

Bachelorprüfung

Systemdynamik und Regelungstechnik

01. September 2017

AUFGABENBLÄTTER

Die Lösungen sowie der vollständige Lösungsweg sind in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Lösungen werden nur bewertet, sofern sie jeweils nachvollziehbar und wohlbegründet sind. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibgerät (keine Bleistifte) und keine Rotstifte.

Bitte tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem ersten Lösungsblatt ein und geben Sie am Ende der Prüfung die Lösungsblätter ab.

1. Aufgabe

(ca. 25%)

- a) Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils an, ob diese richtig oder falsch sind, und korrigieren Sie gegebenenfalls:
- i) Jede Wurzelortskurve ist achsensymmetrisch zur imaginären Achse.
 - ii) Das Reglerentwurfsverfahren „vollständige Kompensation“ ist für minimalphasige Strecken ungeeignet.
 - iii) Zur Bestimmung von T_{krit} und $K_{R,krit}$ beim Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols muss die Strecke zunächst mit einem P-Regler betrieben werden.
 - iv) Das Reglerentwurfsverfahren „Minimale quadratische Regelfläche“ ist ein Verfahren zur Strukturoptimierung.
 - v) Wenn ein System $F_o(s)$ negative Phasenreserve besitzt, ist es instabil.
 - vi) Ein Nennerpolynom, welches positive und negative Koeffizienten besitzt, ist kein Hurwitzpolynom.
- b) Gesucht ist die Wurzelortskurve des offenen Regelkreises

$$F_o(s) = k \cdot \frac{0,05s^2 - 0,1s + 0,1}{s^3 + 5s^2 + 4s}. \quad (1)$$

- i) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die folgenden Größen:
- Start- und Zielpunkte der Wurzeläste
 - Abschnitte der Wurzelortskurve auf der reellen Achse
 - Wurzelschwerpunkt
 - Asymptotenwinkel
 - Polaustritts- bzw. Nullstelleneintrittswinkel
- ii) Skizzieren Sie den Prinzipverlauf der Wurzelortskurve (mit eindeutigen Pfeilen) in das Koordinatensystem auf den Lösungsblättern.

Hinweis: Die Wurzelortskurve hat genau einen Verzweigungspunkt bei $s = -0,36$.

c) Abbildung 1 zeigt das Bodediagramm von $F_o(s)$ aus dem vorigen Aufgabenteil mit $k = 1$:

