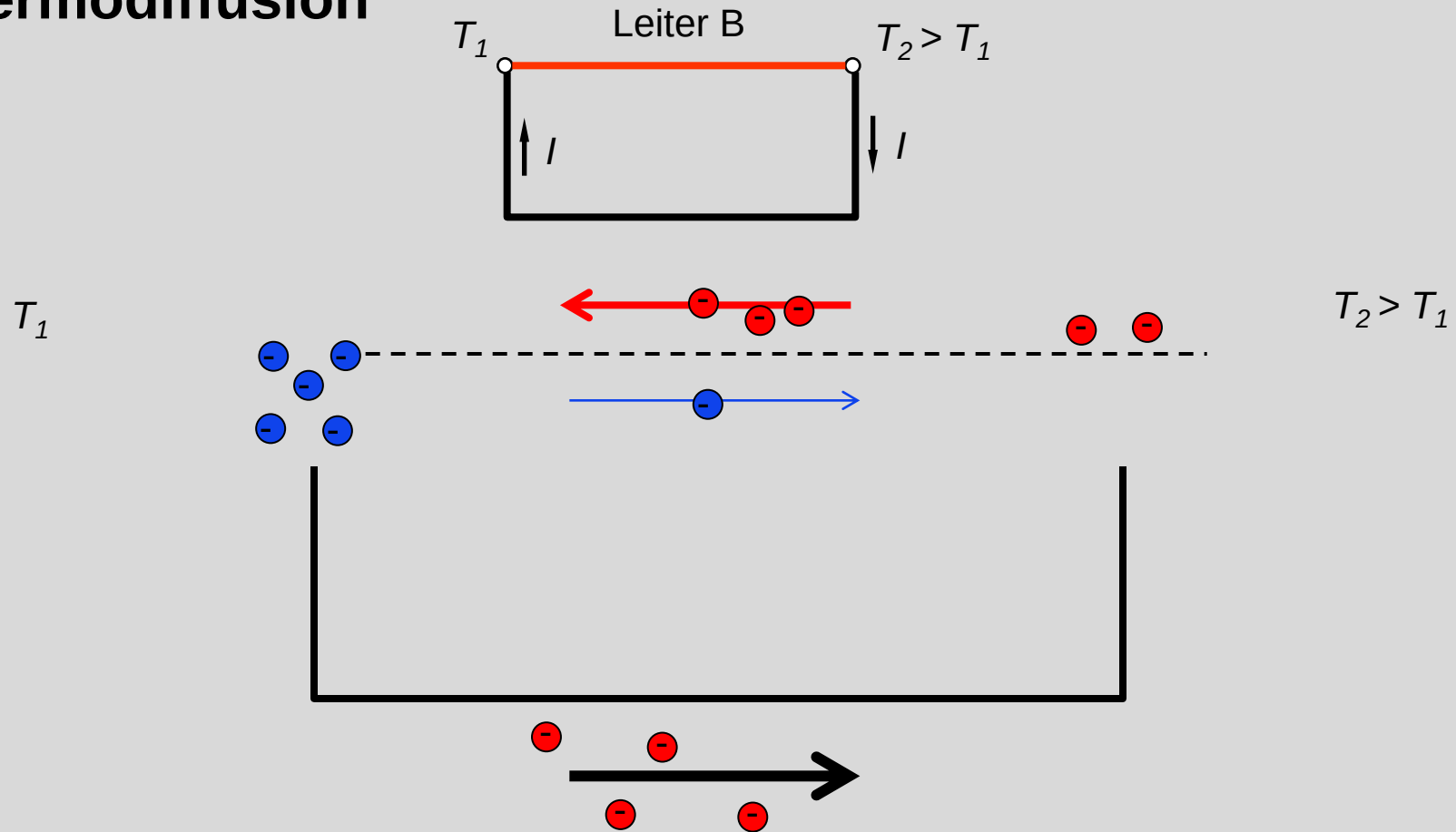
Thermodiffusion



Thermodiffusion



Thermodiffusion



c) Leiter B sei für die folgenden Teilaufgaben aus Nickel. Betrachten Sie das in *Bild 2* skizzierte Thermoelementpaar. Welches Material würden Sie für Leiter A aus *Tabelle 1* auswählen, um eine möglichst empfindliche Temperaturmessung zu gewährleisten?

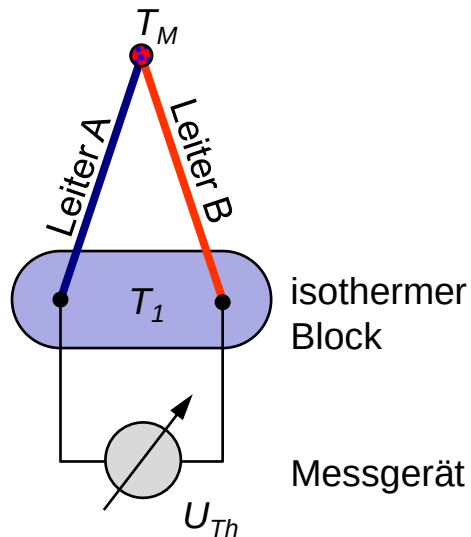
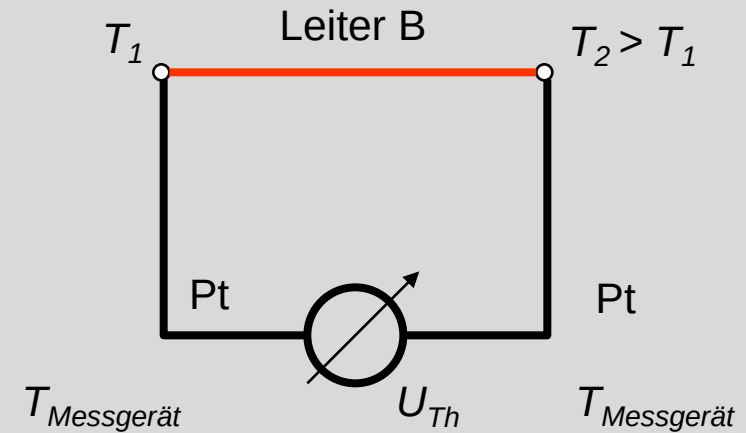
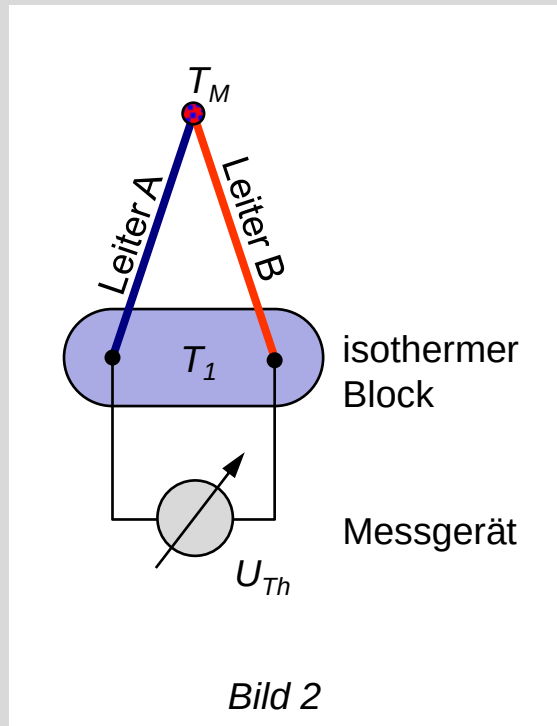
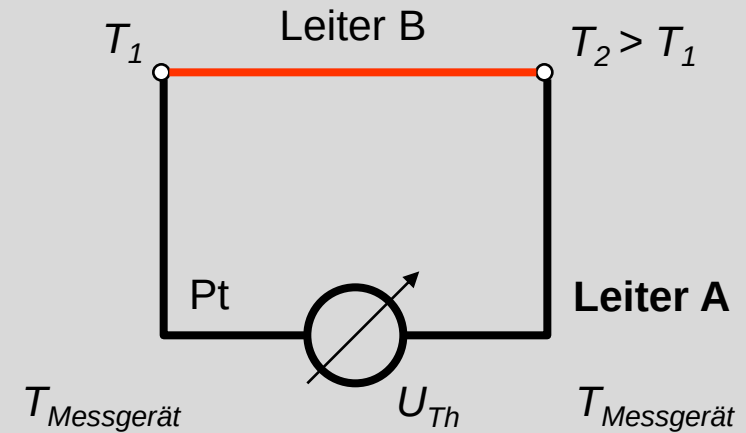
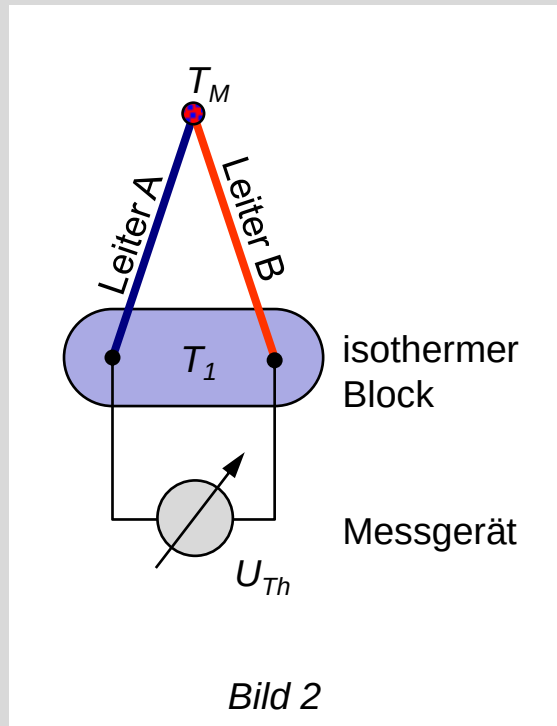


Bild 2

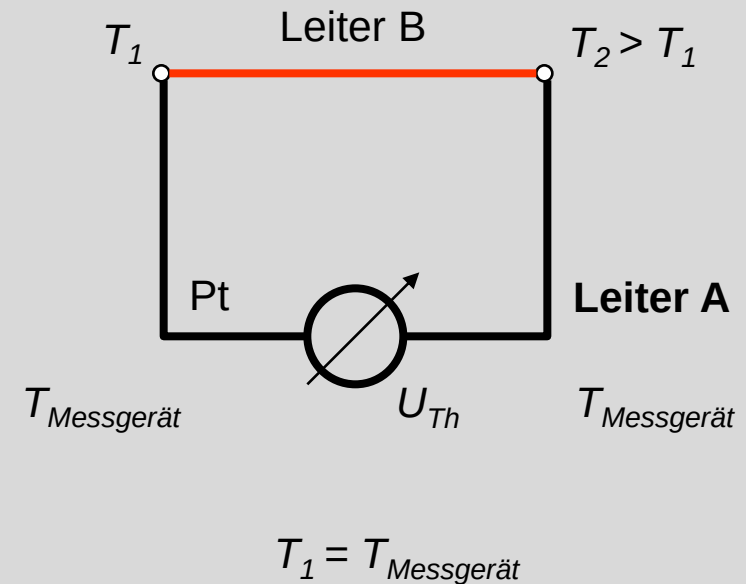
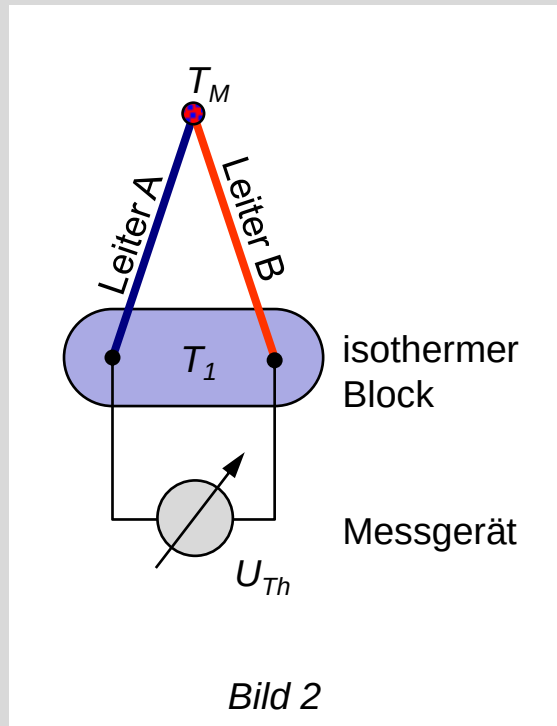
„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



