

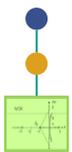
# Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

## Vorlesung: Systemdynamik und Regelungstechnik

### Kapitel 5

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann





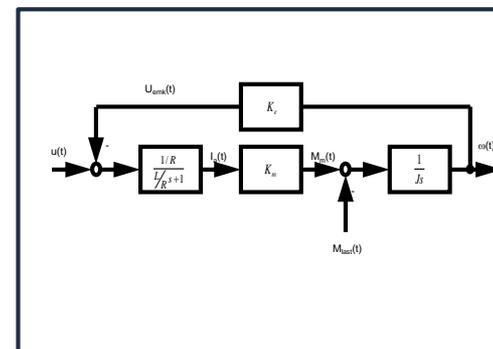
## 1. Einführung

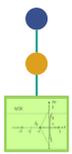
1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



## 2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

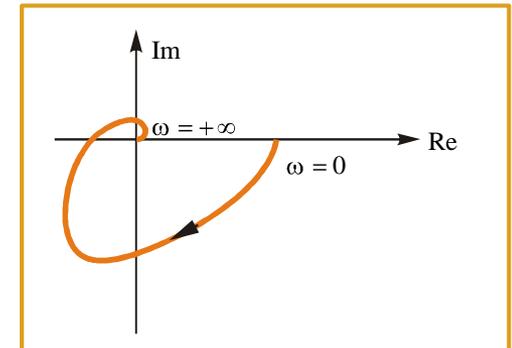
1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Aufbau digitaler Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise





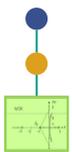
### 3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



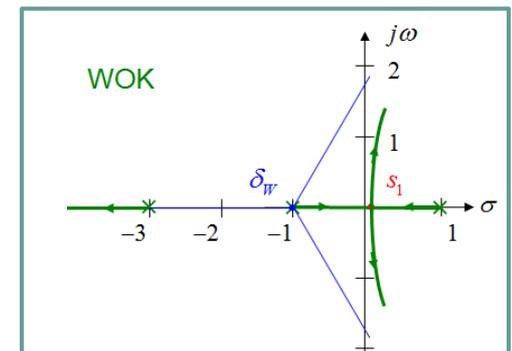
### 4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



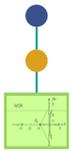
### 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



### 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

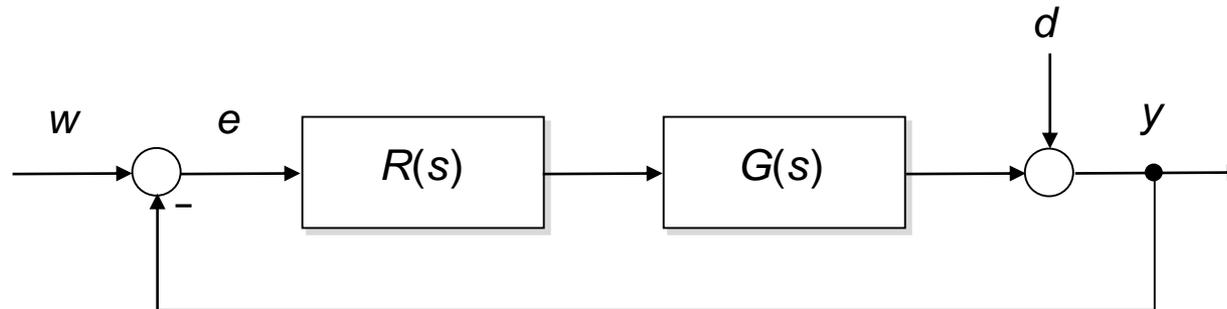
1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



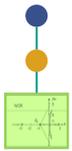
# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.1 Grundanforderungen

Zur Erinnerung: Standardregelkreis



$$Y(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} \cdot W(s) + \frac{1}{1 + F_o(s)} \cdot D(s) = G_w(s) \cdot W(s) + G_D(s) \cdot D(s)$$



# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

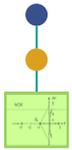
## 5.1.1 Grundanforderungen (2)

### I. Stabilität

Führungs- und Störsprungantworten müssen für  $t \rightarrow \infty$  einem festen (endlichen) Wert zustreben

⇒ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung müssen alle „links“ der imaginären Achse liegen  $1 + F_o(s) = 0$  (vgl. 2.3)

### II. Stationäre Genauigkeit

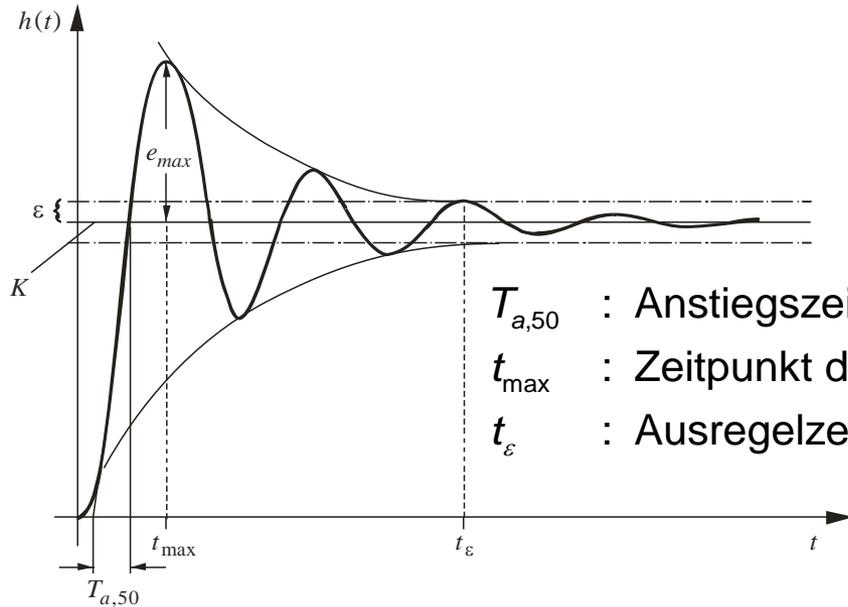


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

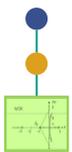
## 5.1.2 Anforderungen im Zeitbereich

Wiederholung: Spezifikation der Sprungantwort eines  $PT_2$ -Gliedes mit den Parametern  $T_{a,50}$ ,  $t_{max}$ ,  $e_{max}$ ,  $t_\epsilon$  sowie  $\epsilon$

$0 < d < 1$ :



- $T_{a,50}$  : Anstiegszeit
- $t_{max}$  : Zeitpunkt des maximalen Überschingers
- $t_\epsilon$  : Ausregelzeit



## 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

### 5.1.3 Anforderungen im Frequenzbereich (1)

Übertragung der Forderungen an die Spezifikation von  $F_o(s)$  bzw.  $F_o(j\omega)$  mit den Parametern **stat. Genauigkeit**, **Dämpfung**, **Schnelligkeit**, **Empfindlichkeit** und **Robustheit**:

- **Stationäre Genauigkeit** (der Sprungantwort):

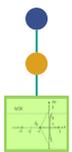
$$e(t \rightarrow \infty) < \varepsilon \text{ mit}$$

$$e_\infty = 0 \text{ (} F_o(s) \text{ enthält } I\text{-Anteil)}$$

$$e_\infty = \frac{1}{1 + K_o} \text{ (} F_o(s) \text{ enthält keinen } I\text{-Anteil)}$$

Problem: Forderungen bzgl. I. und II. sind widersprüchlich:

- $I$ -Anteil senkt die Phase von  $F_o(j\omega)$  um  $90^\circ$  ab und reduziert den Phasenrand  $\varphi_R$
- Vergrößerung von  $K_o$  erhöht die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  und reduziert den Phasenrand  $\varphi_R$  (und damit die Stabilitätsreserve) ebenfalls



# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

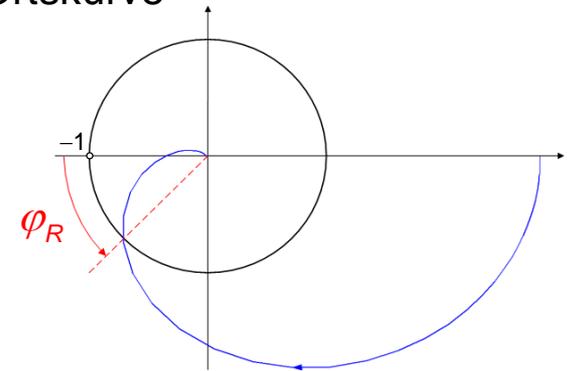
## 5.1.3 Anforderungen im Frequenzbereich (2)

Übertragung der Forderungen an die Spezifikation von  $F_o(s)$  bzw.  $F_o(j\omega)$  :

- Dämpfung** (der Sprungantwort):  
bedeutet im Frequenzbereich: ausreichender Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt  $(-1)$  der  $F_o(j\omega)$ -Ebene  
⇒ Phasenrand hinreichend groß

Faustregel:

$$50^\circ < \varphi_R < 70^\circ \quad \text{für Führungsverhalten}$$
$$\varphi_R \geq 30^\circ \quad \text{für Störverhalten}$$



Anmerkung:  $\varphi_R$  nur dann brauchbares Maß für die Dämpfung, wenn die Ortskurve innerhalb des Einheitskreises dem Punkt  $-1$  nicht zu nahe kommt

⇒  $|F_o(j\omega)|$  sollte im Bereich von  $\omega_D$  mäßig, aber stetig abfallen

Faustregel:

$$\text{Abfall von } |F_o(j\omega)| \text{ um } -20\text{dB/Dekade}$$
$$\text{im mittleren Frequenzbereich um } \omega \approx \omega_D$$



# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.3 Anforderungen im Frequenzbereich (3)

- **Schnelligkeit** (der Sprungantwort):

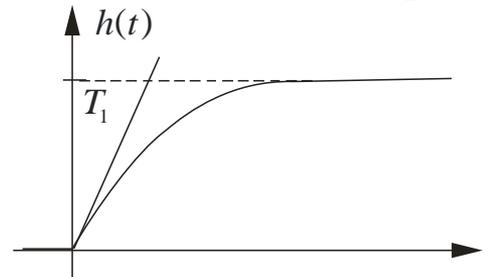
durch Kenngrößen  $T_{a,50}$  und  $t_\varepsilon$  der Sprungantwort charakterisiert,

Frequenzbereich:

$$\text{Schnelligkeit} \sim \omega_D$$

$|F_o(j\omega)|$  im mittleren Frequenzbereich  $\approx -20\text{dB/Dekade}$ :  $F_o(j\omega) \approx \frac{\omega_D}{j\omega}$

$$\Rightarrow G_w(j\omega) = \frac{F_o(j\omega)}{1 + F_o(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_D}} : \text{PT}_1\text{-Glied mit } T_1 = \frac{1}{\omega_D}$$

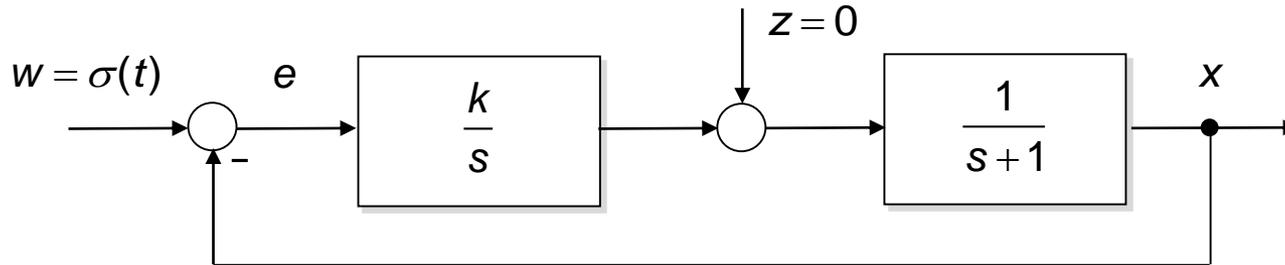




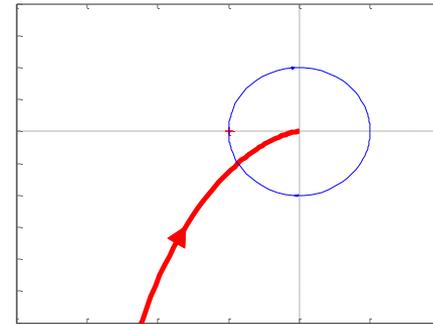
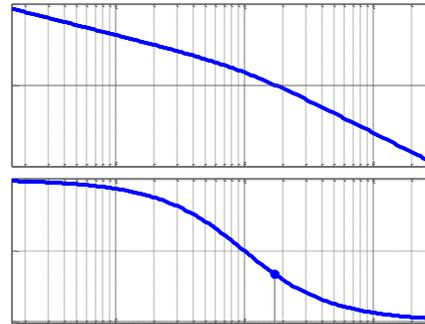
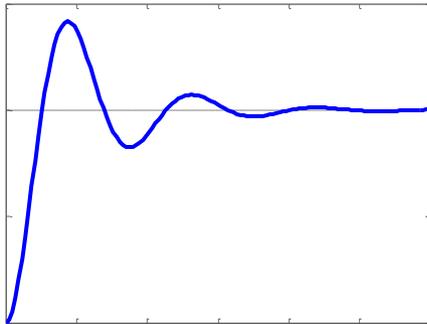
# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.4 Beispiel (1)