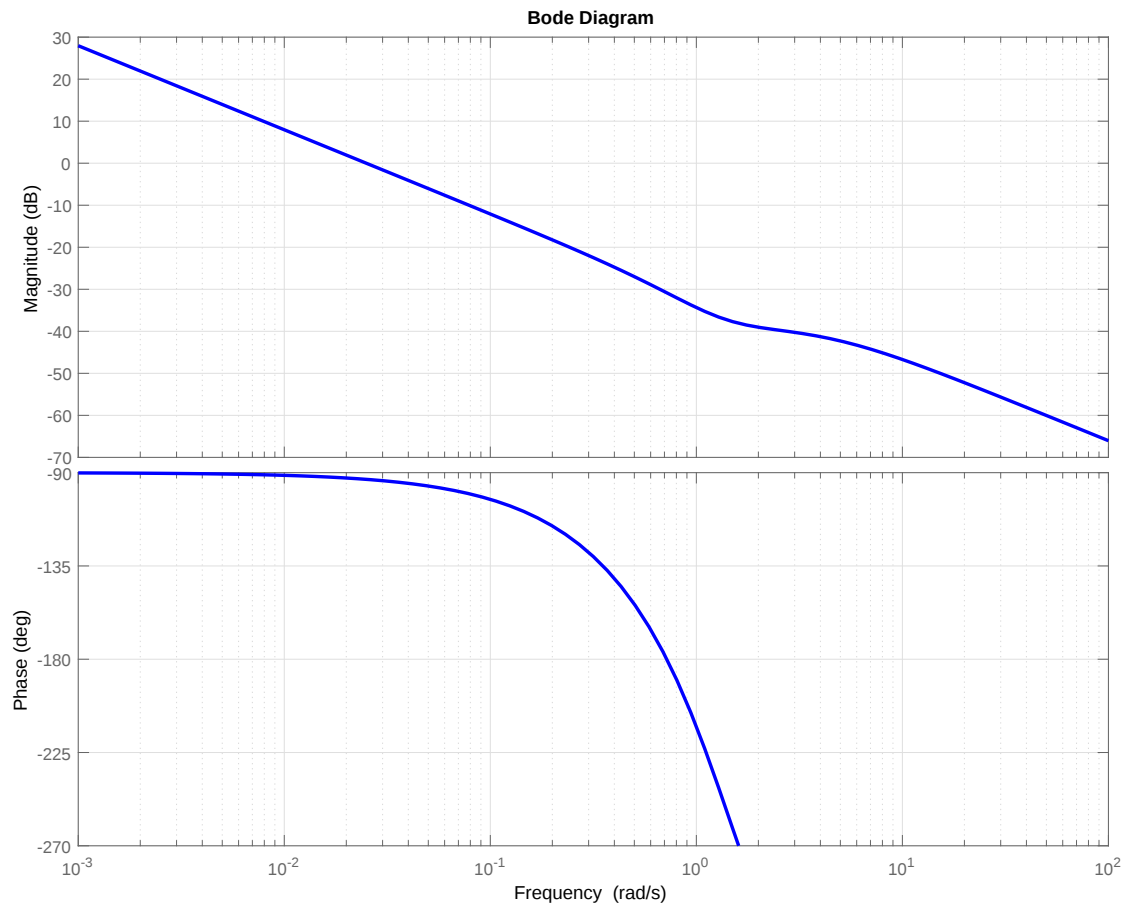


Abbildung 1

- i) Bestimmen Sie Amplitudenreserve, Phasenreserve und Durchtrittsfrequenz von $F_o(s)$.
- ii) Anhand welcher Bedingung lässt sich mittels des Bodediagramms erkennen, dass der geschlossene Regelkreis für $k = 1$ stabil ist?
- iii) Das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises soll für $k = 1$ genauer beschrieben werden: Welche der folgenden Aussagen ist zutreffend:
 - zu stark gedämpft
 - gutes Führungsverhalten
 - zu schwach gedämpft(ohne Begründung!)
- iv) Beurteilen Sie (ohne Begründung) für die Fälle $k = 0,1$, $k = 10$, $k = 100$ und $k = 1000$, ob der geschlossene Regelkreis stabil, grenzstabil oder instabil ist.

2. Aufgabe

(ca. 25%)

Für das in Abbildung 2 skizzierte mechanische System soll ein mathematisches Modell entwickelt werden. Das System besteht aus zwei Schwungrädern (Trägheitsmomente J_1 und J_2), die über eine elastische Welle gekoppelt sind. Schwungrad 1 wird mit dem Drehmoment $M_1(t)$

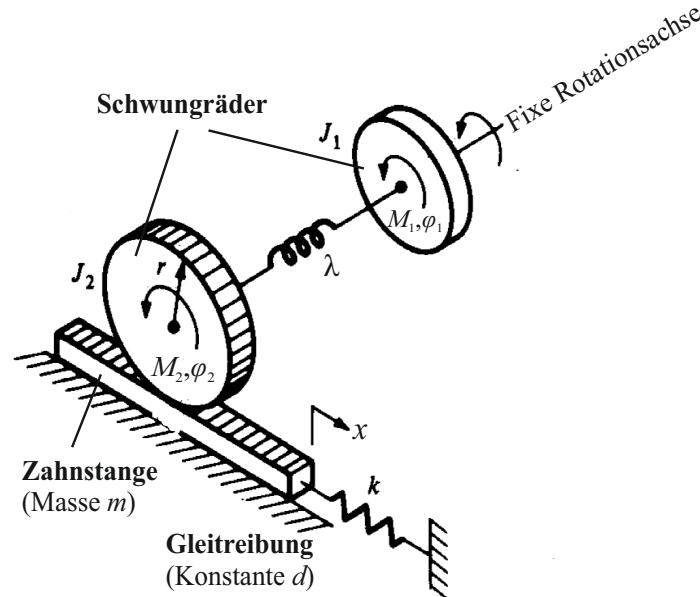


Abbildung 2

angetrieben und erfährt dadurch eine Auslenkung $\varphi_1(t)$. Die Elastizität der Welle bewirkt ein Torsionsmoment $M_2(t) = \lambda \cdot (\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$.

Schwungrad 2 ist ein Zahnrad und fest mit einer Zahnstange der Masse m verbunden:

$$x(t) = r \cdot \varphi_2(t) \quad (2)$$

Die Zahnstange ist über eine hookesche Feder (Federkonstante k) mit der Wand verbunden. Sie gleitet auf einem ebenen Untergrund und erfährt eine Auslenkung $x(t)$. Die dadurch verursachte Reibkraft ist proportional zur Geschwindigkeit (Reibungskoeffizient d).