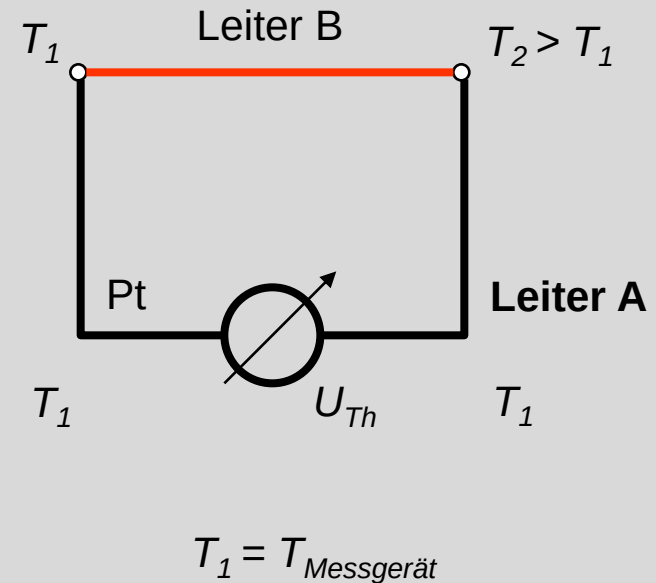
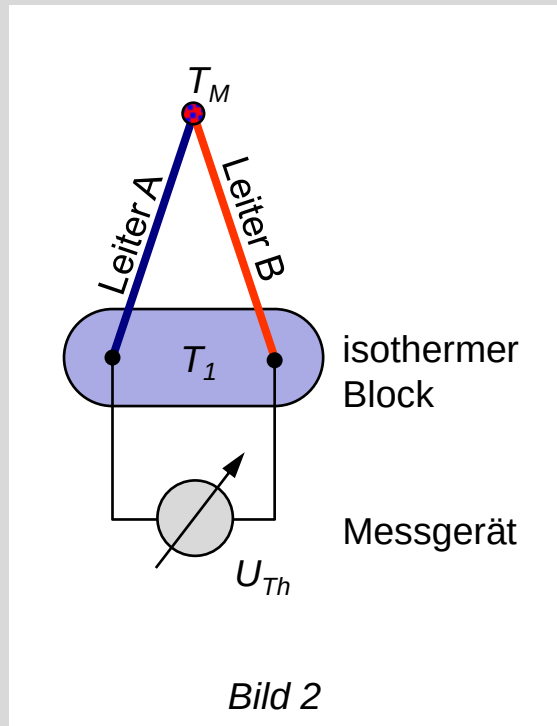
„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



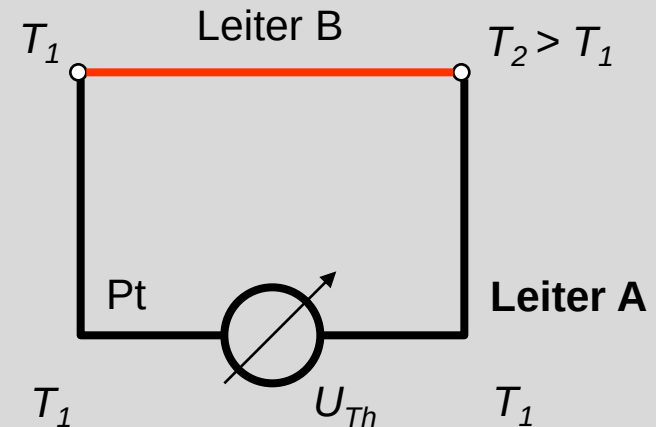
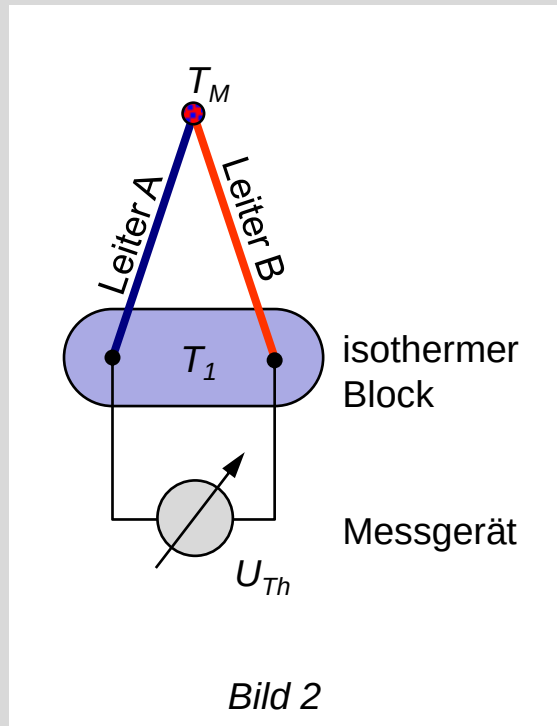
„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



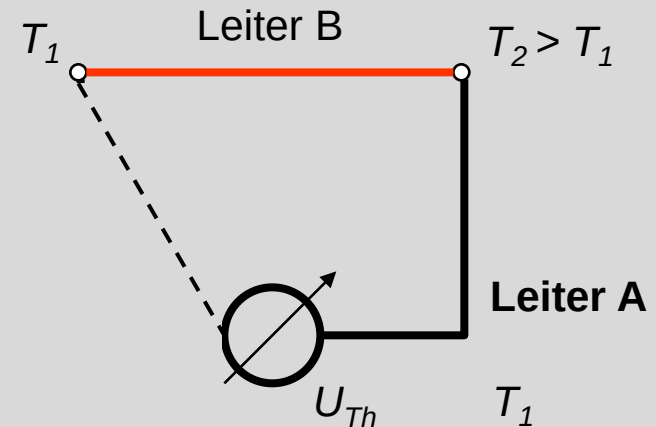
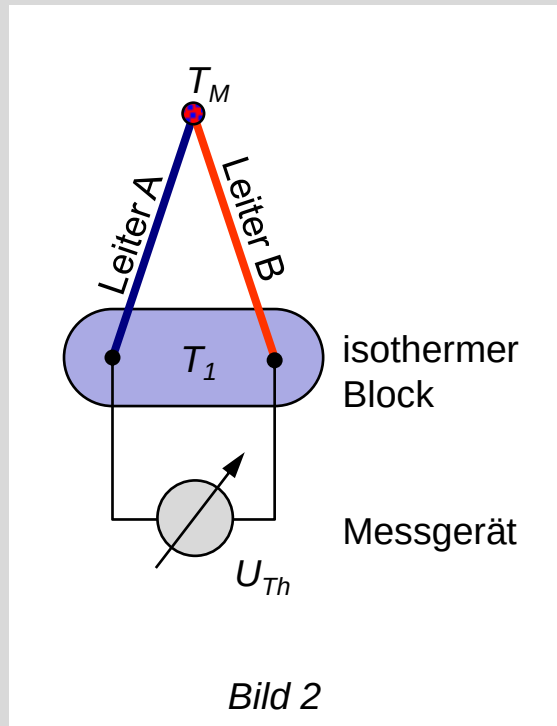
„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



$$T_1 = T_{\text{Messgerät}}$$

$$\eta_{Pt} = 0 \frac{\mu V}{K}$$

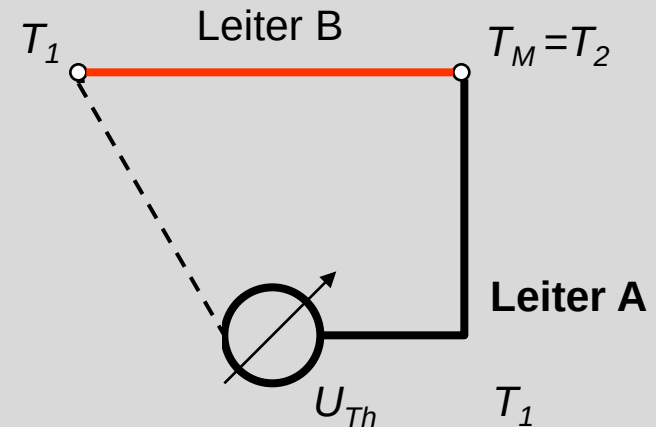
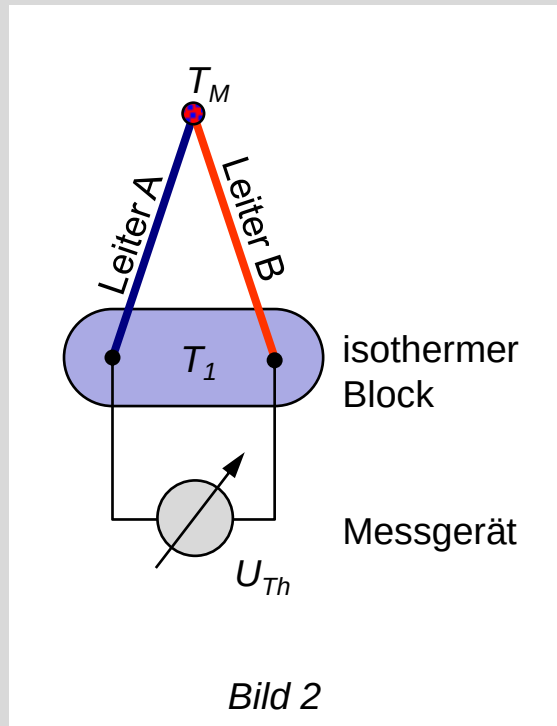
„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