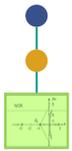
1. Beispiel: Phasenreserve als Maß für die Dämpfung
  - a) Führungsverhalten



•  $\varphi_R \approx 30^\circ$



PC-Demo 4: Einfluss des Phasenrands auf die Sprungantwort

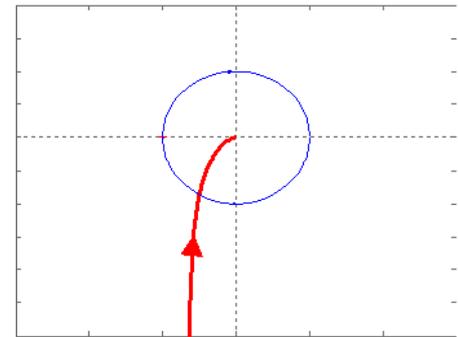
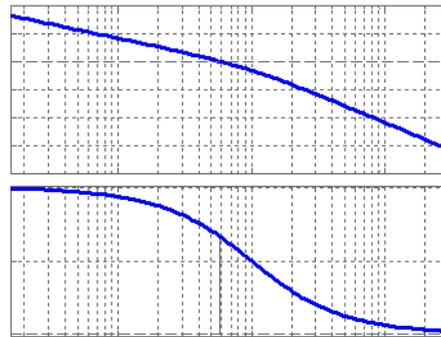
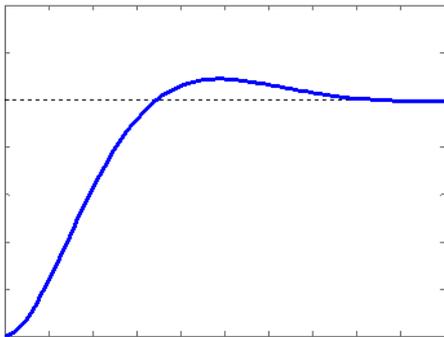


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

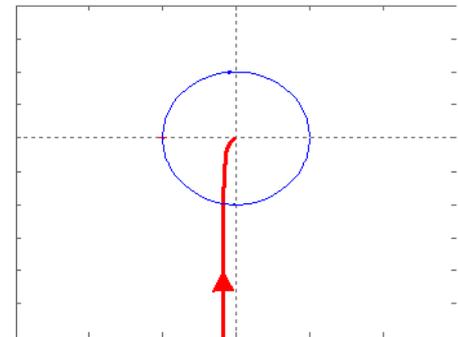
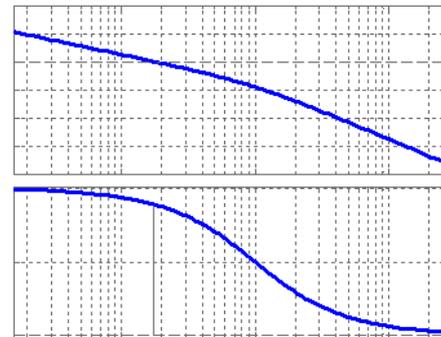
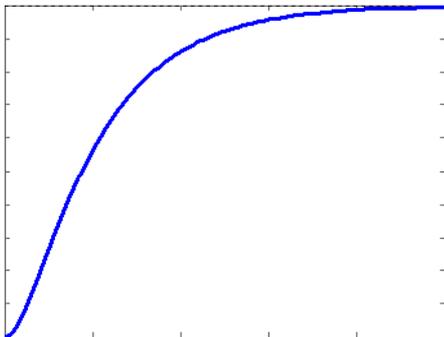
## 5.1.4 Beispiel (2)

1. Beispiel: Phasenreserve als Maß für die Dämpfung  
a) Führungsverhalten

•  $\varphi_R = 60^\circ$



•  $\varphi_R = 80^\circ$

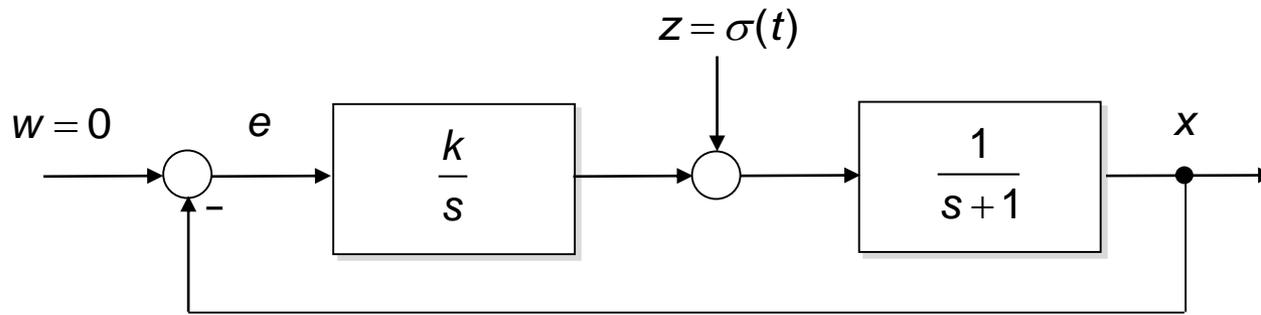




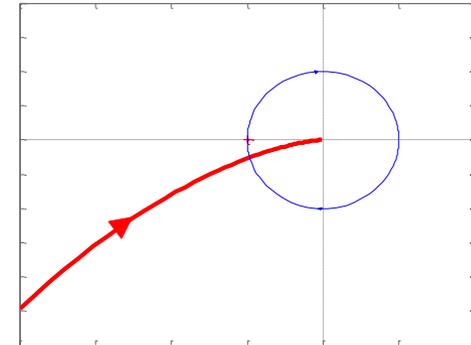
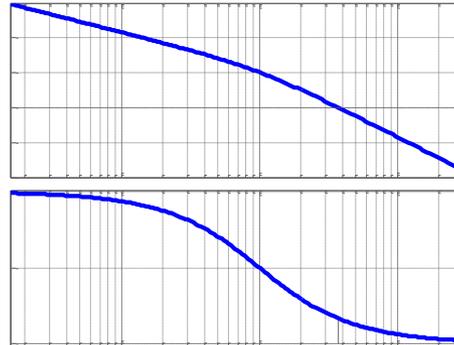
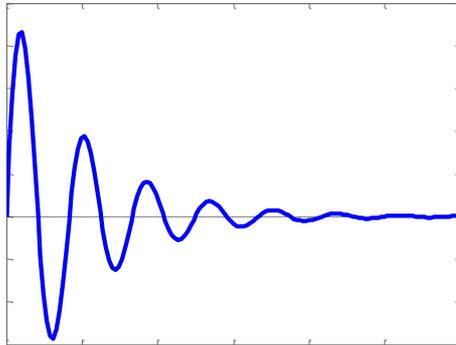
# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.4 Beispiel (3)

- 1. Beispiel: Phasenreserve als Maß für die Dämpfung
- b) Störverhalten



•  $\varphi_R \approx 15^\circ$



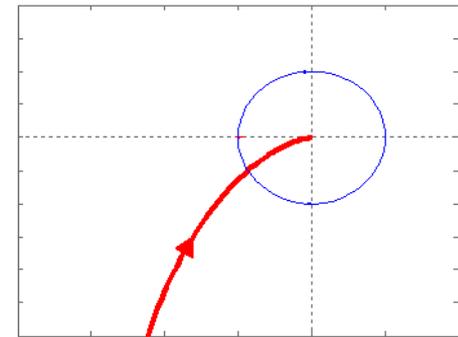
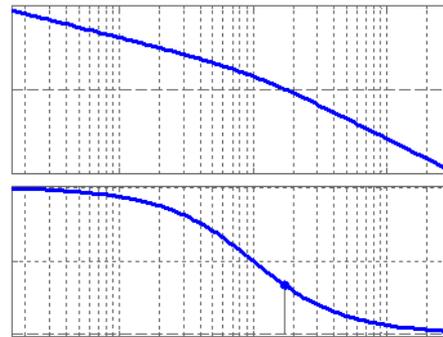
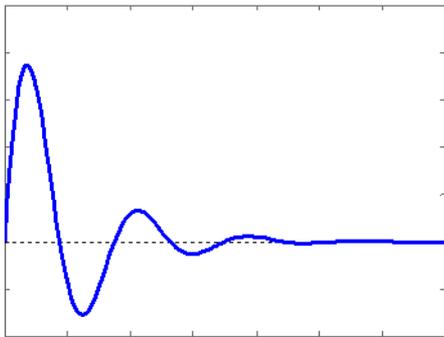


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

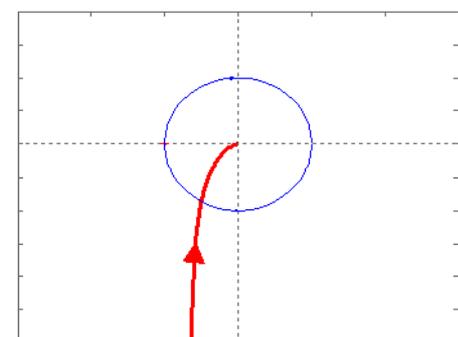
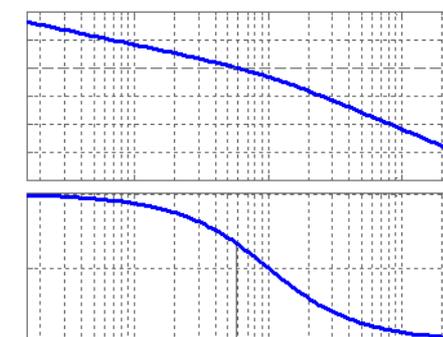
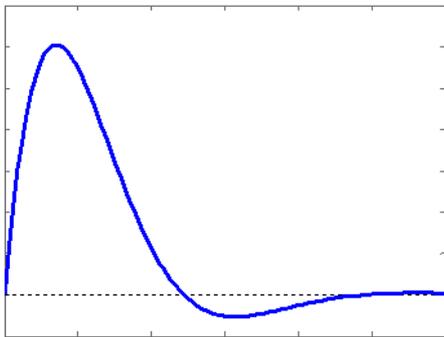
## 5.1.4 Beispiel (4)

- 1. Beispiel: Phasenreserve als Maß für die Dämpfung
- b) Störverhalten

•  $\varphi_R \approx 30^\circ$



•  $\varphi_R \approx 60^\circ$

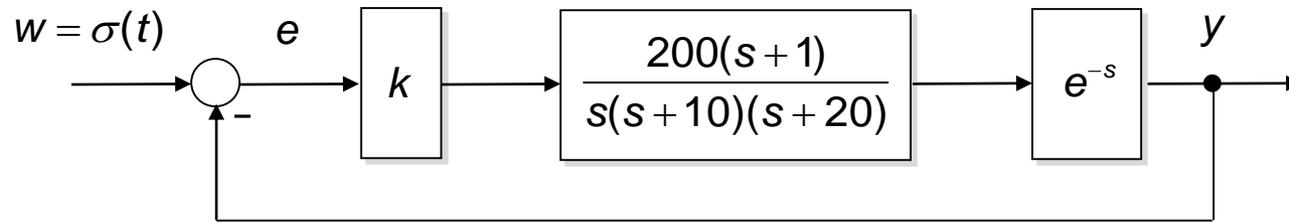




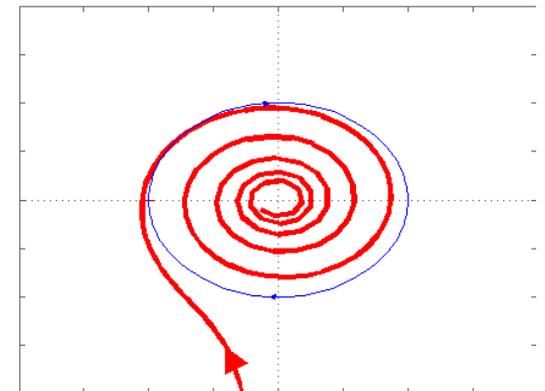
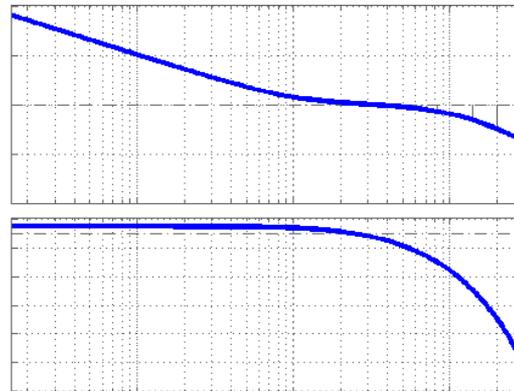
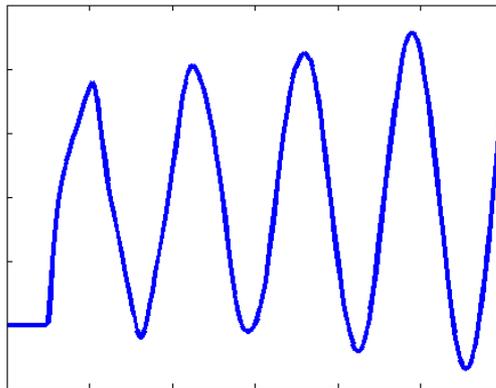
# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