Untersucht werden soll, wie sich das Eingangsmoment $M_1(t)$ (Eingangsgröße) auf die Position $x(t)$ der Zahnstange (Ausgangsgröße) auswirkt.

- a) i) Für die Verbindung aus Zahnstange und Zahnrad gilt folgendes Kräftegleichgewicht:

$$F_{\text{Beschl, Zahnstange}} + \frac{M_{\text{Beschl, Zahnrad}}}{r} = \frac{M_2}{r} + F_k + F_d \quad (3)$$

Entwickeln Sie hieraus eine Differentialgleichung für die Auslenkung $x(t)$ und bestimmen Sie die Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{M_2(s)}. \quad (4)$$

- ii) Stellen Sie analog dazu die Momentenbilanz für Schwungrad 1 auf und zeigen Sie, dass sich im Laplace-Bereich der Zusammenhang

$$M_2(s) = G_2(s) \cdot M_1(s) - G_3(s) \cdot X(s) \quad (5)$$

mit

$$G_2(s) = \frac{\lambda}{J_1 s^2 + \lambda} \quad \text{und} \quad G_3(s) = \frac{J_1 s^2 \lambda}{J_1 r s^2 + r \lambda} \quad (6)$$

ergibt.

- b) i) Zeichnen Sie ein Signalflussbild des Gesamtsystems (Eingangsgröße $M_1(t)$, Ausgangsgröße $x(t)$) unter Verwendung von $G_1(s)$ bis $G_3(s)$.
- ii) Bilden Sie basierend auf Ihrem Signalflussbild die Gesamt-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{X(s)}{M_1(s)} \quad (7)$$

unter Verwendung von $G_1(s)$ bis $G_3(s)$.

- c) Die resultierende Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems lautet

$$G(s) = \frac{r \cdot \lambda}{(r^2 m J_1 + J_1 J_2) s^4 + r^2 d J_1 s^3 + (r^2 k J_1 + \lambda m r + \lambda J_2 + J_1) s^2 + r^2 \lambda d s + r^2 k \lambda}. \quad (8)$$

Skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf der Nyquist-Ortskurve (mit Pfeilrichtung) in das vorbereitete Diagramm auf den Lösungsblättern.

Nun soll das dynamische Verhalten von $G(s)$ etwas genauer untersucht werden, indem verschiedene Modifikationen am System vorgenommen werden:

- d) Die hookesche Feder wird entfernt ($k = 0$). Skizzieren Sie den veränderten Verlauf der Nyquist-Ortskurve. Wie nennt man ein solches Systemverhalten?
- e) Zusätzlich zur Modifikation in d) wird auch noch die Reibung der Zahnstange vernachlässigt. Skizzieren Sie das resultierende Pol-Nullstellen-Diagramm.

Hinweis: Markieren Sie mehrfache Pole oder Nullstellen eindeutig, falls vorhanden.

- f) Nun wird wieder vom ursprünglichen System $G(s)$ aus Gleichung (8) ausgegangen. Die Steifigkeit der Welle wird deutlich erhöht ($\lambda \rightarrow \infty$). Bestimmen Sie

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(s) \quad (9)$$

und zeigen Sie, dass das System in diesem Fall zum PT_2 -Glieder wird.

g) Im Folgenden wird die Strecke mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \quad (10)$$

betrachtet. Für diese Strecke wurde der Regler

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{s+2}{s} \quad (11)$$

entworfen.

- i) Nennen Sie den Reglertyp von $G_R(s)$.
- ii) Stellen Sie die Hurwitz-Determinanten D_k ($k = 1, \dots, n$) auf und bestimmen Sie alle Reglerverstärkungen $K_R \in \mathbb{R}$, für die der geschlossene Regelkreis stabil ist.
- iii) Welche der in Abbildung 3 gezeigten Wurzelortskurven gehört zu $F_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$? Begründen Sie.
- iv) Kann die Stabilität des geschlossenen Regelkreises alternativ auch mit dem speziellen Nyquistkriterium beurteilt werden? Begründen Sie.