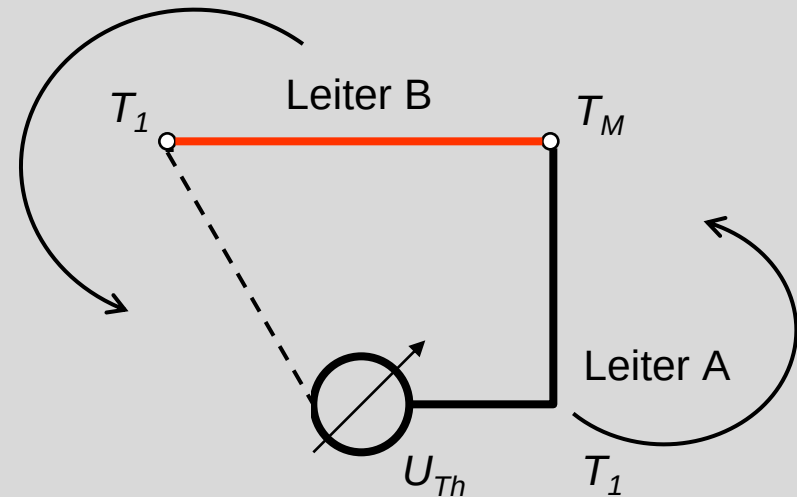
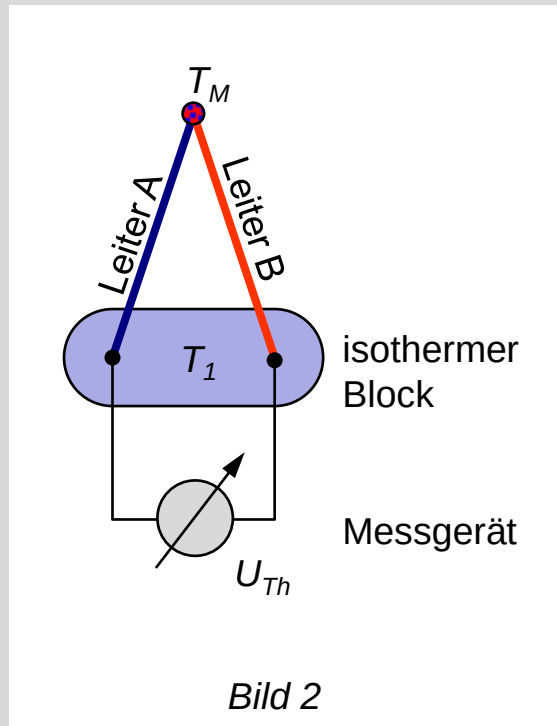
$$T_1 = T_{\text{Messgerät}}$$

$$\eta_{Pt} = 0 \frac{\mu V}{K}$$

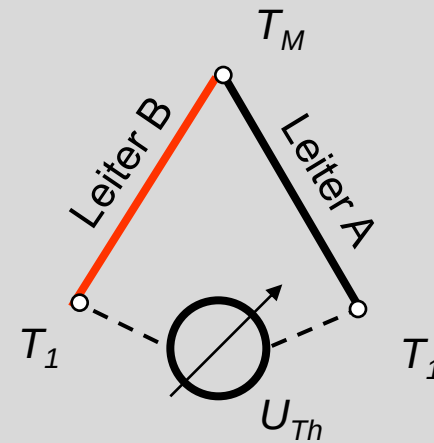
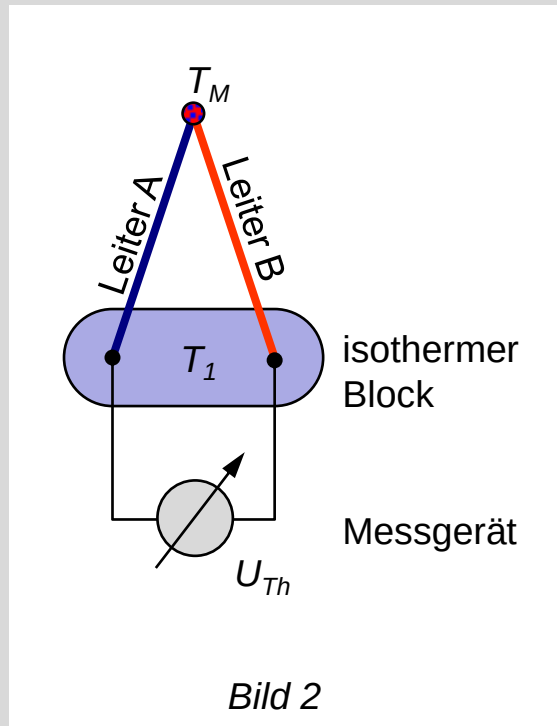
„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



„Was hat das Thermoelement mit der Anordnung zu tun, die wir zuvor untersucht haben?“



„Zum Schluss nur noch das Messgerät umpolen ;)“

c) Leiter B sei für die folgenden Teilaufgaben aus Nickel. Betrachten Sie das in *Bild 2* skizzierte Thermoelementpaar. Welches Material würden Sie für Leiter A aus *Tabelle 1* auswählen, um eine möglichst empfindliche Temperaturmessung zu gewährleisten?

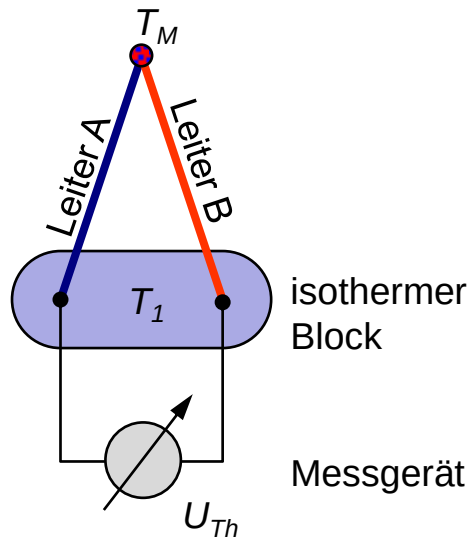


Bild 2

Was bedeutet eine möglichst gute Temperaturempfindlichkeit?

aus kleiner Änderung in ΔT

→ folgt große Änderung in U_{Th}

c) Leiter B sei für die folgenden Teilaufgaben aus Nickel. Betrachten Sie das in *Bild 2* skizzierte Thermoelementpaar. Welches Material würden Sie für Leiter A aus *Tabelle 1* auswählen, um eine möglichst empfindliche Temperaturmessung zu gewährleisten?

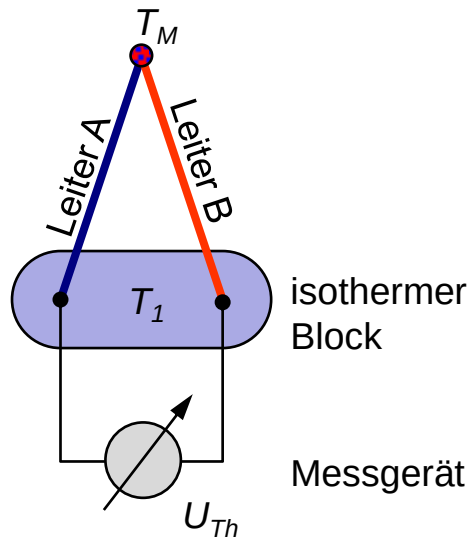


Bild 2

Was bedeutet eine möglichst gute Temperaturempfindlichkeit?

aus kleiner Änderung in ΔT

→ folgt große Änderung in U_{Th}

Wir wissen, dass:

$$U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

c) Leiter B sei für die folgenden Teilaufgaben aus Nickel. Betrachten Sie das in *Bild 2* skizzierte Thermoelementpaar. Welches Material würden Sie für Leiter A aus *Tabelle 1* auswählen, um eine möglichst empfindliche Temperaturmessung zu gewährleisten?

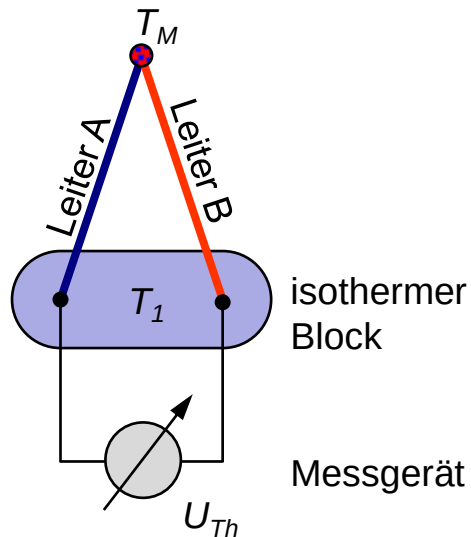


Bild 2

Was bedeutet eine möglichst gute Temperaturempfindlichkeit?

aus kleiner Änderung in ΔT

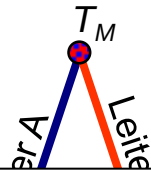
→ folgt große Änderung in U_{Th}

Wir wissen, dass:

$$U_{Th} = \eta \Delta T$$

→ $\eta_{AB} = \eta_A - \eta_B$ → muss möglichst groß werden

c) Leiter B sei für die folgenden Teilaufgaben aus Nickel. Betrachten Sie das in *Bild 2* skizzierte Thermoelementpaar. Welches Material würden Sie für Leiter A aus *Tabelle 1* auswählen, um eine möglichst empfindliche Temperaturmessung zu gewährleisten?



Was bedeutet eine möglichst gute Temperaturempfindlichkeit?

aus kleiner Änderung in ΔT

Tabelle 1: Thermokraft (Seebeck Koeffizient η) verschiedener Materialien

Material	Konstantan	Ni	Pt	PtRh	Cu	Fe	NiCr
$\eta / (\mu\text{V/K})$	-35,0	-15,0	0	6,9	7,8	19,2	25,4

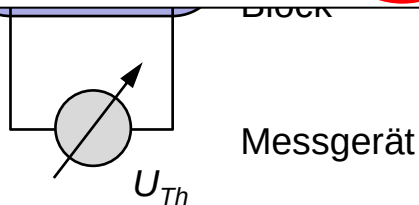


Bild 2

Wir wissen, dass:

$$U_{Th} = \eta \Delta T$$

$$\rightarrow \eta_{AB} = \eta_A - \eta_B \rightarrow \text{muss möglichst groß werden}$$

c) Leiter B sei für die folgenden Teilaufgaben aus Nickel. Betrachten Sie das in *Bild 2* skizzierte Thermoelementpaar. Welches Material würden Sie für Leiter A aus *Tabelle 1* auswählen, um eine möglichst empfindliche Temperaturmessung zu gewährleisten?

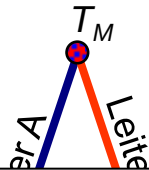


Tabelle 1: Thermokraft (Seebeck Koeffizient η) verschiedener Materialien

Material	Konstantan	Ni	Pt	PtRh	Cu	Fe	NiCr
$\eta / (\mu\text{V/K})$	-35,0	-15,0	0	6,9	7,8	19,2	25,4

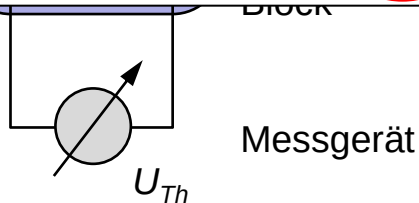


Bild 2

Was bedeutet eine möglichst gute Temperaturempfindlichkeit?

aus kleiner Änderung in ΔT

Wir wissen, dass:

$$U_{Th} = \eta \Delta T$$

$$\rightarrow \eta_{AB} = \eta_A - \eta_B \rightarrow \text{muss möglichst groß werden}$$

$$\text{Tabelle 1: } \rightarrow \eta_{\text{NiCr:Ni}} = \eta_{\text{NiCr}} - \eta_{\text{Ni}}$$

$$= 25,4 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} - (-15 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}) = 40,4 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}$$

d) Wie groß ist die Temperatur T_M , bei einer gemessenen Thermospannung von $U_{Th} = 25 \text{ mV}$, wenn für Leiter A Eisen verwendet wird ($T_1 = 20^\circ\text{C}$)?