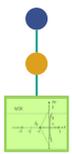
## 5.1.4 Beispiel (5)

2. Beispiel: Phasenreserve als Maß für die Dämpfung **unbrauchbar**



•  $k = 1$  ( $\varphi_R \approx -34^\circ$ )



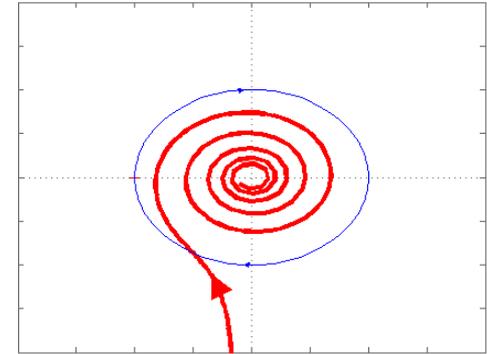
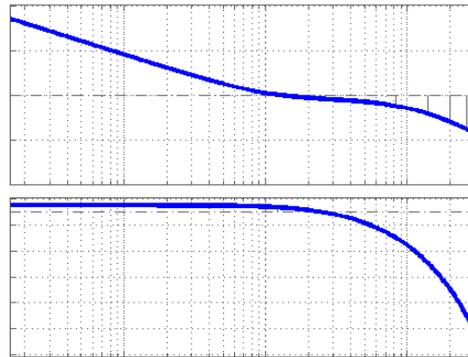
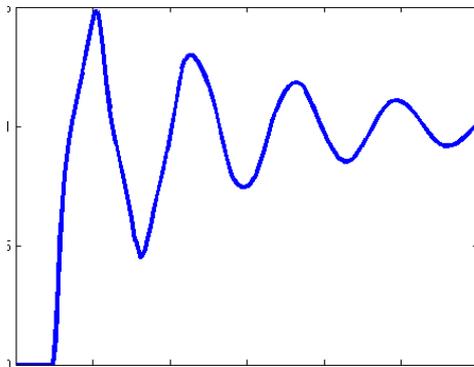


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

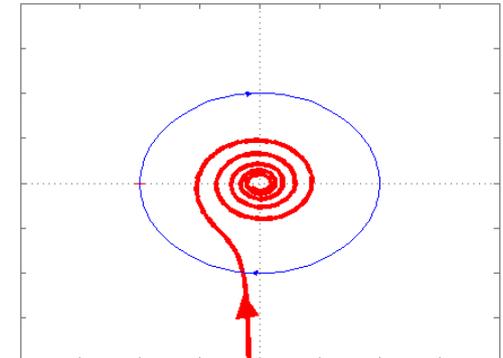
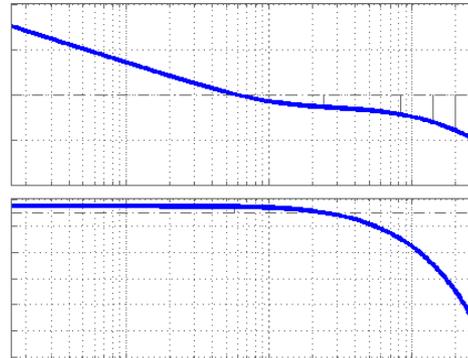
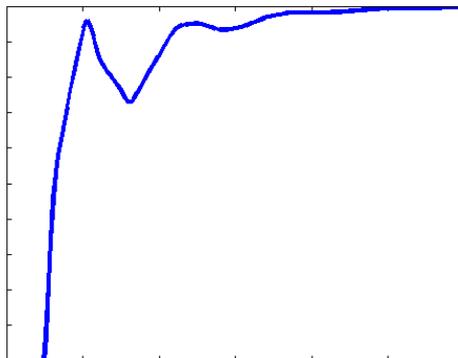
## 5.1.4 Beispiel (6)

### 2. Beispiel: Phasenreserve als Maß für die Dämpfung **unbrauchbar**

•  $k = 0.78$  ( $\varphi_R \approx 60^\circ$ )



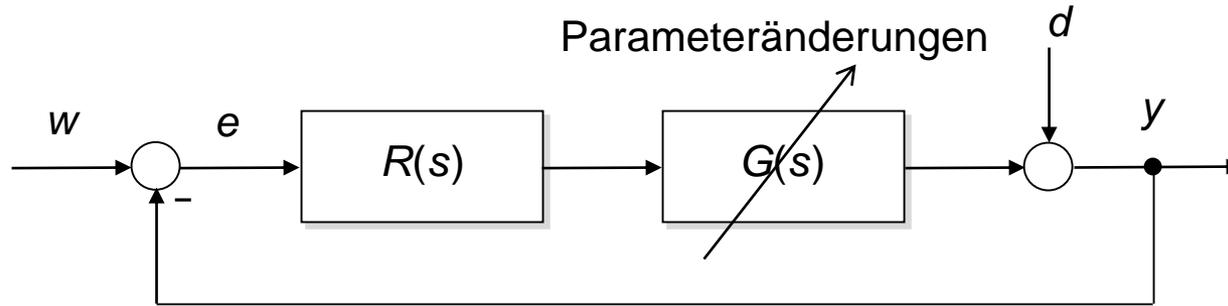
•  $k = 0.5$  ( $\varphi_R \approx 82^\circ$ )





# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

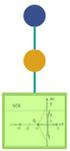
## 5.1.5 Parameterempfindlichkeit (1)



### Anforderung an den Reglerentwurf:

Relative **Änderungen der Führungsübertragungsfunktion**  $G_w(s)$ , die **durch Änderung von Streckenparametern** verursacht werden, sollen unterhalb einer vorgegebenen Schranke bleiben

Parameteränderungen entstehen z.B. durch nicht modellierte Einflüsse wie Temperatur, Alter, ...



## 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

### 5.1.5 Parameterempfindlichkeit (2)

Def.: **Empfindlichkeit**  $S_{G_S}^{G_w}(s)$

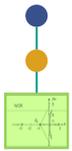
Die Empfindlichkeit  $S_{G_S}^{G_w}(s)$  von  $G_w(s)$  gegenüber Parameteränderungen von  $G_S(s)$  ist definiert als folgendes Verhältnis:

$$S_{G_S}^{G_w}(s) := \frac{\frac{G_w(s) - G_{w_{nom}}(s)}{G_w(s)}}{\frac{G_S(s) - G_{S_{nom}}(s)}{G_S(s)}}$$

**Idealforderung:** Der Regelkreis ist nicht empfindlich

$$S_{G_S}^{G_w}(j\omega) = 0 \text{ für alle } \omega$$

Aber: Nicht erfüllbar (siehe folgende Seiten)



# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.5 Parameterempfindlichkeit (3)

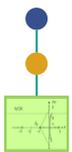
### Berechnung der Empfindlichkeit:

Mit  $G_R(s) = G_{R_{nom}}(s)$  folgt nach Zwischenrechnung

$$\frac{G_W - G_{W_{nom}}}{G_W} = \frac{\frac{G_{R_{nom}} G_S}{1 + G_{R_{nom}} G_S} - \frac{G_{R_{nom}} G_{S_{nom}}}{1 + G_{R_{nom}} G_{S_{nom}}}}{\frac{G_{R_{nom}} G_S}{1 + G_{R_{nom}} G_S}} = \dots = \frac{G_S - G_{S_{nom}}}{G_S (1 + G_{R_{nom}} G_{S_{nom}})} = \frac{G_S - G_{S_{nom}}}{G_S (1 + F_{O_{nom}})}$$

schließlich:

$$S_{G_S}^{G_W}(s) = \frac{\frac{G_W(s) - G_{W_{nom}}(s)}{G_W(s)}}{\frac{G_S(s) - G_{S_{nom}}(s)}{G_S(s)}} = \frac{\frac{G_S(s) - G_{S_{nom}}(s)}{G_S(s) (1 + F_{O_{nom}}(s))}}{\frac{G_S(s) - G_{S_{nom}}(s)}{G_S(s)}} = \frac{1}{1 + F_{O_{nom}}(s)}$$



# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.5 Parameterempfindlichkeit (4)

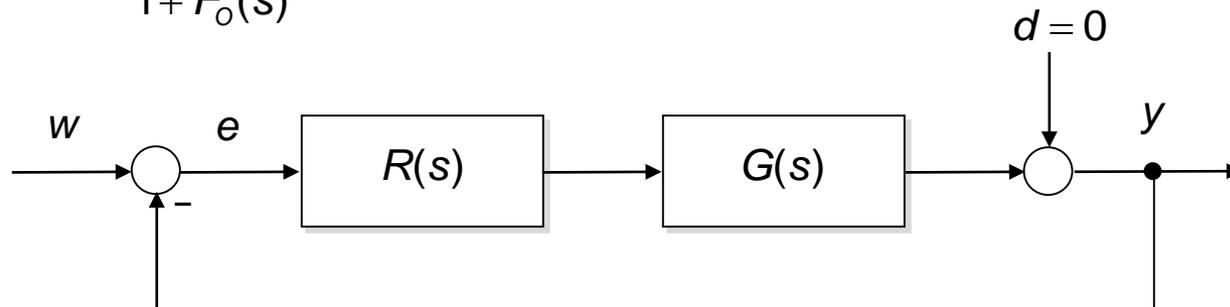
### Alternative Interpretation:

Dazu betrachtet man die Regelabweichung ohne Regler (Annahme: keine Störung):

$$U(s) = 0 \Rightarrow E_{ohne}(s) = W(s)$$

und die Regelabweichung mit Regler:

$$E_{mit}(s) = \frac{1}{1 + F_O(s)} W(s)$$



Die Empfindlichkeit ist identisch zu dem Verhältnis der Regelabweichung eines Regelkreises mit und ohne Regelung und somit identisch zum **dynamischen**