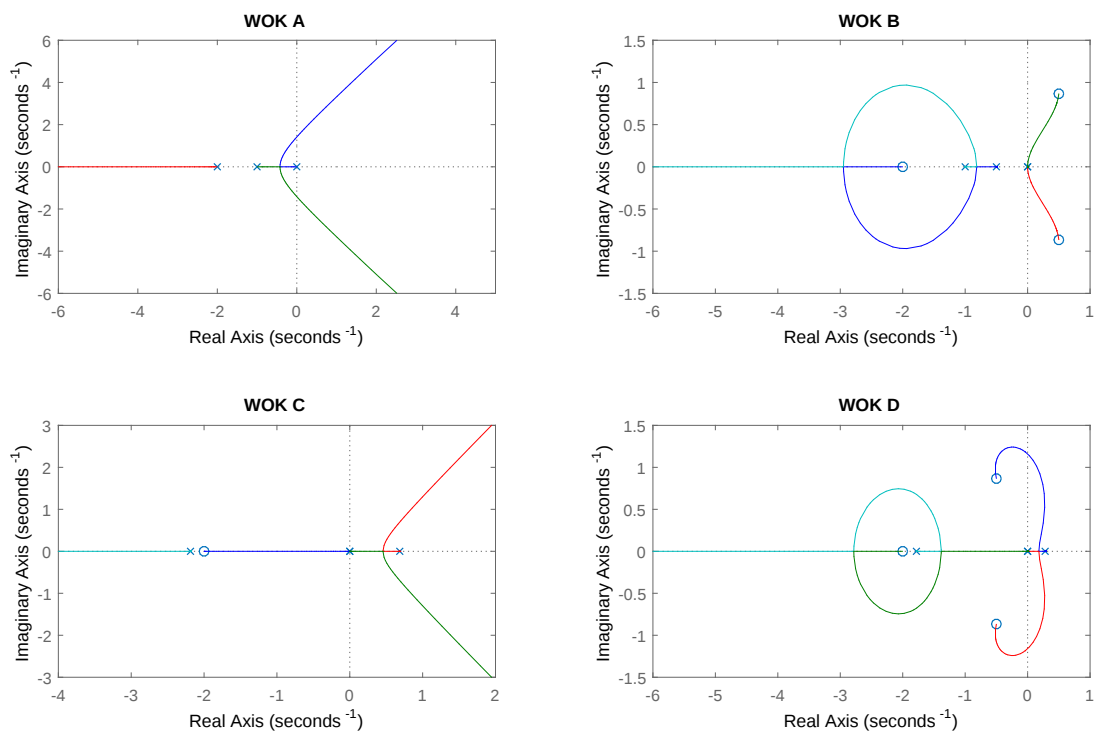


Abbildung 3

3. Aufgabe

(ca. 25%)

a) Für die Strecke

$$G(s) = \frac{12,5}{(s+2)(2s+1)(s+0,04)} \quad (12)$$

ist ein Regler $R(s) = K_R \cdot \frac{1+T_R s}{s}$ zu entwerfen.

i) Bestimmen Sie T_R mithilfe der „einfachen Einstellregeln“.

Die Verstärkung K_R ist nun so zu wählen, dass die quadratische Regelfläche bei sprunghörmiger Anregung des Regelkreises minimal wird

ii) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + d_n s^n} \quad (13)$$

der Regelabweichung $e(t)$ bei Sprunganregung.

iii) Bestimmen Sie das Gütemaß $J = \int_0^\infty e^2(t) dt$.

iv) Bestimmen Sie die Reglerverstärkung $K_R > 0$ so, dass J minimal wird.

b) Gegeben ist eine Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$, die sich wie folgt in zwei Teilsysteme zerlegen lässt:

$$G_S(s) = G_{S1}(s) \cdot G_{S2}(s) \quad (14)$$

Hierfür wurde mit nachfolgendem MATLAB-Programm eine Regelung entworfen:

```

1   G_S1 = tf([1],[2 1 0]);
2   G_S2 = tf([1],[4 1]);
3   G_w1_soll = tf([1],[1 1]);
4   G_R1 = 1/G_S1 * G_w1_soll / (1 - G_w1_soll);
5   G_S_neu = G_w1_soll * G_S2;
6   %Drei alternative Regler G_R2 fuer G_S_neu:
7   G_R2a = zpk([],[],1);
8   G_R2b = zpk([-1],[0],1);
9   G_R2c = zpk([0 2],[-1 -5],1);

```

i) Wie nennt man die Struktur einer solchen Regelung? Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild mit $G_{S1}(s)$, $G_{S2}(s)$, $G_{R1}(s)$ und $G_{R2}(s)$. Kennzeichnen Sie außerdem die Systeme $G_{w1,soll}$ und $G_{S,neu}$.

ii) Nach welchem Verfahren wurde der Regler $G_{R1}(s)$ in Codezeile 4 berechnet?

iii) Besitzt $G_{R1}(s)$ einen Pol an der Stelle $s = 0$? Begründen Sie kurz.

iv) Bestimmen Sie Verstärkungsfaktor K , Zeitkonstante T sowie Dämpfung d von $G_{S,neu}(s)$ in Codezeile 5.