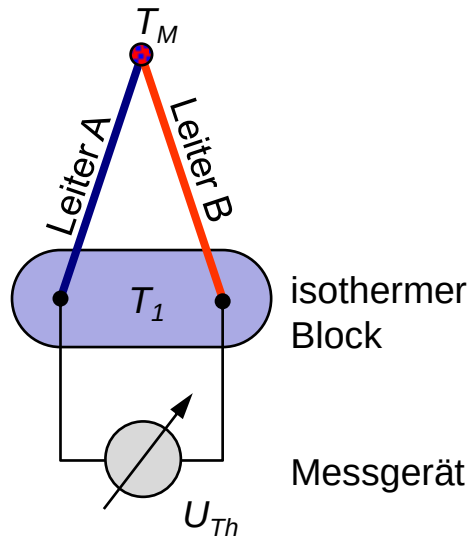


Bild 2

$$(1) \quad U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

Gesuchte Größe:

$$T_M = T_2 \quad \text{mit} \quad \Delta T = (T_M - T_1)$$

In Formel (1) einsetzen:

$$\rightarrow U_{Th} = \eta \cdot \Delta T = \eta \cdot (T_M - T_1)$$

$$(1) \quad U_{Th} = \eta \cdot \Delta T$$

Gesuchte Größe:

$$T_M = T_2 \quad \text{mit} \quad \Delta T = (T_M - T_1)$$

In Formel (1) einsetzen:

$$\rightarrow U_{Th} = \eta \cdot \Delta T = \eta \cdot (T_M - T_1)$$

Nach T_M auflösen:

$$\rightarrow (T_M - T_1) = \frac{U_{Th}}{\eta}$$

$$T_M = \frac{U_{Th}}{\eta} + T_1$$

$$(2) \quad T_M = \frac{U_{Th}}{\eta} + T_1$$

mit

$$\eta = \eta_{Fe:Ni} = \eta_{Fe} - \eta_{Ni}$$

η einsetzen in (2):

$$\rightarrow T_M = \frac{U_{Th}}{\eta_{Fe} - \eta_{Ni}} + T_1$$

$$(2) \quad T_M = \frac{U_{Th}}{\eta} + T_1$$

mit

$$\eta = \eta_{Fe:Ni} = \eta_{Fe} - \eta_{Ni}$$

η einsetzen in (2):

$$\rightarrow T_M = \frac{U_{Th}}{\eta_{Fe} - \eta_{Ni}} + T_1$$

In Formel einsetzen und berechnen:

$$T_M = \frac{25 \cdot 10^3 \mu V}{(19,2 \frac{\mu V}{K}) - (-15 \frac{\mu V}{K})} + 20^\circ C \approx 751^\circ C$$

Gegebene Größen:

$$U_{Th} = 25 mV = 25 \cdot 10^3 \mu V$$

$$T_1 = 20^\circ C$$

Material	Konstantan	Ni	Fe
$\eta / (\mu V/K)$	-35,0	-15,0	19,2

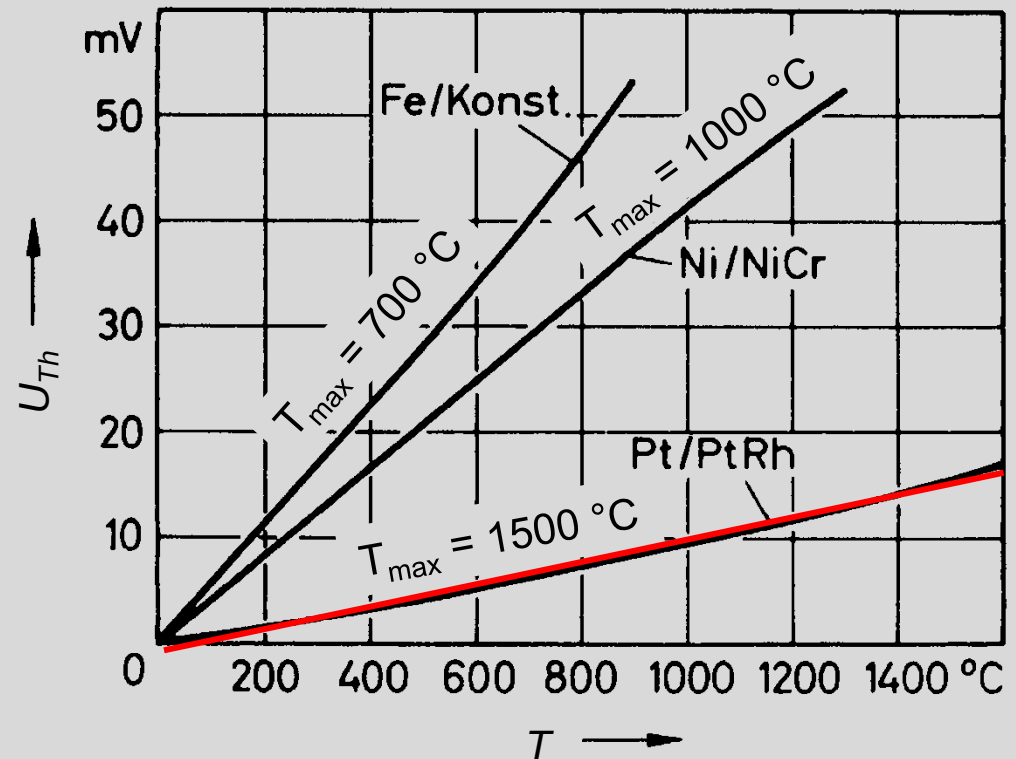
e) Sie erwarten eine Temperatur in ihrem Sinterofen bis zu 1200°C. Welche Materialien würden Sie vorzugsweise für die beiden Leiter wählen, um auch den Aufheizvorgang (ab $T_1=20^\circ\text{C}$) möglichst korrekt mitverfolgen zu können? Begründen Sie Ihre Wahl.

Auswahlkriterien

- Hohe Thermospannung U_{Th}
→ $\eta_{AB} = \eta_A - \eta_B$ groß
- **Linearer Zusammenhang**
zwischen U_{Th} und T

[Münch 1993]

Gebräuchliche Thermopaare



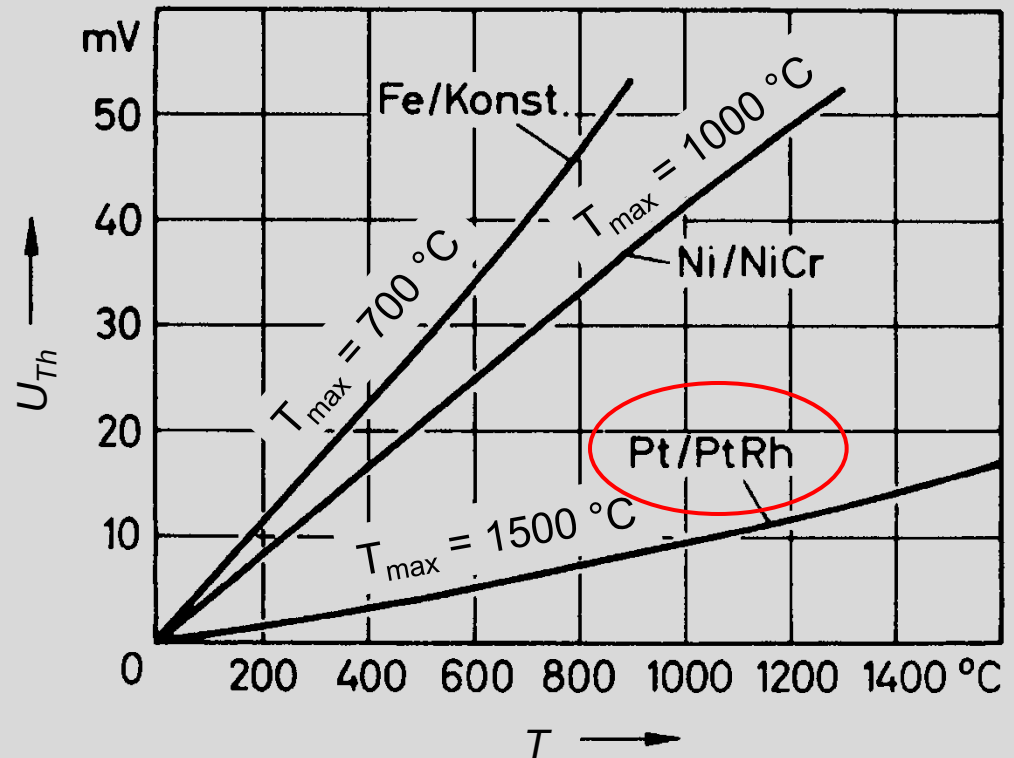
Auswahlkriterien

- Hohe Thermospannung U_{Th}
→ $\eta_{AB} = \eta_A - \eta_B$ groß
- Linearer Zusammenhang
zwischen U_{Th} und T

[Münch 1993]

→ Verwendung gleicher Metalle mit
Verunreinigung Bsp: Pt/PtRh

Gebräuchliche Thermopaare



Auswahlkriterien

- Hohe Thermospannung U_{Th}
→ $\eta_{AB} = \eta_A - \eta_B$ groß
- Linearer Zusammenhang
zwischen U_{Th} und T

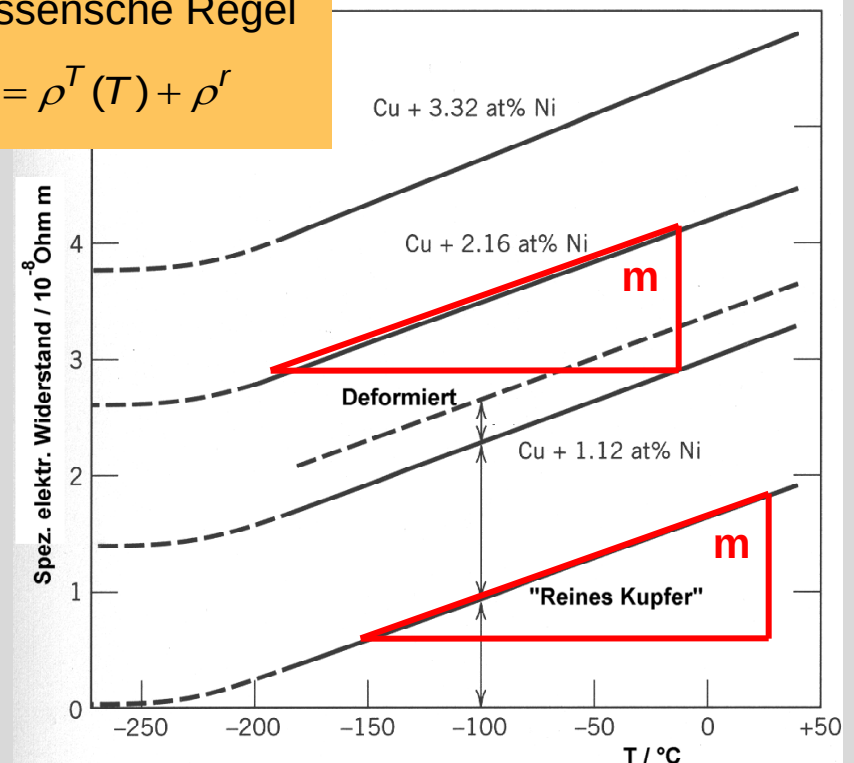
[Münch 1993]

- Verwendung gleicher Metalle mit
Verunreinigung Bsp: Pt/PtRh
- gleiches „lineares Verhalten
(=Steigung m)“ aber $\sigma_{Pt} > \sigma_{PtRh}$ (VL4).