**Regelfaktor:**

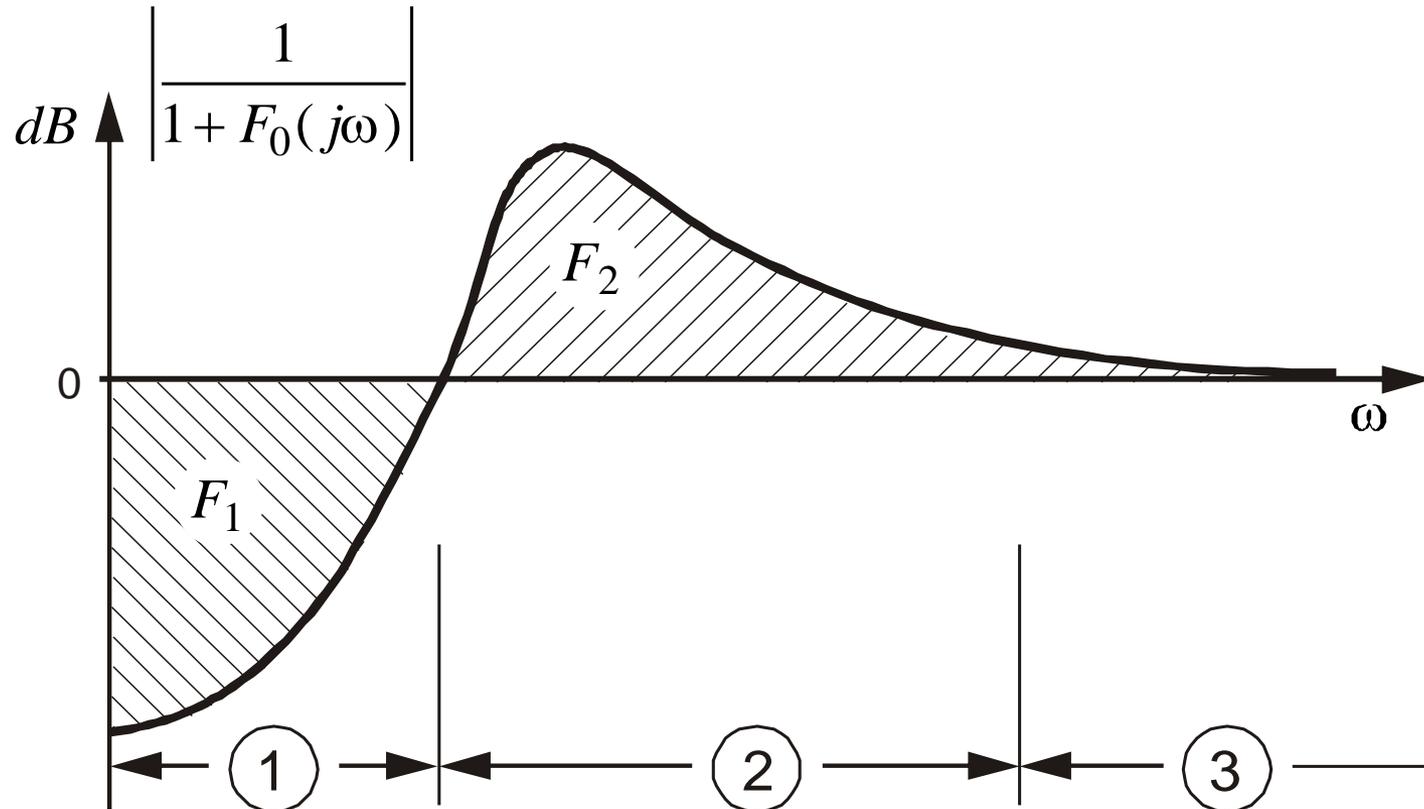
$$R_{dyn}(s) = \frac{E_{mit}(s)}{E_{ohne}(s)} = \frac{1}{1 + F_O(s)} = S_{G_S}^{G_w}(s)$$

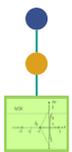


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.5 Parameterempfindlichkeit (5)

Prinzip-Verlauf:





## 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

### 5.1.5 Parameterempfindlichkeit (6)

Voraussetzungen:

- geschlossener Kreis ist stabil
- Polüberschuss von  $F_o(s)$  mindestens =2

#### Gleichgewichtstheorem

Der durch eine Regelung gegenüber einer Steuerung erzielbare Gewinn (über alle Frequenzen  $\omega$  gemittelt) ist gleich Null:

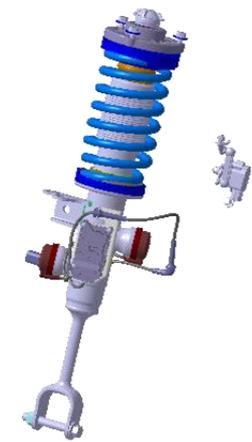
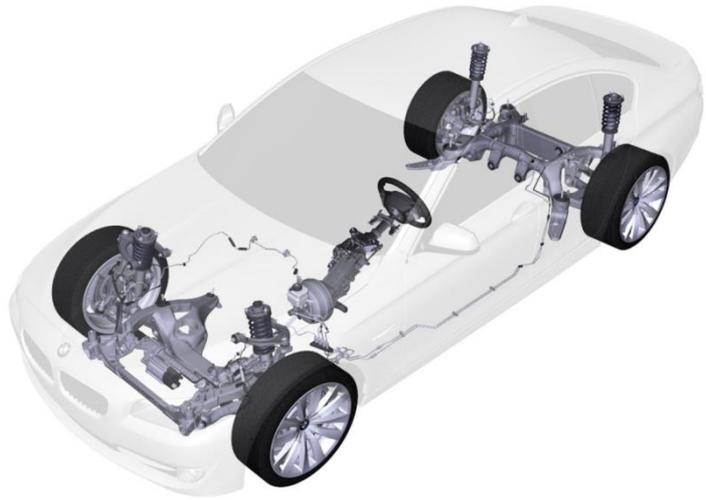
$$\int_0^{\infty} \log \left| S_{G_S}^{G_w}(j\omega) \right| d\omega = 0$$

Ziel des Reglerentwurfs muss es daher sein, mit dem Regler die Grenze zwischen dem Gegenkopplungs- und Mittkopplungsbereich so zu legen, dass die in den Stör- und Führungssignalen wichtigsten Frequenzen im Gegenkopplungsbereich von 1 liegen.



# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.6 Beispiel zum Gleichgewichtstheorem (1)



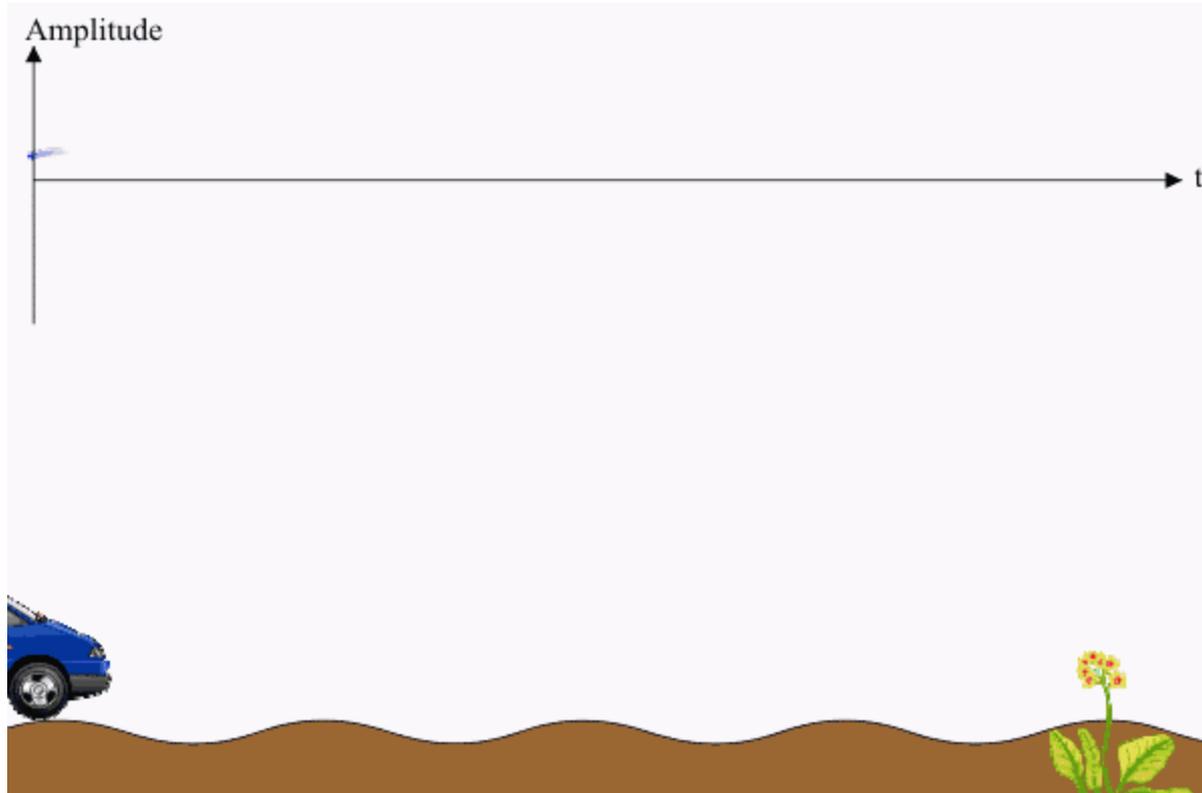
**Fahrbahnanregung**



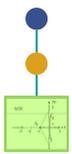


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.6 Beispiel zum Gleichgewichtstheorem (2)



Animation aus Lunze RT1

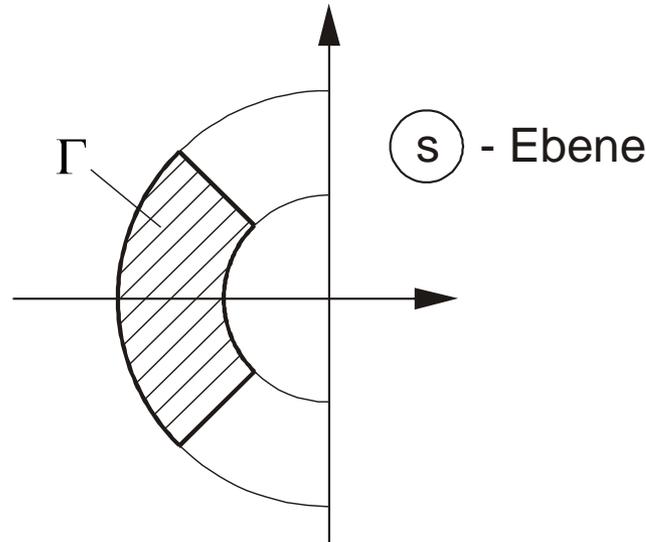


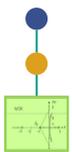
# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.6 Robustheit

- Robustheit** (des Regelungssystems):  
Der Regler soll für beliebig vorgegebene Parameter der Strecke (innerhalb eines vorgegebenen Parameterbereichs) gewünschte Eigenschaften des geschlossenen Kreises sicherstellen, z.B.:

⇒  $\Gamma$ -Stabilität



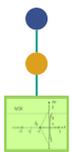


# 5.1 Anforderungen an den Regelkreis

## 5.1.7 Klassifizierung der Entwurfsverfahren

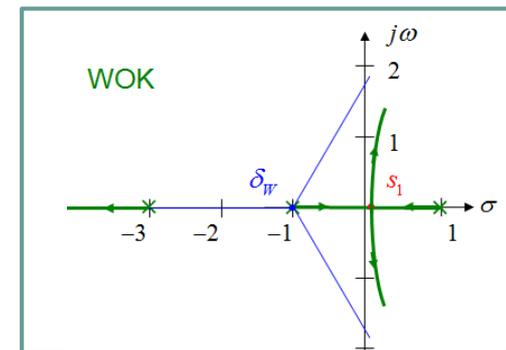
### Übersicht

Entwurfsverfahren:	
<p>1. Ohne explizites Gütekriterium</p> <p>a) Direkte Verfahren</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Kompensation</li><li>• Polvorgabe</li></ul> <p>b) Indirekte Verfahren</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Frequenzkennlinien</li><li>• Wurzelortskurve</li></ul> <p>c) Heuristische Parameter-einstellungen</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ziegler-Nichols</li></ul>	<p>2. Mit explizitem Gütekriterium</p> <p>a) Parameteroptimierung, z.B.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Betragsoptimum</li><li>• Min. Quadrat. Regelfläche</li></ul> $\int_0^{\infty} e^2(t) dt \rightarrow Min$ <p>b) Strukturoptimierung, z.B.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Riccati Regelung</li></ul>



## 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. **Heuristische Verfahren**
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