Abbildung 4 zeigt die Führungssprungantworten des gesamten Regelkreises für die unterschiedlichen Regler-Alternativen $G_{R2a}(s)$, $G_{R2b}(s)$ und $G_{R2c}(s)$:

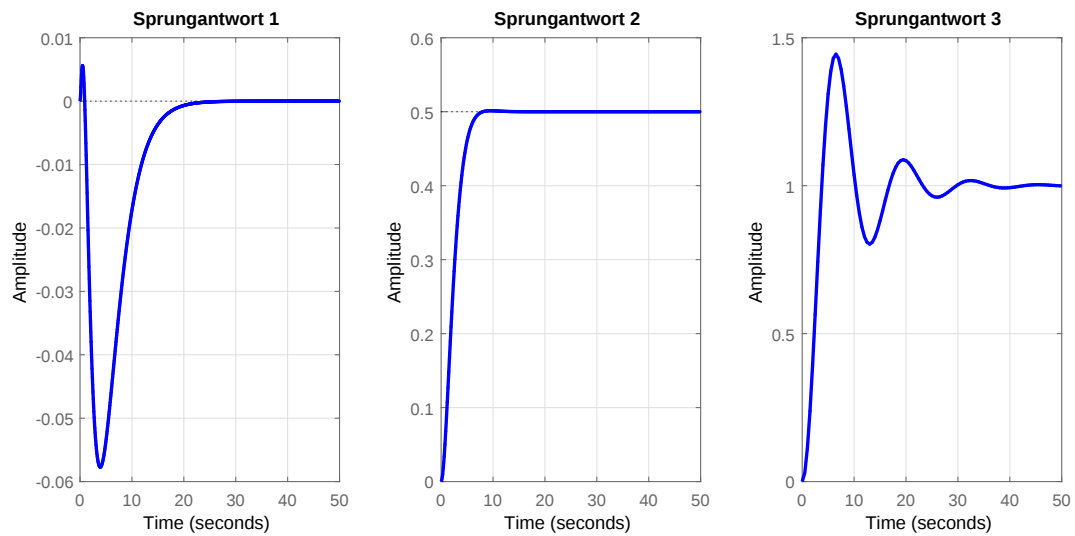


Abbildung 4

- v) Nennen Sie anhand der drei Sprungantworten aus Abbildung 4 je eine Entwurfsforderung, die durch den jeweiligen Regler nicht erfüllt wurde.
- vi) Ordnen Sie die Sprungantworten aus Abbildung 4 den drei Reglern aus Codezeile 7–9 zu und begründen Sie Ihre Wahl kurz.

4. Aufgabe

(ca. 25%)

a) Gegeben ist die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + (1 - ay^2(t)) \dot{y}(t) + y(t) = u(t), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

- i) Das System wird mit dem Eingangssignal $u(t) = 2 \cdot \sigma(t)$ angeregt. Berechnen Sie die stationäre Ruhelage.
 - ii) Linearisieren Sie das System um die berechnete Ruhelage.
 - iii) Untersuchen Sie das linearisierte System in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ auf Stabilität.
- b) Für eine zeitkontinuierliche Strecke soll ein zeitdiskreter Regler entworfen werden.
- i) Wie nennt man das Verfahren, bei dem zunächst ein kontinuierlicher Regler für die Strecke entworfen und dieser anschließend zeitdiskretisiert wird?
 - ii) Ist dieses Verfahren eher für kleine Abtastzeiten geeignet oder eher für große?
 - iii) Was passiert mit den Nullstellen einer zeitdiskretisierten Strecke, wenn die Abtastzeit sehr klein gewählt wird?
 - iv) Beantworten Sie mithilfe der letzten Teilaufgabe, weshalb zeitdiskrete Kompensationsregler bei sehr kleiner Abtastzeit nicht mehr geeignet sind.