Matthiessensche Regel

Matthiessensche Regel

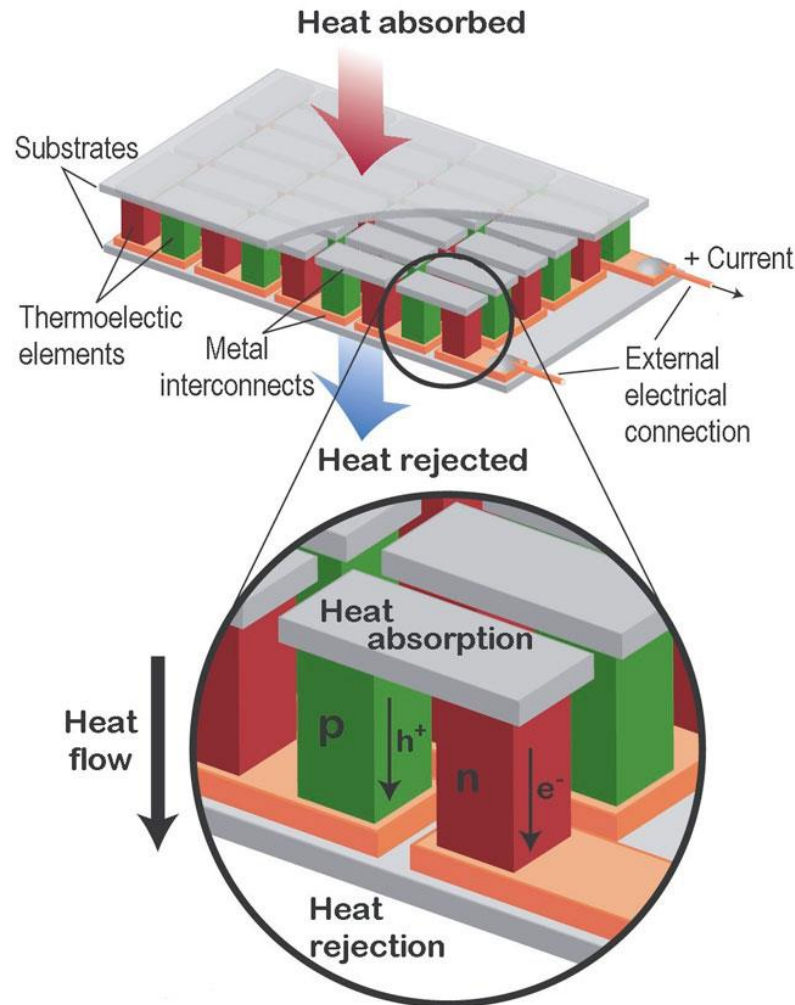
$$\rho = \rho^T(T) + \rho^r$$



f) Könnte man mit Hilfe des Seebeck-Effekts möglicherweise sogar thermische in elektrische Energie wandeln?

Exkurs!

Nicht Klausurrelevant



Überbegriff:
"Thermoelectric (Generator)"

two thermoelectric
semiconductors:

- n-type and p-type

Material Voraussetzungen:
must be good at conducting
electricity but poor at
conducting heat

2. a) Es sei erneut ein Thermoelement, bestehend aus zwei Leitern gegeben. Einer der Leiter bestehe aus Nickel. Wie viele Leitungselektronen N befinden sich im Nickel-Drahtstück bzw. wie groß ist ihre Konzentration n ?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass jedes Nickelatom ein Elektron als Leitungselektron abgibt. Die Dichte von Nickel beträgt $\rho_N = 8,9 \text{ g/cm}^3$. Der Draht habe einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser $A = 2 \text{ mm}$ und die Länge $l = 100 \text{ mm}$. Entnehmen Sie weitere eventuell benötigte Konstanten der PB Formelsammlung.

2. a) Es sei erneut ein Thermoelement, bestehend aus zwei Leitern gegeben. Einer der Leiter bestehe aus Nickel. Wie viele Leitungselektronen N befinden sich im Nickel-Drahtstück bzw. wie groß ist ihre Konzentration n ?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass jedes Nickelatom ein Elektron als Leitungselektron abgibt. Die Dichte von Nickel beträgt $\rho_N = 8,9 \text{ g/cm}^3$. Der Draht habe einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser $A = 2 \text{ mm}$ und die Länge $l = 100 \text{ mm}$. Entnehmen Sie weitere eventuell benötigte Konstanten der PB Formelsammlung.

Für die Klausur:

„Warum wird so eine Aufgabe aus dem Zusammenhang gerissen gestellt?“
→ Weil das Ergebnis für die folgende Aufgabe benötigt wird!

2. a) Es sei erneut ein Thermoelement, bestehend aus zwei Leitern gegeben. Einer der Leiter bestehe aus Nickel. Wie viele Leitungselektronen N befinden sich im Nickel-Drahtstück bzw. wie groß ist ihre Konzentration n ?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass jedes Nickelatom ein Elektron als Leitungselektron abgibt. Die Dichte von Nickel beträgt $\rho_{\text{Ni}} = 8,9 \text{ g/cm}^3$. Der Draht habe einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser $A = 2 \text{ mm}$ und die Länge $l = 100 \text{ mm}$. Entnehmen Sie weitere eventuell benötigte Konstanten der PB Formelsammlung.

Aus dem Hinweis:

$$\text{Anzahl } N(e^-) = \text{Anzahl } N(\text{Ni})$$

2. a) Es sei erneut ein Thermoelement, bestehend aus zwei Leitern gegeben. Einer der Leiter bestehe aus Nickel. Wie viele Leitungselektronen N befinden sich im Nickel-Drahtstück bzw. wie groß ist ihre Konzentration n ?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass jedes Nickelatom ein Elektron als Leitungselektron abgibt. Die Dichte von Nickel beträgt $\rho_{\text{Ni}} = 8,9 \text{ g/cm}^3$. Der Draht habe einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser $A = 2 \text{ mm}$ und die Länge $l = 100 \text{ mm}$. Entnehmen Sie weitere eventuell benötigte Konstanten der PB Formelsammlung.

Aus dem Hinweis:

$$\text{Anzahl } N(e^-) = \text{Anzahl } N(\text{Ni})$$

„Wieviel Nickel befindet sich im Leiter?“

$$\frac{\text{Anzahl } N(\text{Ni})}{\text{Volumen}} = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{\text{mol}, \text{Ni}}}$$

N_A : **Avogadro-Konstante**
= Anzahl Teilchen (Ni oder e^-) pro Mol

$$(1) \quad \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{mol,Ni}}$$

Dichte von einem Mol Nickel...

$$\rho_{Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{V_{mol,Ni}}$$

$$(1) \quad \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{mol,Ni}}$$

Dichte von einem Mol Nickel... und umstellen nach $V_{mol,Ni}$...

$$\rho_{Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{V_{mol,Ni}}$$

$$\rightarrow V_{mol,Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{\rho_{Ni}}$$

Einsetzen in (1)...

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni}$$

$$(1) \quad \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{mol,Ni}}$$

Dichte von einem Mol Nickel... und umstellen nach $V_{mol,Ni}$...

$$\rho_{Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{V_{mol,Ni}}$$

$$\rightarrow V_{mol,Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{\rho_{Ni}}$$

Einsetzen in (1)...

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni}$$

und umstellen nach N...

$$\rightarrow N = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni} \cdot V$$

$$(1) \quad \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{mol,Ni}}$$

Dichte von einem Mol Nickel... und umstellen nach $V_{mol,Ni}$...

$$\rho_{Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{V_{mol,Ni}}$$

$$\rightarrow V_{mol,Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{\rho_{Ni}}$$

Einsetzen in (1)...

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni}$$

und umstellen nach N...

$$\rightarrow N = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni} \cdot V$$

mit dem Volumen V....

$$V = \pi r^2 \cdot l = \pi \left(\frac{A}{2} \right)^2 \cdot l = \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

$$(1) \quad \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{mol,Ni}}$$

Dichte von einem Mol Nickel... und umstellen nach $V_{mol,Ni}$...

$$\rho_{Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{V_{mol,Ni}}$$

$$\rightarrow V_{mol,Ni} = \frac{m_{mol,Ni}}{\rho_{Ni}}$$

Einsetzen in (1)...

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni}$$

und umstellen nach N...

$$\rightarrow N = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni} \cdot V$$

mit dem Volumen V....

folgt:

$$V = \pi r^2 \cdot l = \pi \left(\frac{A}{2} \right)^2 \cdot l = \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

$$\rightarrow N = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni} \cdot \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

$$(2) \quad \rightarrow N = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni} \cdot \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

$$(2) \quad \rightarrow N = \frac{N_A}{m_{mol,Ni}} \cdot \rho_{Ni} \cdot \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

Gegebene Größen:

$$\rho_{Ni} = 8,9g \cdot cm^{-3} \quad m_{mol,Ni} = 58,69g \cdot mol^{-1}$$

$$l = 100mm = 10cm$$

$$A = 2mm = 0,2cm$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$$

28 58,69

Ni

Nickel

$$N = \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{58,69g \cdot mol^{-1}} \cdot 8,9g \cdot cm^{-3} \cdot \frac{\pi(0,2cm)^2}{4} \cdot 10cm \approx 2,9 \cdot 10^{22}$$

$$N \approx 2,9 \cdot 10^{22}$$

Konzentration n :

$$n = \frac{N}{V}$$

$$N \approx 2,9 \cdot 10^{22}$$

Konzentration n :

$$n = \frac{N}{V}$$

Volumen:

$$V = \pi r^2 \cdot l = \pi \left(\frac{A}{2} \right)^2 \cdot l = \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

$$N \approx 2,9 \cdot 10^{22}$$

Konzentration n :

$$n = \frac{N}{V}$$

Volumen:

$$V = \pi r^2 \cdot l = \pi \left(\frac{A}{2} \right)^2 \cdot l = \frac{\pi A^2}{4} \cdot l$$

Einsetzen und berechnen:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2,9 \cdot 10^{22}}{\frac{\pi A^2}{4} \cdot l} = \frac{2,9 \cdot 10^{22}}{\frac{\pi (0,2\text{cm})^2}{4}} \approx 9,2 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

b) Berechnen Sie nun den elektrischen Widerstand R des Nickel-Drahtstücks. Berücksichtigen Sie dabei den Temperaturgradienten im Draht. Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Temperatur im Draht linear mit der Länge abfällt. Die thermische Längenausdehnung des Drahtes sei vernachlässigbar. Nehmen sie weiter an, dass $T_M=90^\circ\text{C}$ und $T_1=20^\circ\text{C}$ sei.

Hinweis: Der lineare Temperaturkoeffizient der Beweglichkeit $\mu(T)$ von Nickel sei $TK_M = -6,7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Mathematische Hilfestellung: $\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$

b) Berechnen Sie nun den elektrischen Widerstand R des Nickel-Drahtstücks. Berücksichtigen Sie dabei den Temperaturgradienten im Draht. Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Temperatur im Draht linear mit der Länge abfällt. Die thermische Längenausdehnung des Drahtes sei vernachlässigbar. Nehmen sie weiter an, dass $T_M=90^\circ\text{C}$ und $T_1=20^\circ\text{C}$ sei.

Hinweis: Der lineare Temperaturkoeffizient der Beweglichkeit $\mu(T)$ von Nickel sei $TK_M = -6,7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Mathematische Hilfestellung: $\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$

Bekannter Zusammenhang....

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Bekannter Zusammenhang....

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$



noch allgemeiner:

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx$$



Bekannter Zusammenhang....