## 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren

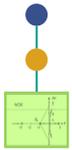
## 5.2 Heuristische Verfahren

### 5.2.1 Beispiel



Füllstandsregelung für ein  
Tanksystem am IRS

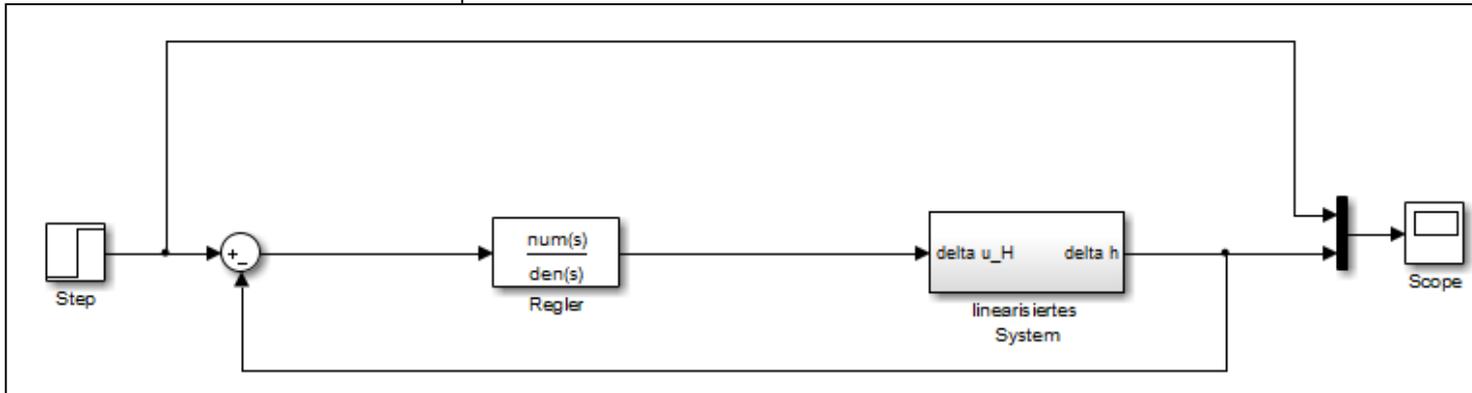
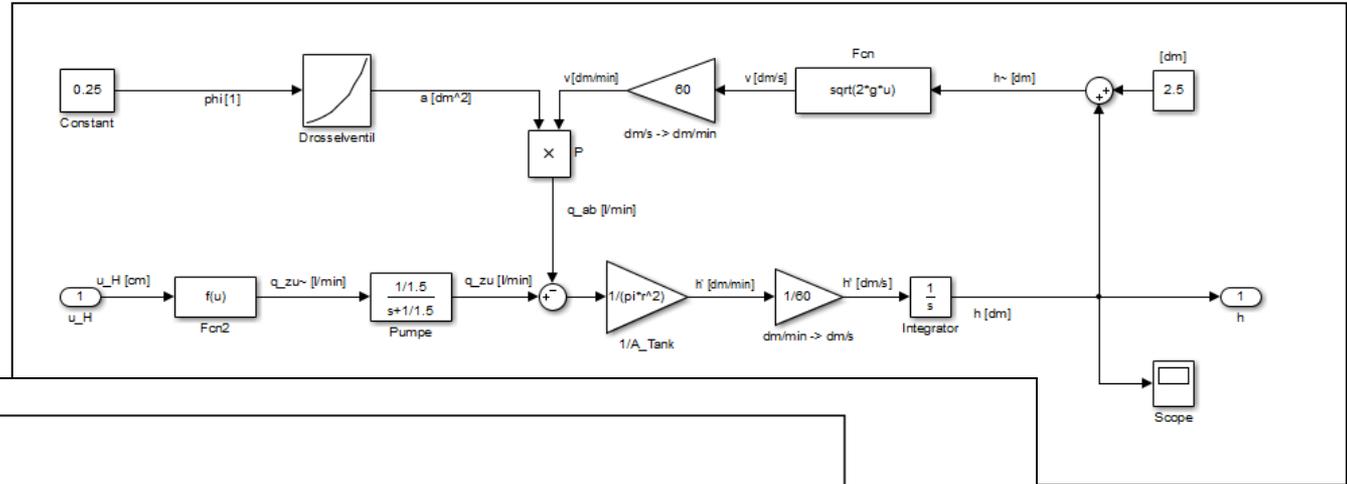




# 5.2 Heuristische Verfahren

## 5.2.1 Beispiel

Simulation des Tanksystems  
(siehe Übung 1):



Wählen Sie die Parameter einer allgemeine Regler-Übertragungsfunktion:

$$R(s) = \frac{r_0 + r_1s + r_2s^2 + \dots}{q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots}$$

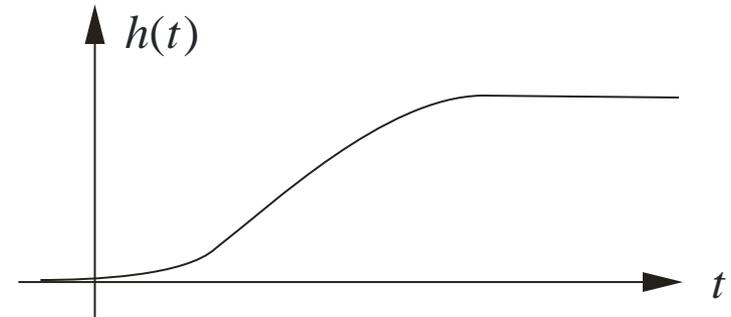


## 5.2 Heuristische Verfahren

### 5.2.2 Parameter-Einstellung nach Ziegler-Nichols

Voraussetzungen:

- Strecke stark verzögernd
- „S-förmiger“ Verlauf der Sprungantwort



Einstell-Strategie:

1. Regelstrecke zunächst mit reinem  $P$ -Regler  $G_R(s) = K_R$  betreiben.
2. Verstärkung  $K_R$  des  $P$ -Reglers so lange erhöhen, bis der geschlossene Kreis ungedämpfte Schwingungen ausführt. Der dabei eingestellte  $K_R$ -Wert wird als kritische Reglerverstärkung  $K_{Rkrit}$  bezeichnet; die zugehörige Periodendauer heißt  $T_{krit}$ .
3. Einstellung des jeweils gewählten  $P$ -,  $PI$ - oder  $PID$ -Reglers gemäß folgender Tabelle:

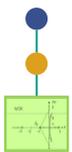
## 5.2 Heuristische Verfahren

### 5.2.2 Parameter-Einstellung nach Ziegler-Nichols (2)

Reglertyp	$G_R(s)$	$K_R$	$T_n$	$T_v$
$P$	$K_R$	$0,5 \cdot K_{Rkrit}$	—	—
$PI$	$K_R \left( 1 + \frac{1}{T_n s} \right)$	$0,45 \cdot K_{Rkrit}$	$0,85 \cdot T_{krit}$	—
$PID$	$K_R \left( 1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s \right)$	$0,6 \cdot K_{Rkrit}$	$0,5 \cdot T_{krit}$	$0,12 \cdot T_{krit}$

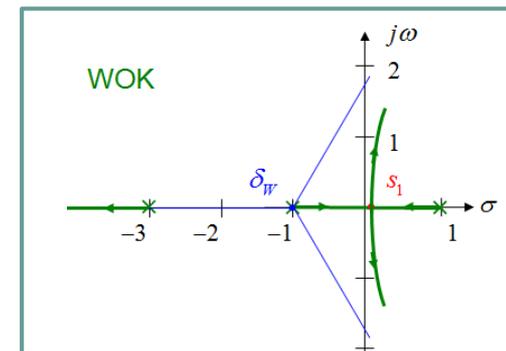
Anmerkungen:

- Heuristisches Verfahren
- mathematische Prozessbeschreibung nicht erforderlich



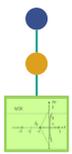
## 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
- 3. Direkte Verfahren**
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



## 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

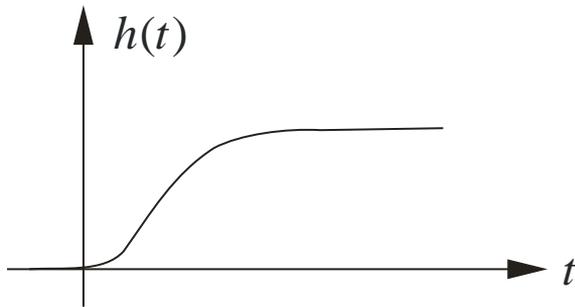
1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.1 Grundgedanke (1)

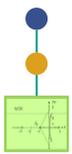
- Vorgabe einer Modellübertragungsfunktion  $G_{wM}(s)$  (und/oder  $G_{dM}(s)$ ) bzw. der zugehörigen Sprungantwort



Beispiel:  $PT_2$  mit  $G_{wM}(s) = \frac{1}{(1 + T_1 s)^2}$

- daraus direkte Ermittlung eines **Kompensationsreglers** aus  $G_{wM}(s)$ :

$$G_{wM}(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \Rightarrow G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)} \frac{G_{wM}(s)}{1 - G_{wM}(s)}$$

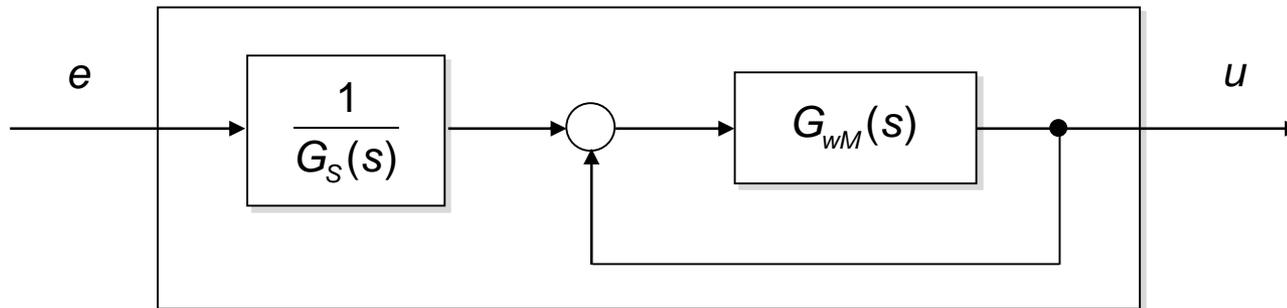


## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.1 Grundgedanke (2)

$$G_{wM}(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \Rightarrow G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)} \frac{G_{wM}(s)}{1 - G_{wM}(s)}$$

#### Struktur des Kompensationsreglers



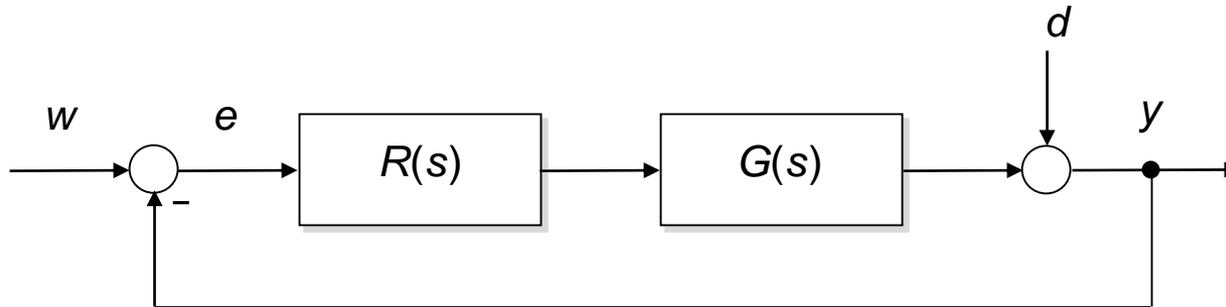
#### Voraussetzungen für den Einsatz des Kompensationsreglers:

- $G_S(s)$  muss **stabil** sein
- $G_S(s)$  muss **minimalphasig** sein (sonst ist der Regler instabil)
- das mit einer positiven Rückführung versehene Modell  $G_{wM}(s)$  muss stabil sein



## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter



Gegeben: Strecke  $G_S(s)$ :

$$G_S(s) = \frac{K_S (1 + T_{Z1}s) \cdot (1 + T_{Z2}s) \cdot \dots}{s^q (1 + T_{N1}s) \cdot (1 + T_{N2}s) \cdot \dots}, \quad q = 0, 1, 2, \quad T_{Z1} \geq T_{Z2} \geq \dots, \quad T_{N1} \geq T_{N2} \geq \dots$$

Gesucht: Struktur und Parameter des Reglers  $G_R(s)$



## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (2)

#### 1. Strecken ohne $I$ -Anteil ( $q = 0$ ):

⇒ Regler mit  $I$ -Anteil

Parameterwahl: Kreis soll möglichst schnell werden

⇒  $\omega_D$  möglichst groß

a)  $PI$ -Regler:

$$G_R(s) = K_{PI} \frac{1 + T_R s}{s}$$

Dabei gilt für die Zeitkonstante  $T_R$ :

$\alpha$ ) falls  $T_{N1} \gg T_{N2} > T_{N3} > \dots$  :

$T_R = T_n = T_{N1}$  : Kompensation der größten Streckenzeitkonstanten

$\beta$ ) falls  $T_{N1} \approx T_{N2} \approx T_{N3} \approx \dots$  :

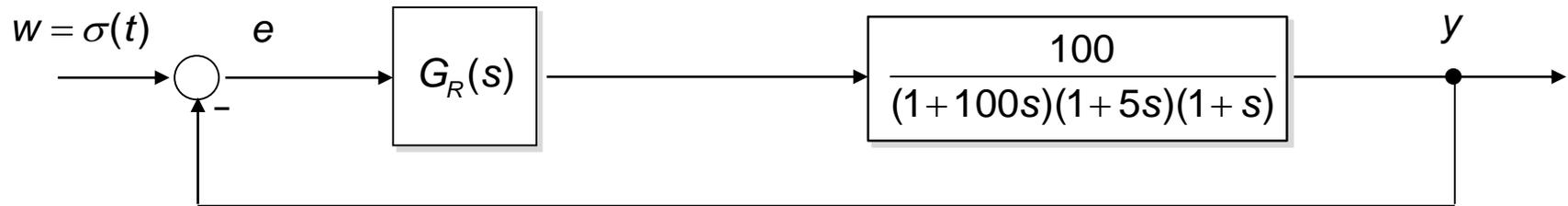
$T_R = \sum_i T_{Ni} := T_\Sigma$  : Kompensation der Summenzeitkonstanten