- c) In einem MATLAB-Programm soll das kontinuierliche System $G(s)$ mithilfe der Z-Transformation zeitdiskretisiert werden. Leider wurde das zugehörige .m-File beschädigt:

```

1      %Zeitdiskretisierung von G zu Gz
2      T = *****
3      G = zpk(*****
4      Gz = *****
5      bode(Gz);grid;

```

Immerhin sind noch folgende Informationen verfügbar: Das Bode-Diagramm des diskretisierten Systems $G_z(z)$ (siehe Abbildung 5)

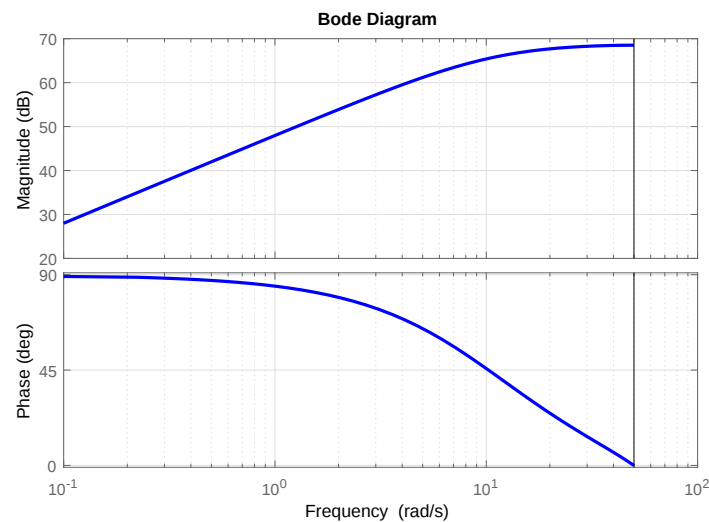


Abbildung 5

sowie die Ausgabe des Programms im MATLAB Command Window:

```

Gz =

      2000 (z-1)
      -----
      (z-0.5)

Discrete-time zero/pole/gain model.

```

- i) Ist $G_z(z)$ stabil? Begründen Sie.
- ii) Bestimmen Sie die Abtastzeit T .
- iii) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ der ursprünglichen zeitkontinuierlichen Strecke.
- iv) Korrigieren Sie die Codezeilen 2–4.
- v) Welche Faustformel muss für die Abtastzeit T gelten, damit ein zeitdiskreter Regler für $G(s)$ mit dem Verfahren *direkter Reglerentwurf bei zeitdiskreter Betrachtung der Strecke* entworfen werden kann?

- d) Gegeben ist nun das folgende Modell einer stark schwingenden zeitdiskretisierten Strecke (Abtastzeit: 1 Sekunde):

$$G_z(z) = \frac{10z^2 + 3z - 4}{2z^3 + 2z^2 + z} \quad (16)$$

Entwerfen Sie für $G_z(z)$ einen Deadbeat-Regler, bei dem die Stellgröße nach endlicher Zeit auf einen konstanten Wert einschwingt.

- e) Abbildung 6 zeigt die Führungssprungantwort des geschlossenen Regelkreises mit dem Regler aus Aufgabenteil d). In der Vorlesung wurde ein weiteres Reglerentwurfsverfahren be-

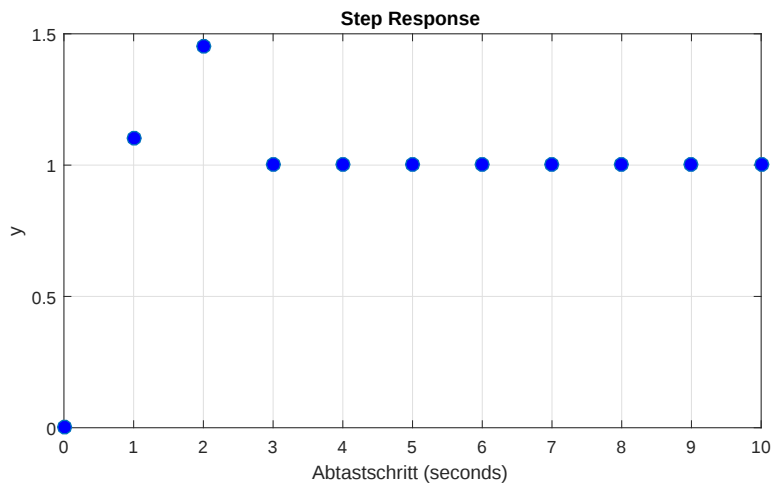


Abbildung 6

handelt, welches noch schneller für stationäre Genauigkeit sorgt.

- Nennen Sie die schnellstmögliche realisierbare Wunsch-Führungsfunktion für $G_z(z)$.
- Zeichnen Sie die Führungssprungantwort des geschlossenen Regelkreises bei einem solchen maximal schnellen Regelkreis in das vorbereitete Diagramm in den Lösungsblättern.