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$



noch allgemeiner:

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx$$



$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

μ : Beweglichkeit
 n : Elektronenkonzentration

Bekannter Zusammenhang....

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \text{-----} l \end{array}$$

noch allgemeiner:

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \quad +dl \quad \dots \quad +dl \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

μ : Beweglichkeit
 n : Elektronenkonzentration

Für die Beweglichkeit gilt:

$$\mu(T) = \underbrace{\mu_0}_{100\%} \underbrace{(1 + TK_{Ni}(T - T_1))}_{\% \text{ Änderung pro } \Delta T\text{-Schritt}}$$

Bekannter Zusammenhang....

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \text{-----} l \end{array}$$

noch allgemeiner:

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \quad +dl \quad \dots \quad +dl \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ T_1 \quad T_1+\Delta T \quad \quad \quad T_M \end{array}$$

$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

μ : Beweglichkeit
 n : Elektronenkonzentration

Für die Beweglichkeit gilt:

$$\mu(T) = \underbrace{\mu_0}_{100\%} \underbrace{(1 + TK_M (T - T_1))}_{\% \text{ Änderung pro } \Delta T\text{-Schritt}}$$

b) Berechnen Sie nun den elektrischen Widerstand R des Nickel-Drahtstücks. Berücksichtigen Sie dabei den Temperaturgradienten im Draht. Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Temperatur im Draht linear mit der Länge abfällt. Die thermische Längenausdehnung des Drahtes sei vernachlässigbar. Nehmen sie weiter an, dass $T_M=90^\circ\text{C}$ und $T_1=20^\circ\text{C}$ sei.

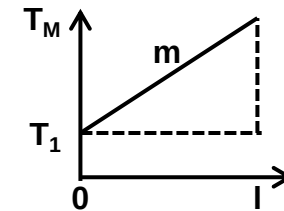
Hinweis: Der lineare Temperaturkoeffizient der Beweglichkeit $\mu(T)$ von Nickel sei $TK_M = -6,7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Mathematische Hilfestellung: $\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$

„Wie ist überhaupt die Temperatur verteilt im Draht?“

Konstruiere eine Gerade:

$$T(x) = \underbrace{T_1}_{\text{y-Achsenabschnitt}} + \underbrace{\frac{(T_M - T_1)}{l}}_{\text{Steigung}} \cdot x$$



Jetzt alles zusammen einsetzen...

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx$$

$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

$$\mu(T) = \mu_0 (1 + TK_{Ni}(T - T_1))$$

$$T(x) = T_1 + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x$$

Nacheinander einsetzen...

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx$$

$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

$$\mu(T) = \mu_0 (1 + TK_{Ni}(T - T_1))$$

$$T(x) = T_1 + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x$$

Nacheinander einsetzen...

$$\mu(T) = \mu_0 \left(1 + TK_{Ni} \left(T_1 + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x - T_1 \right) \right)$$

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx$$

$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

$$\mu(T) = \mu_0 (1 + TK_{Ni}(T - T_1))$$

$$T(x) = T_1 + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x$$

Nacheinander einsetzen...

$$\mu(T) = \mu_0 \left(1 + TK_{Ni} \left(\cancel{T_1} + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x - \cancel{T_1} \right) \right)$$

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{1}{A} dx$$

$$\rho(T) = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu(T)}$$

$$\mu(T) = \mu_0 (1 + TK_{Ni}(T - T_1))$$

$$T(x) = T_1 + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x$$

Nacheinander einsetzen...

$$\mu(T) = \mu_0 (1 + TK_{Ni}(\cancel{T_1} + \frac{(T_M - T_1)}{l} \cdot x - \cancel{T_1}))$$

Konstanten aus dem Integral ziehen...

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \int_0^l \frac{1}{1 + TK_{Ni}(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}} dx$$

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \int_0^l \frac{1}{1 + TK_{Ni}(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}} dx$$

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \int_0^l \frac{1}{1 + \underbrace{TK_{Ni}}_a \underbrace{(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}}_{b \cdot x}} dx$$

Mathematische Hilfestellung:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$$

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \int_0^l \frac{1}{1 + \underbrace{TK_{Ni}}_a \underbrace{(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}}_{b \cdot x}} dx$$

Mathematische Hilfestellung:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$$

Integral auflösen:

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{\underbrace{TK_{Ni} \cdot \frac{(T_M - T_1)}{l}}_b} \cdot \ln \left(\underbrace{1 + TK_{Ni}}_a \underbrace{(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}}_{b \cdot x} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=l}$$

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \int_0^l \underbrace{\frac{1}{1 + TK_{Ni}(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}}}_{a + b \cdot x} dx$$

Mathematische Hilfestellung:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$$

Integral auflösen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{TK_{Ni} \cdot \frac{(T_M - T_1)}{l}} \cdot \ln \left(1 + TK_{Ni}(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=l} \\ &= \frac{l}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A \cdot TK_{Ni} \cdot (T_M - T_1)} \cdot \ln(1 + TK_{Ni}(T_M - T_1)) \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \int_0^l \underbrace{\frac{1}{1 + TK_{Ni}(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l}}}_{a + b \cdot x} dx$$

Mathematische Hilfestellung:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \cdot x} = \pm \frac{1}{b} \ln(a \pm b \cdot x) + c$$

Integral auflösen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{TK_{Ni} \cdot \frac{(T_M - T_1)}{l}} \cdot \ln \left(1 + TK_{Ni}(T_M - T_1) \cdot \frac{x}{l} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=l} \\ &= \frac{l}{e \cdot n \cdot \mu_0 \cdot A \cdot TK_{Ni} \cdot (T_M - T_1)} \cdot \ln(1 + TK_{Ni}(T_M - T_1)) \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$R \approx 2,9 m\Omega$$

mit

$$n \approx 9,2 \cdot 10^{22} cm^{-3}$$

Dehnmessstreifen (DMS)

A2: Piezoresistiver Effekt

Dehnmessstreifen (DMS) werden in der Sensorik als Druck und Kraftsensoren verwendet. Ein Platindraht (Pt) wird auf seine Eignung als Dehnmessstreifen (DMS) hin untersucht. Betrachtet wird ein Pt-Draht mit der Länge l und dem Durchmesser d . Der Draht wird auf einer konstanten Temperatur von $T_U = 20\text{ °C}$ gehalten und von einem Strom I durchflossen (siehe Bild 3).

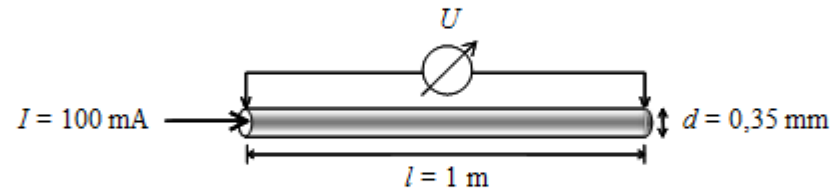


Bild 3: Spannungsmessung über einem Pt-Draht.

- a) Über die Enden des Drahtes wird eine Spannung von $U = 102,17\text{ mV}$ gemessen. Bestimmen Sie hieraus zunächst den spezifischen Widerstand ρ_{Pt} von Platin bei 20 °C ?

Spezifischer Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$$

Spezifischer Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$$

Umstellen nach ρ ...

$$\rho = \frac{1}{R} \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{U} \cdot \frac{l}{\pi(d/2)^2}$$

Spezifischer Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Umstellen nach ρ ...

$$\rho = R \cdot \frac{A}{l} = \frac{U}{I} \cdot \frac{\pi(d/2)^2}{l}$$

Gegebene Größen einsetzen:

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot \frac{\pi(d/2)^2}{l} = \frac{102.17\text{mV}}{100\text{mA}} \cdot \frac{\pi(0,035\text{cm}/2)^2}{100\text{cm}} \approx 9,83 \cdot 10^{-6} \Omega\text{cm}$$

b) Wird der Pt-Draht nun in Längsrichtung gedehnt ändern sich nicht nur seine Länge, sondern aufgrund der Verformung zusätzlich die Querschnittsfläche und der spezifische Widerstand des Materials.

Der Einfluss all dieser Änderungen auf den Wert des Widerstands kann mit Hilfe eines sogenannten „totalen Differentials“ ausgedrückt werden:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$

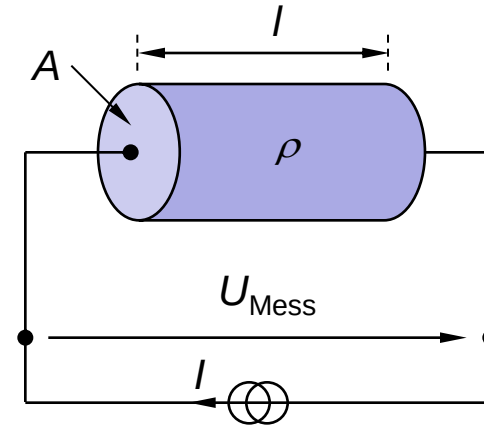
Berechnen Sie aus dem totalen Differential die relative Widerstandsänderung dR/R bei Längsdehnung in Abhängigkeit von dl/l , dA/A und $d\rho/\rho$.

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$



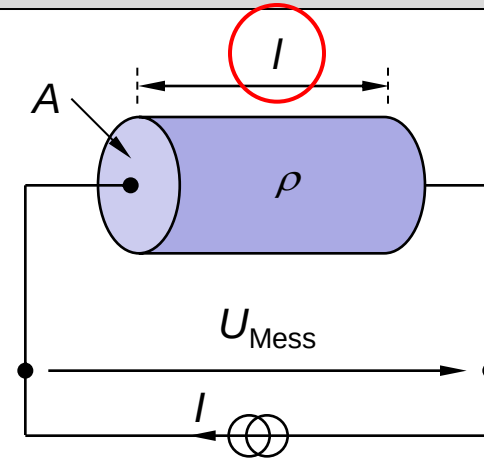
Beschreibt die Änderung des gesamten Widerstands durch Änderung...

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$



Beschreibt die Änderung des gesamten Widerstands durch Änderung...

der Länge...

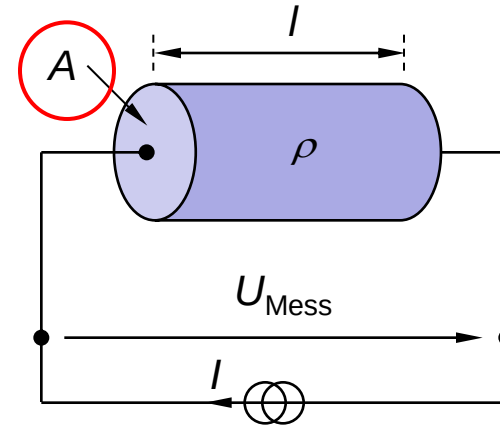
$$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\rho}{A}$$

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$



Beschreibt die Änderung des gesamten Widerstands durch Änderung...

der Länge...

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\rho}{A}$$

des Querschnitts...

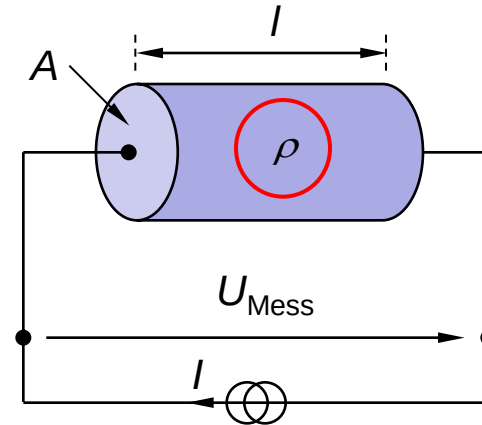
$$\frac{\partial R}{\partial A} = -\frac{\rho l}{A^2}$$

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$



Beschreibt die Änderung des gesamten Widerstands durch Änderung...

der Länge...