# 5.3 Direkte Verfahren

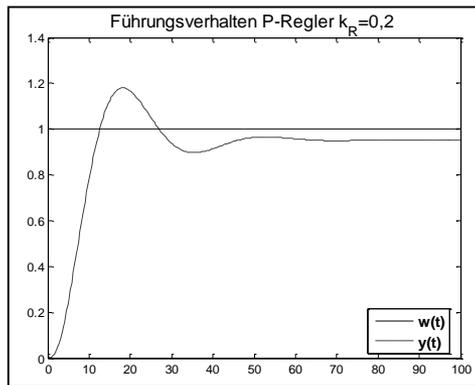
## 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (3)

### PC-Demo 5: Verhalten verschiedener Reglertypen

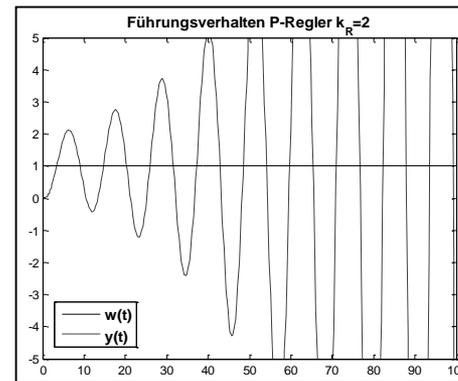


P-Regler: stationär ungenau bzw. instabil

$$G_R(s) = 0,2$$



$$G_R(s) = 2$$

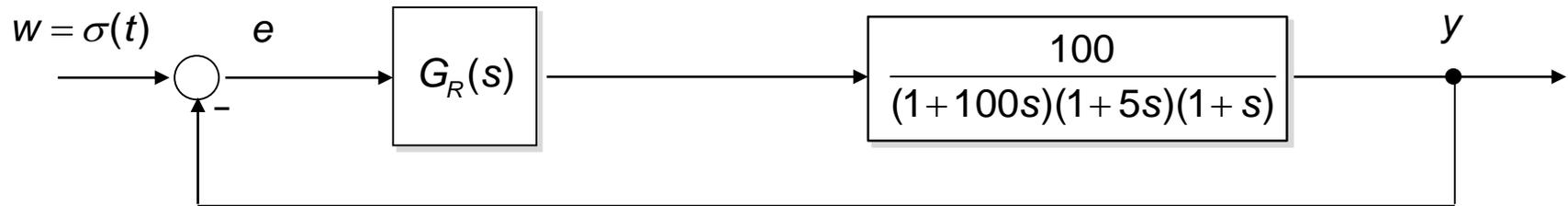




# 5.3 Direkte Verfahren

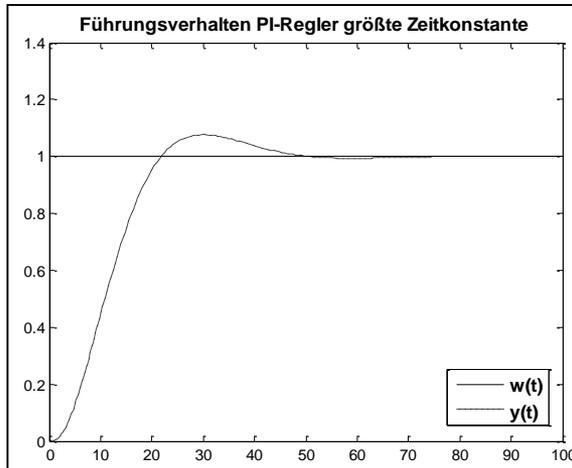
## 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (4)

### PC-Demo 5: Verhalten verschiedener Reglertypen

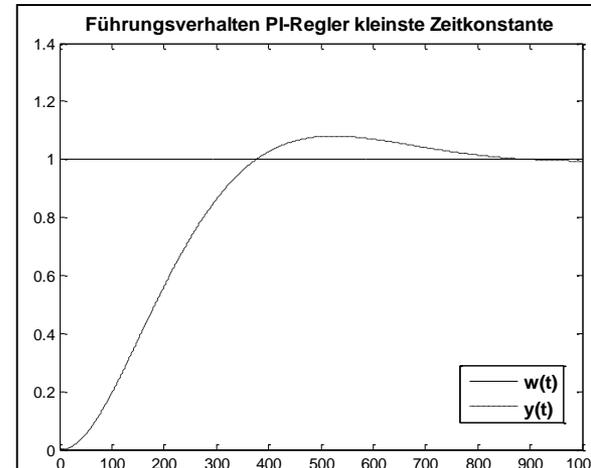


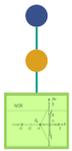
a) PI-Regler: stationär genau, unterschiedliche Schnelligkeit

$$T_R = T_1 = 100$$



$$T_R = T_3 = 1$$





## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (5)

#### 1. Strecken ohne $I$ -Anteil ( $q = 0$ ):

⇒ Regler mit  $I$ -Anteil

Parameterwahl: Kreis soll möglichst schnell werden

⇒  $\omega_D$  möglichst groß

**b) Idealer  $PID$ -Regler:** 
$$G_R(s) = K_{PID} \frac{(1 + T_{R1}s)(1 + T_{R2}s)}{s}$$

Dabei gilt für die Zeitkonstanten  $T_{R1}$  und  $T_{R2}$ :

$T_{R1} = T_{N1}, T_{R2} = T_{N2}$ : Kompensation der beiden größten Streckenzeitkonstanten



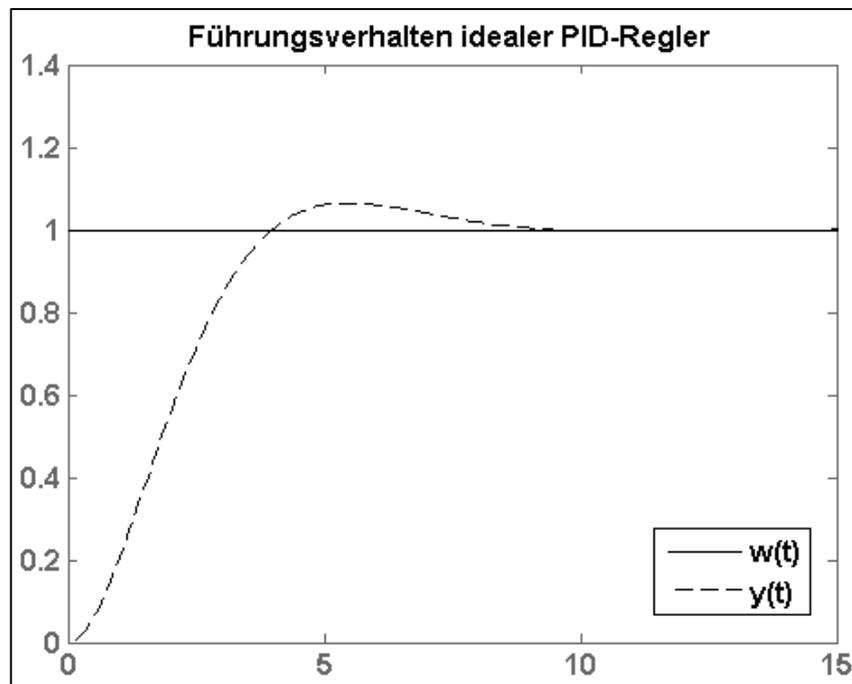
## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (6)

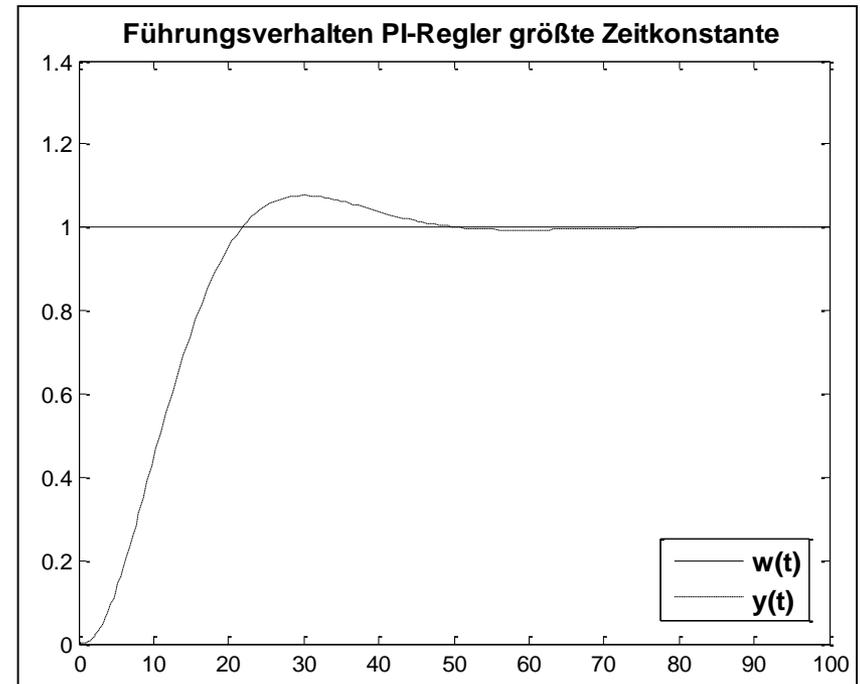
b) PID-Regler ist ebenfalls stationär genau, aber schneller als PI-Regler

Bsp. Aus PC-Demo 5:

PID:



zum Vergleich PI:





## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (7)

#### 2. Strecken mit $I$ -Anteil ( $q = 1$ ):

⇒ Regler ohne  $I$ -Anteil ( $PD$ )

idealer  $PD$ -Regler:  $G_R(s) = K_R(1 + T_V s)$

Dabei gilt für die Zeitkonstante  $T_V$ :

$\alpha)$  falls  $T_{N1} \gg T_{N2} > T_{N3} > \dots$  :  $T_V = T_{N1}$

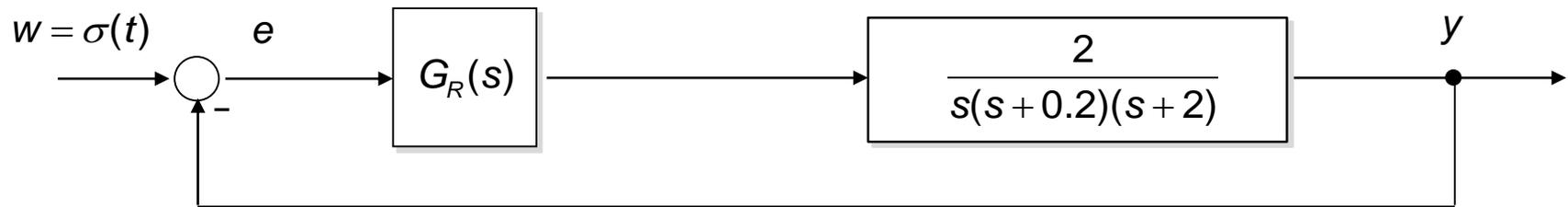
$\beta)$  falls  $T_{N1} \approx T_{N2} \approx T_{N3} \approx \dots$  :  $T_V = \sum_i T_{Ni} = T_\Sigma$