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\rho}{A}$$

des Querschnitts...

$$\frac{\partial R}{\partial A} = -\frac{\rho l}{A^2}$$

des spez. Widerstands...

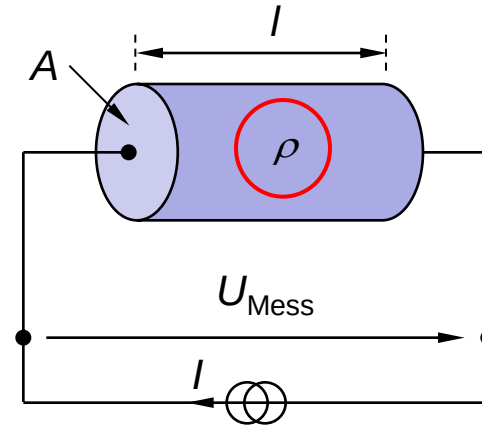
$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{l}{A}$$

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$



Be **Einsetzen** Änderung des gesamten Widerstands durch Änderung...

der Länge...

Einsetzen

des Querschnitts...

Einsetzen

des spez. Widerstands...

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\rho}{A}$$

$$\frac{\partial R}{\partial A} = -\frac{\rho l}{A^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{l}{A}$$

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\rho}{A} dl - \frac{\rho l}{A^2} dA + \frac{l}{A} d\rho$$

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

umstellen und einsetzen:

$$\frac{\rho}{A} = \frac{R}{l}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\rho}{A} dl - \frac{\rho l}{A^2} dA + \frac{l}{A} d\rho$$

Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

umstellen und einsetzen:

$$\frac{\rho}{A} = \frac{R}{l}$$

Das totale Differential

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\rho}{A} dl - \frac{\rho l}{A^2} dA + \frac{l}{A} d\rho$$

$$dR = \frac{R}{l} dl - \frac{R}{A} dA + \frac{R}{\rho} d\rho$$

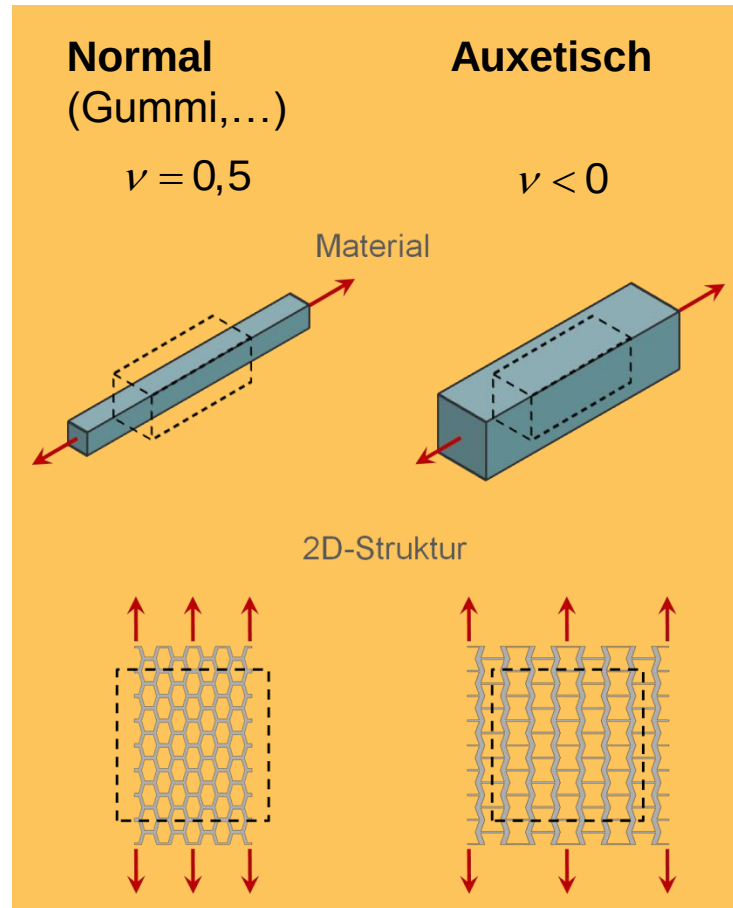
Relative Widerstandsänderung:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}$$

c) Da Längsdehnung und Querschnittsänderung in einem materialspezifischen, festen Verhältnis stehen, kann der Ausdruck des totalen Differentials aus b) mit Hilfe der sog. Querkontraktionszahl ν (Poisson-Zahl) weiter vereinfacht werden. Führen Sie diese Vereinfachung durch.

Querkontraktion

$$\nu = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dA/A}{dl/l} \quad \text{mit } 0 \leq \nu \leq 0,5$$



Querkontraktion

$$\nu = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dA/A}{dl/l} \quad \text{mit } 0 \leq \nu \leq 0,5$$

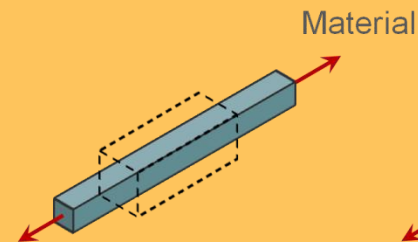
Einsetzen in das hergeleitete
totale Differential

$$\frac{dR}{R} = \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}$$
$$= (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

Jetzt ist keine (direkte) Abhängigkeit durch die
Querschnittsfläche mehr in der Gleichung!

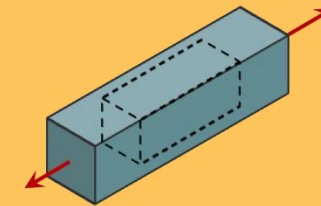
Normal
(Gummi,...)

$$\nu = 0,5$$

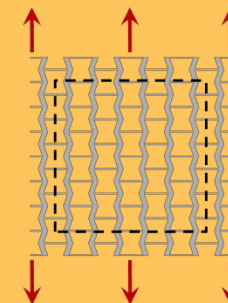
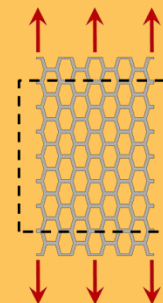


Auxetisch

$$\nu < 0$$



2D-Struktur



1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

2. Vereinfachung: Beweglichkeit, statt spez. Widerstand

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \mu} d\mu$$


1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

2. Vereinfachung: Beweglichkeit, statt spez. Widerstand

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \mu} d\mu$$

mit $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu}$ wird $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu} \cdot \frac{l}{A}$

1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

2. Vereinfachung: Beweglichkeit, statt spez. Widerstand

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \mu} d\mu$$

mit $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu}$ wird $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu} \cdot \frac{l}{A}$

partiell ableiten

$$\frac{\partial R}{\partial \mu} = -\frac{1}{n \cdot e \cdot \mu^2} \cdot \frac{l}{A} = -\frac{1}{\mu} \cdot R$$

1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

2. Vereinfachung: Beweglichkeit, statt spez. Widerstand

$$dR = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial R}{\partial l} dl + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \mu} d\mu$$

Einsetzen

mit $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu}$

wird

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu} \cdot \frac{l}{A}$$

partiell ableiten

$$\frac{\partial R}{\partial \mu} = -\frac{1}{n \cdot e \cdot \mu^2} \cdot \frac{l}{A} = -\frac{1}{\mu} \cdot R$$

1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

2. Vereinfachung: Beweglichkeit, statt spez. Widerstand

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu}$$

1. Vereinfachung: Kenngröße mechanische Dehnung einführen

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_M = \frac{dl}{l} : \text{mechanische Dehnung}$$

2. Vereinfachung: Beweglichkeit, statt spez. Widerstand

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu}$$

Definition: k-Faktor

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Geometrie-
Effekt

Werkstoff-
Effekt

d) Für (viele) Metalle gilt folgende empirische Regel: $d\rho/\rho \approx 0,4 \cdot dl/l$. Berechnen Sie damit den K-Faktor von Pt.

Hinweis: Querkontraktionszahl $\nu_{Pt} \approx 0,38$.

Definition: k -Faktor

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Definition: k -Faktor

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Beziehungsweise:

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Definition: k -Faktor

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Beziehungsweise:

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

mit

$$\frac{d\rho}{\rho} \approx 0,4 \cdot \frac{dl}{l}$$

Definition: k -Faktor

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Beziehungsweise:

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

mit

$$\frac{d\rho}{\rho} \approx 0,4 \cdot \frac{dl}{l}$$

$$\rightarrow \frac{dR}{R} = (1 + 2\nu + 0,4) \cdot \frac{dl}{l} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Definition: k-Faktor

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \varepsilon_M - \frac{d\mu}{\mu} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

Beziehungsweise:

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

mit

$$\frac{d\rho}{\rho} \approx 0,4 \cdot \frac{dl}{l}$$

$$\rightarrow \frac{dR}{R} = (1 + 2\nu + 0,4) \cdot \frac{dl}{l} \equiv k \cdot \varepsilon_M$$

macht für den k-Faktor mit
einsetzen:

$$k = 1 + 2\nu + 0,4 = 1 + 2\nu_{Pt} + 0,4 \approx 2,16$$

- e) Welche der aufgeführten Punkte würde die Messgenauigkeit erhöhen und warum?
- i. Die Verwendung eines Pt-Drahts mit doppelter Länge.
 - ii. Statt Pt-Draht einen Halbleiter verwenden.
 - iii. Parallelanordnung und serielle Verschaltung von mehreren Pt-Drähten.

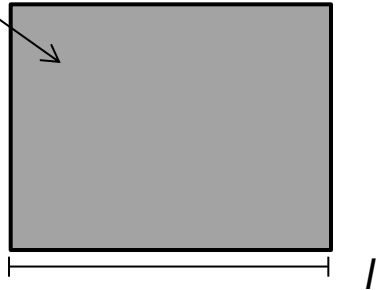
Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

„Diese Platte soll längs
gedehnt werden!“

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

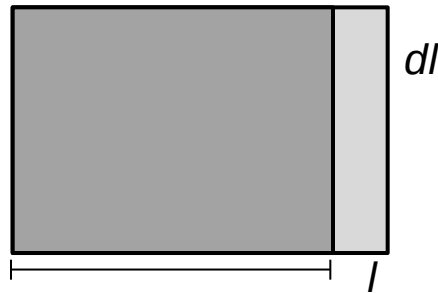


$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

i. Die Verwendung eines Pt-Drahts mit doppelter Länge?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



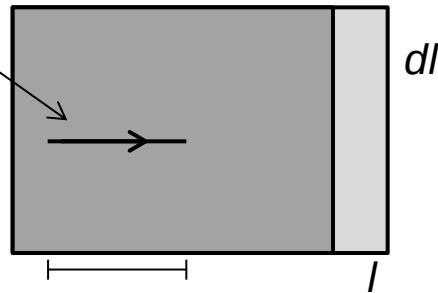
$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

i. Die Verwendung eines Pt-Drahts mit doppelter Länge?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

„Messdraht!“



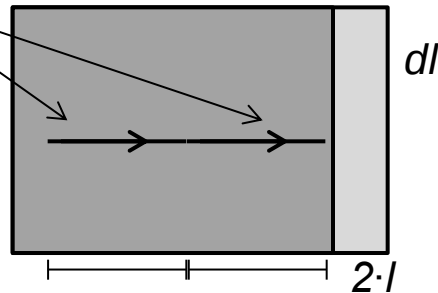
$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

i. Die Verwendung eines Pt-Drahts mit doppelter Länge?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

„2x Messdraht!“



$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

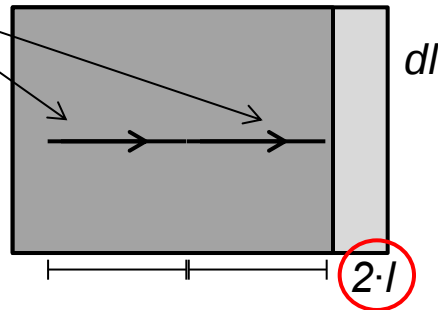
i. Die Verwendung eines Pt-Drahts mit doppelter Länge?

$$dR \sim \left(\rho \cdot \frac{2 \cdot l}{A} \right) \frac{dl}{2 \cdot l}$$

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

„2x Messdraht!“



$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

— i. Die Verwendung eines Pt-Drahts mit doppelter Länge? —

$$dR \sim \left(\rho \cdot \frac{2l}{A} \right) \frac{dl}{2l}$$

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



$$dR \sim R \cdot k \cdot \varepsilon_M$$

ii. Statt Pt einen Halbleiter verwenden?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



$$dR \sim R \cdot k \cdot \varepsilon_M$$

ii. Statt Pt einen Halbleiter verwenden?