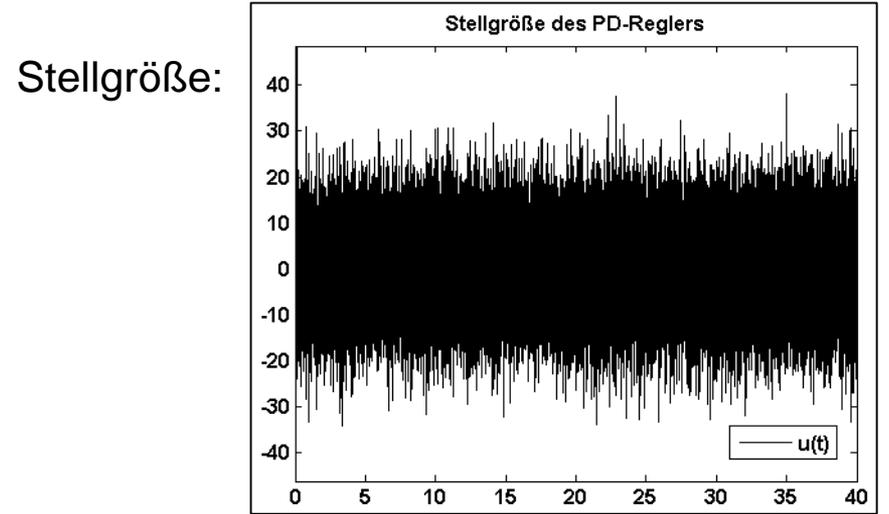
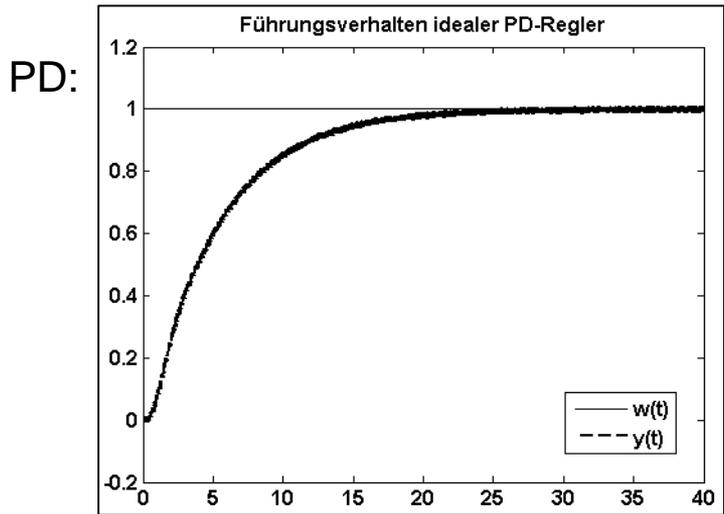
# 5.3 Direkte Verfahren

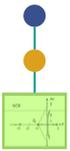
## 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (8)

### PC-Demo 5: Verhalten verschiedener Reglertypen



Idealer PD-Regler: stationär genau, Messrauschen wird verstärkt





## 5.3 Direkte Verfahren

### 5.3.2 Einstellregeln für die Reglerparameter (9)

**Abhilfe:** zur Realisierbarkeit zusätzliche Nennerzeitkonstante  $T_N$  einfügen

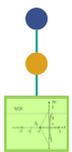
⇒ **Realer *PID*-Regler:** 
$$G_R(s) = K_{PID} \frac{(1 + T_{R1}s)(1 + T_{R2}s)}{s(1 + T_Ns)}$$

⇒ **Realer *PD*-Regler:** 
$$G_R(s) = K_R \frac{(1 + T_Vs)}{(1 + T_Ns)}$$

Dabei gilt für die zusätzliche Nenner-Zeitkonstanten  $T_N$ :

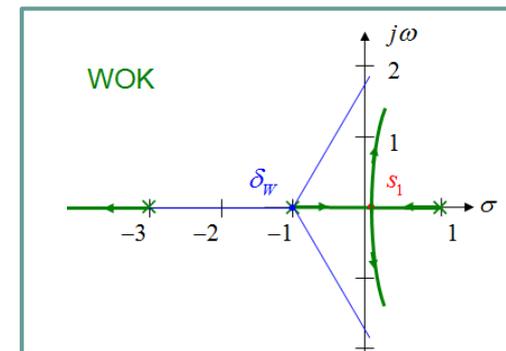
$$T_N \approx (0.02 \dots 0.1) \cdot T_{R2} \quad \text{bzw.}$$

$$T_N \approx (0.02 \dots 0.1) \cdot T_V$$



## 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
- 4. Frequenzkennlinienverfahren**
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



## 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren

## 5.4 Frequenzkennlinienverfahren

### 5.4.1 Beispiel (1)

Beispiel:

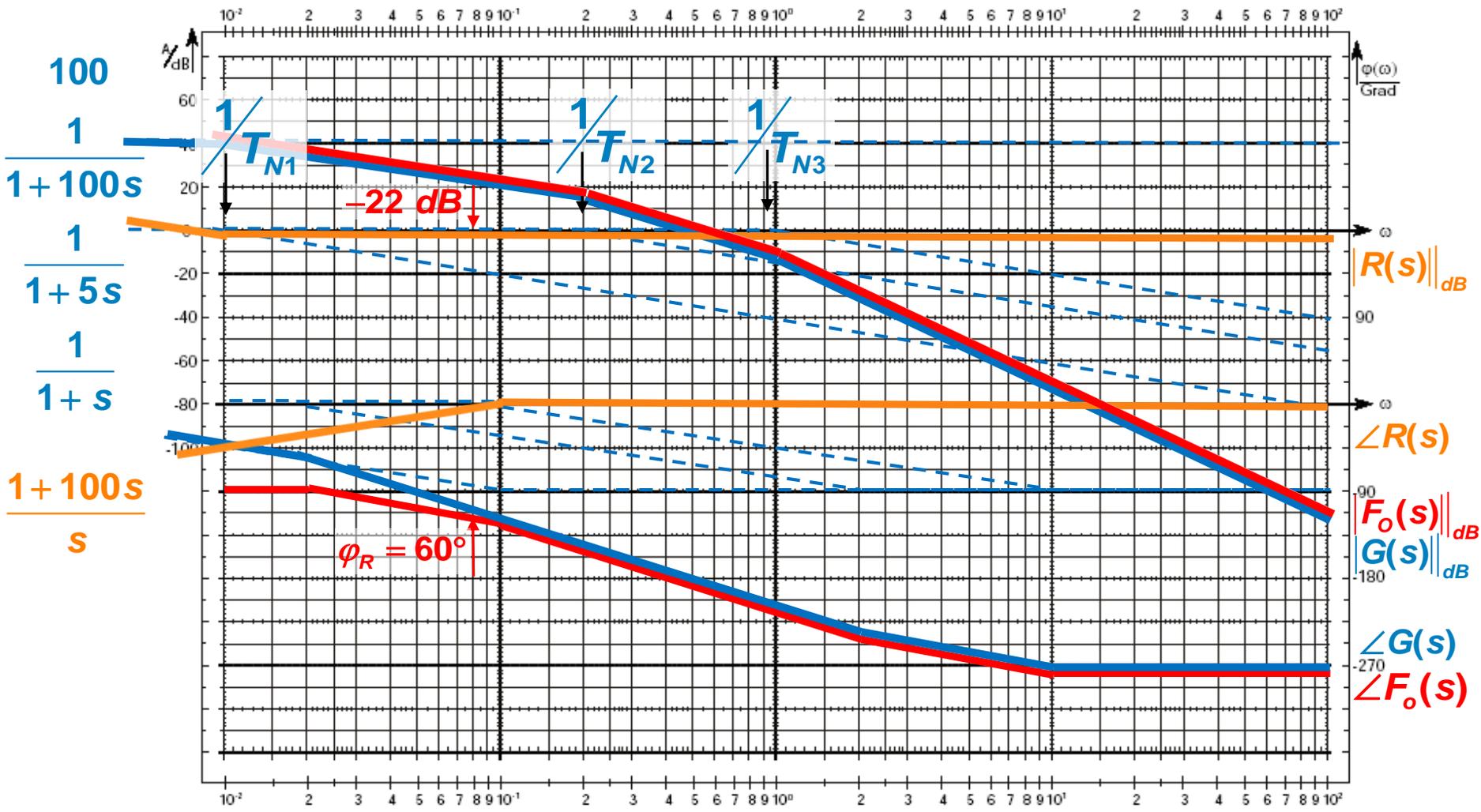
Gegeben: 
$$G(s) = \frac{100}{(1 + 100s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

Gesucht:  $PI$ -Regler  $R(s) = K_R \frac{1 + T_R s}{s}$ , der im geschlossenen Kreis für eine Phasenreserve von  $\varphi_R = 60^\circ$  sorgt.

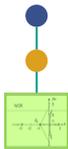
Lösung:

# 5.4 Frequenzkennlinienverfahren

## 5.4.1 Beispiel (2)



Eine Achse logal, geteilt von 1 bis 10 000, Einheit 0,5 mm, die andere in mm



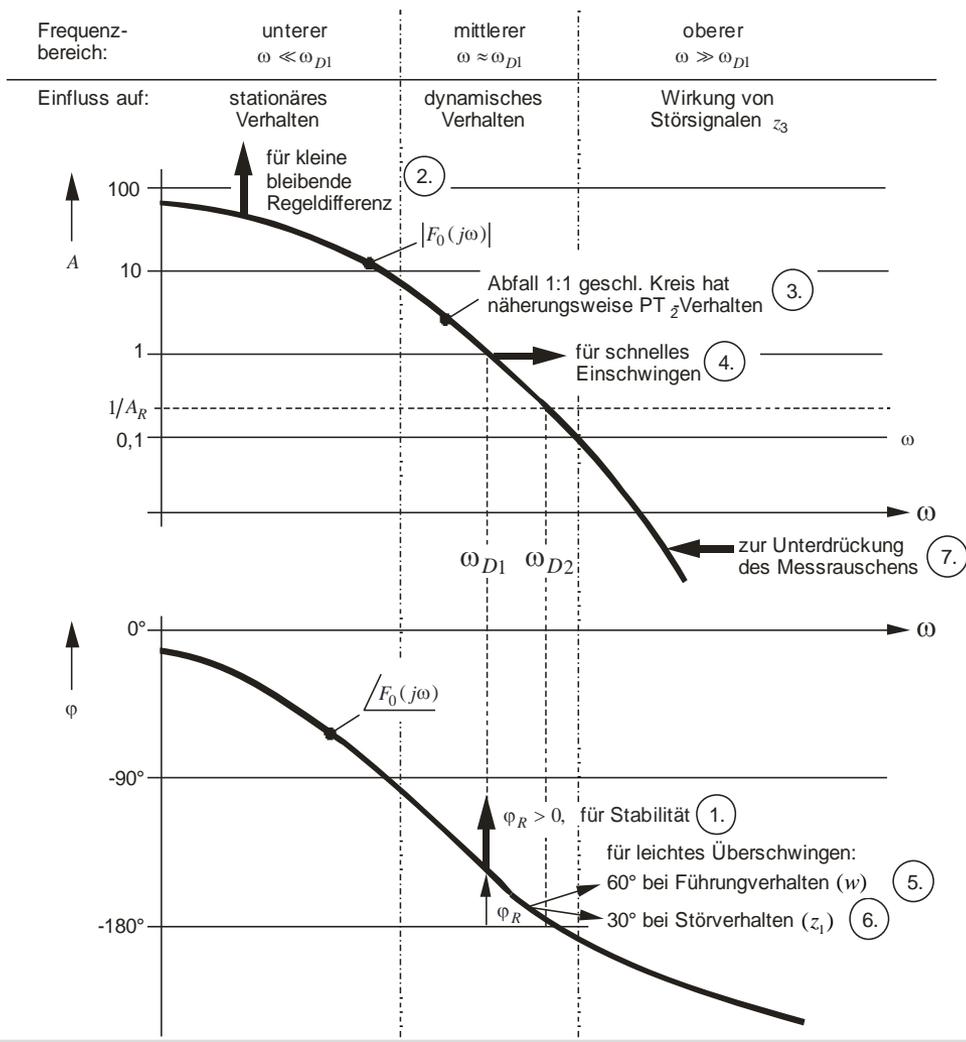
## 5.4 Frequenzkennlinienverfahren

### 5.4.2 Entwurfsstrategie (1)

1. Auswahl der Reglerstruktur gemäß vorliegendem Streckentyp
2. Bestimmung der Reglerparameter gemäß den einfachen Einstellregeln
3. Zeichnen des Bodediagramms mit der Gesamtverstärkung 1
4. Wahl der Verstärkung aus Bodediagramm so, dass  $\varphi_R$  und  $\omega_D$  Werte entsprechend der Spezifikation (siehe nächste Folie) annehmen und RK stabil ist (Phasenreserve bei der Durchtrittsfrequenz)
5. Berechnung der Reglerverstärkung aus der ermittelten Verstärkung
6. Überprüfung des Zeitverhaltens durch Simulation, je nach Ergebnis ggf. weitere Iteration mit Schritt 4 (durch Einfügen (seriell) weiterer phasenhebender oder –absenkender Glieder
7. Stellgrößen betrachten