Metallische Bindung

$$k \approx 2$$

Halbleiter

$$|k| \approx 100 \dots 200$$

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



$$dR \sim R \cdot k \cdot \varepsilon_M$$

ii. Statt Pt einen Halbleiter verwenden?

Metallische Bindung

$$k \approx 2$$

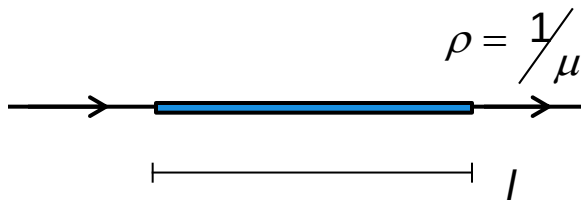
Halbleiter

$$|k| \approx 100 \dots 200$$

„Woher kommt
dieser hohe k-Wert
für Halbleiter?“

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



$$dR \sim R \cdot k \cdot \varepsilon_M$$

$$dR \sim R \cdot \frac{d\rho}{\rho} \sim -R \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

ii. Statt Pt einen Halbleiter verwenden?

Metallische Bindung

$$k \approx 2$$

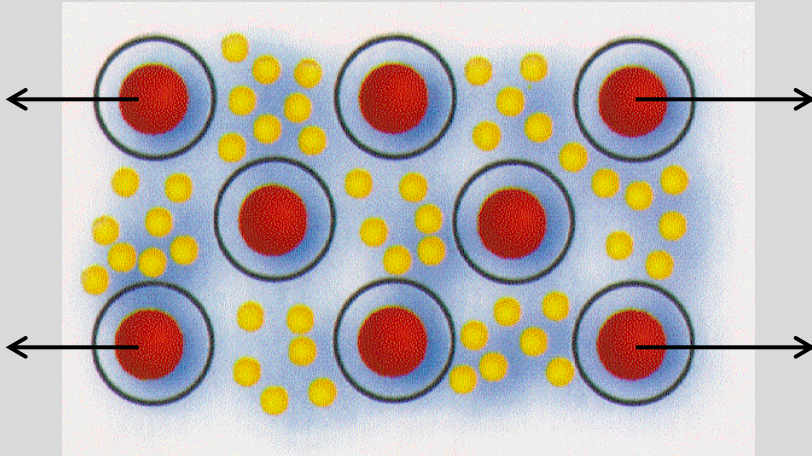
Halbleiter

$$|k| \approx 100 \dots 200$$

„Woher kommt dieser hohe k-Wert für Halbleiter?“

$$\frac{d\mu}{\mu} \quad \text{e- Beweglichkeit}$$

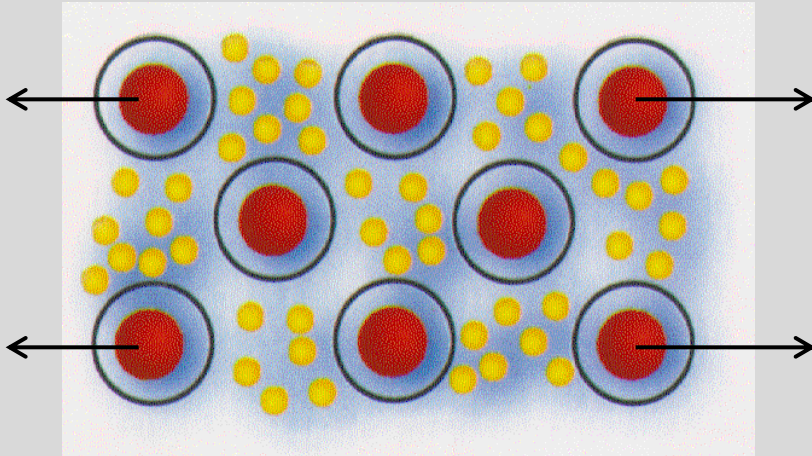
Metallische Bindung $k \approx 2$



Für Dehnung von Metallen spielt die Beweglichkeit nur eine untergeordnete Rolle.

$$\frac{d\mu}{\mu} \quad \text{e- Beweglichkeit bei HL deutlich stärker beeinflusst!}$$

Metallische Bindung $k \approx 2$



Für Dehnung von Metallen spielt die Beweglichkeit nur eine untergeordnete Rolle.

Halbleiter $|k| \approx 100 \dots 200$

Komplexer Zusammenhang

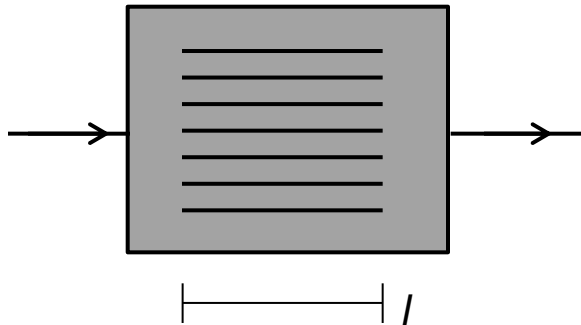
„Bei beiden Effekten **modifiziert die mechanische Spannung den Bandverlauf im Halbleiter** durch piezoelektrisch induzierte Polarisation senkrecht zur Schichtebene. Der **modifizierte Bandverlauf bewirkt eine erhöhte bzw. erniedrigte Ladungsträgerdichte** und damit einen neuen Mechanismus der Piezoresistivität.“ [1]

n-dotiert: $k < 0$

p-dotiert $k > 0$

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

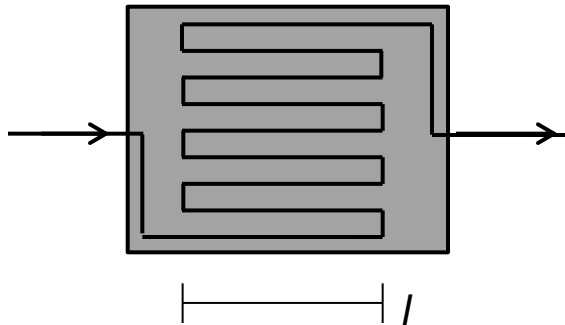


$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

iii. **Parallelanordnung** und serielle Verschaltung?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$

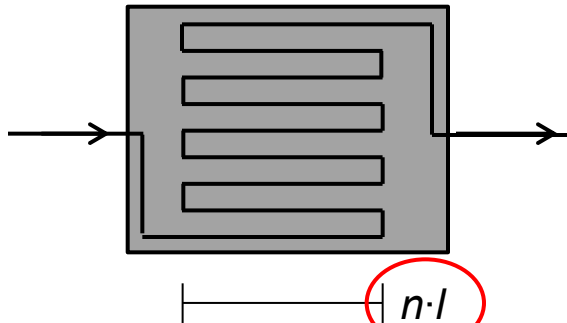


$$dR \sim R \frac{dl}{l}$$

iii. Parallelanordnung und **serielle Verschaltung**?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



$$dR \sim R \frac{dl}{l} \sim \left(\rho \cdot \frac{n \cdot l}{A} \right) \cdot \frac{n \cdot dl}{n \cdot l}$$

n = Anzahl parallel verschalteter Pt-Drähte

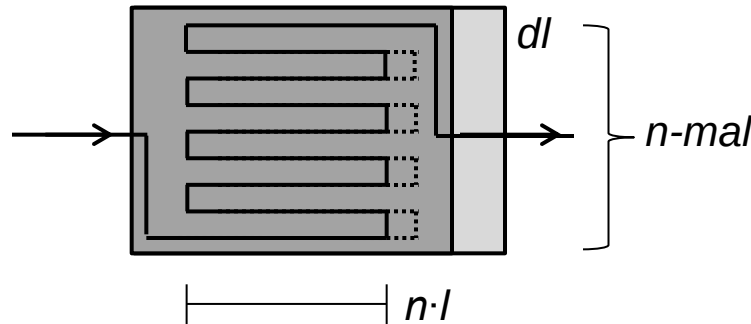
→ vertikale Verschaltung

fällt bei Längsdehnung weg.

iii. Parallelanordnung und serielle Verschaltung?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



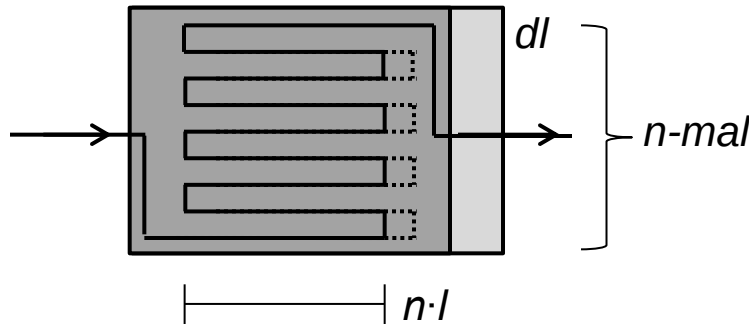
$$dR \sim R \frac{dl}{l} \sim \left(\rho \cdot \frac{n \cdot l}{A} \right) \cdot \frac{n \cdot dl}{n \cdot l}$$

n = Anzahl parallel verschalteter Pt-Drähte
→ vertikale Verschaltung
fällt bei Längsdehnung weg.

iii. Parallelanordnung und serielle Verschaltung?

Was bedeutet die Messempfindlichkeit erhöhen?

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \cdot \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} \equiv k \cdot \varepsilon_M \quad \rightarrow dR \text{ möglichst groß!}$$



$$dR \sim R \frac{dl}{l} \sim \left(\rho \cdot \frac{n \cdot l}{A} \right) \cdot \frac{n \cdot dl}{n \cdot l}$$

n = Anzahl parallel verschalteter Pt-Drähte
→ vertikale Verschaltung
fällt bei Längsdehnung weg.

iii. Parallelanordnung und serielle Verschaltung?

$$dR \sim \left(\rho \cdot \frac{l}{A} \right) \cdot \frac{n \cdot dl}{l} \rightarrow \frac{dR}{R} \sim n \frac{dl}{l}$$

Messempfindlichkeit erhöht um Faktor n !

Vielen Dank!