# 5.4 Frequenzkennlinienverfahren

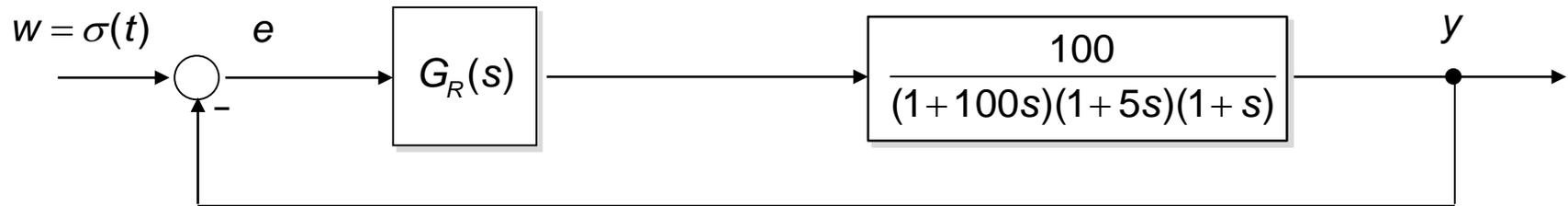
## 5.4.2 Entwurfsstrategie (2)



# 5.4 Frequenzkennlinienverfahren

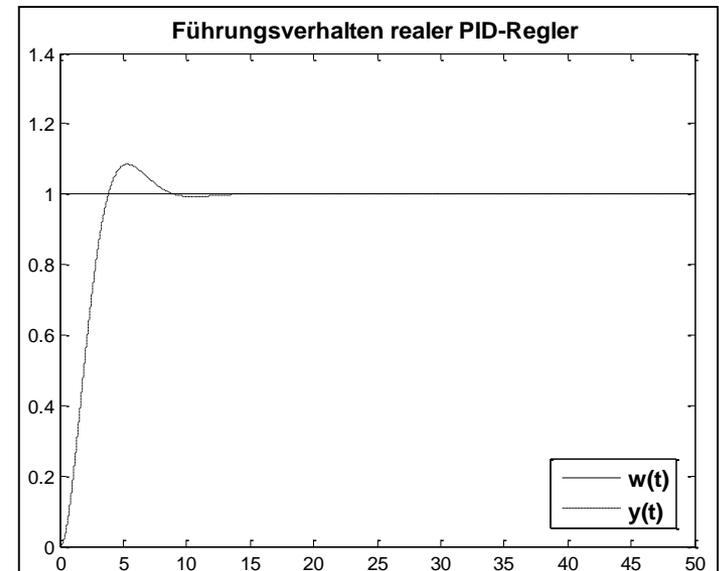
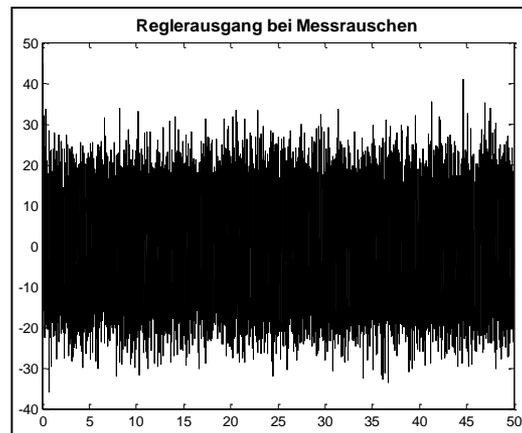
## 5.4.3 Beispiel (1)

### PC-Demo 5: erweiterter Reglerentwurf mit MATLAB



c) realer PID-Regler  $G_R(s) = 29 \frac{(s + 0.01)(s + 0.2)}{s(s + 10)}$

aber hohe Stellgröße,  
„Stellgliedflattern“  
bei Messrauschen

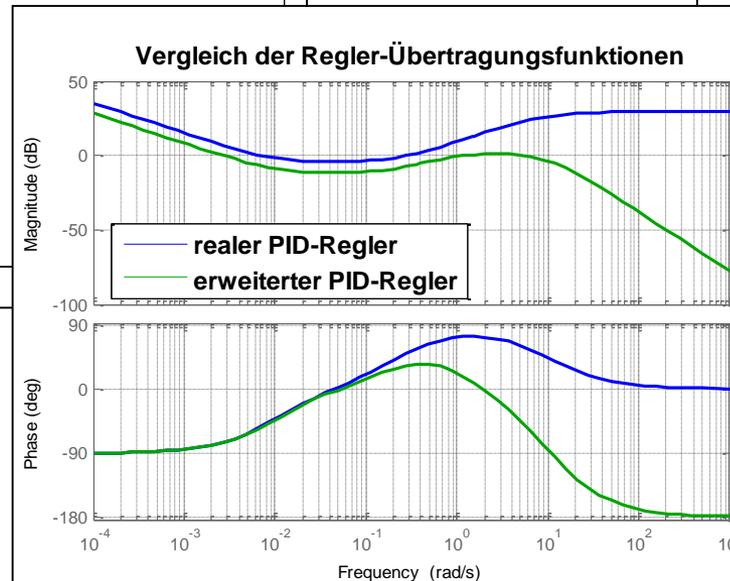
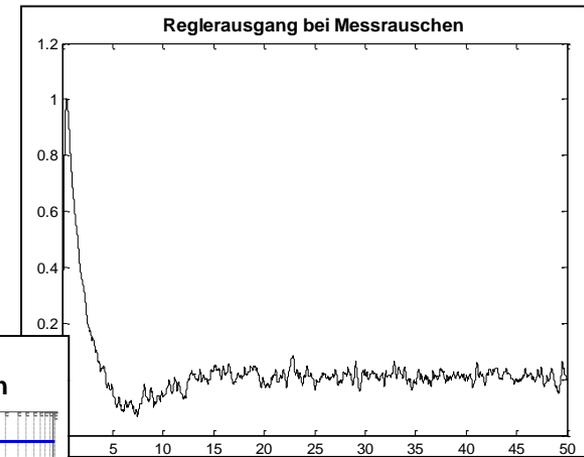
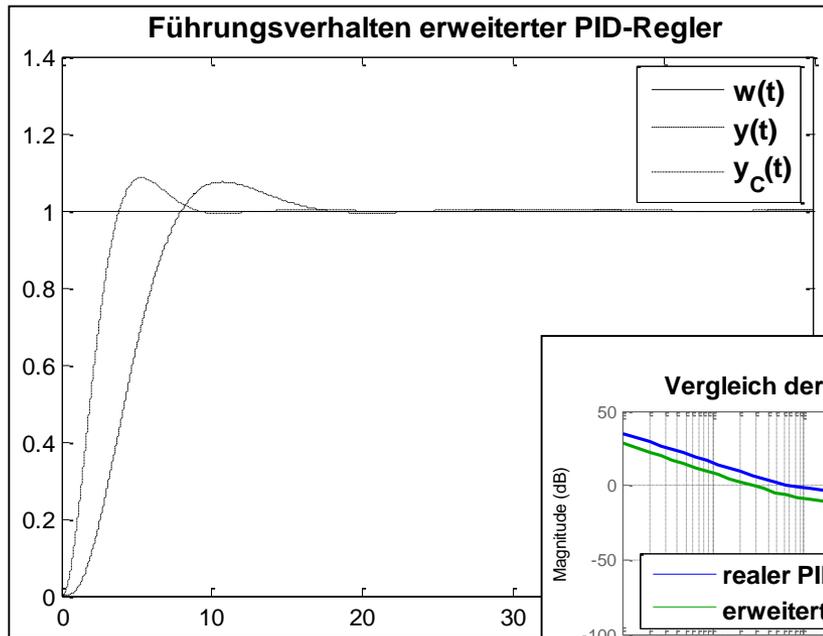


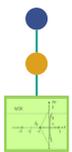


# 5.4 Direkte Verfahren

## 5.4.3 Beispiel (2)

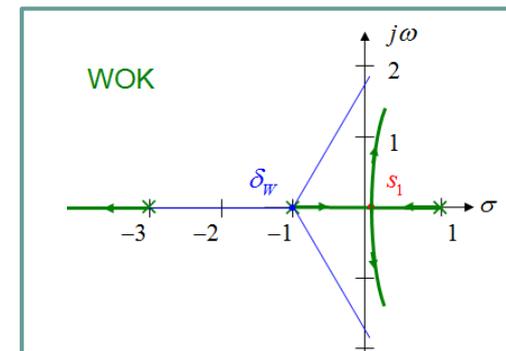
d) Erweiterter PID-Regler: etwas langsamer, aber Stellgröße kleiner und weniger verrauscht





## 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
- 5. Wurzelortskurvenverfahren**
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



## 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

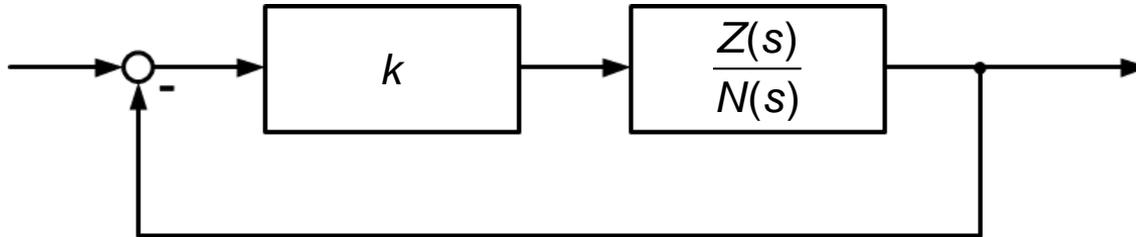
1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren

# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.1 Prinzip

Prinzip: Auswertung des Zusammenhangs zwischen

- den Polen  $p_v$  und Nullstellen  $n_\mu$  des offenen Kreises  $F_o(s)$  und
- und den Polen und Nullstellen des geschlossenen Kreises  $G_w(s)$  bei Variation der Verstärkung  $k$  des offenen Kreises.



$$F_o(s) = k \frac{Z(s)}{N(s)}$$

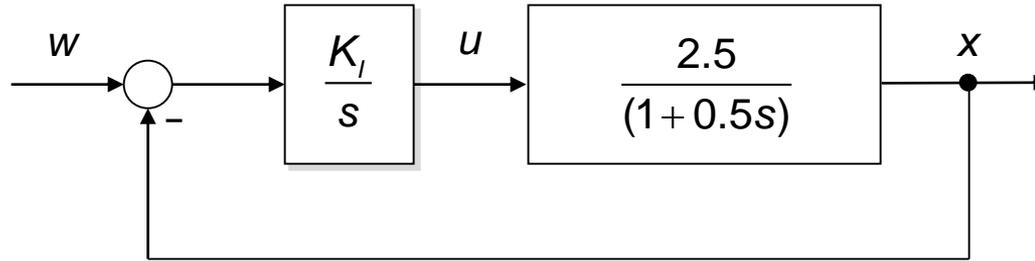
Geschlossener Kreis:  $G_w(s) = \frac{kZ(s)}{kZ(s) + N(s)}$  , charakteristisches Polynom:  $kZ(s) + N(s) = 0$



# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.2 Beispiel

Gegeben:



$$\Rightarrow F_o(s) = \frac{K_I}{s} \frac{2.5}{1+0.5s}$$

Gesucht: Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises  $G_w(s)$  bei Variation von  $K_I$

Lösung: Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises:

$$G_w(s) = \frac{F_o(s)}{1+F_o(s)} \quad \text{lautet:} \quad F_o(s)+1=0 \Rightarrow 2.5K_I + s + 0.5s^2 = 0$$

$$\implies \text{Pole von } G_w(s): s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5K_I}$$

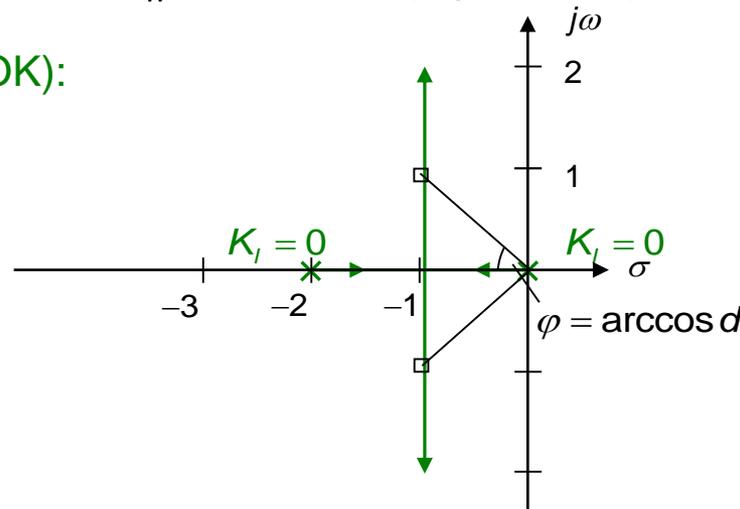
# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.2 Beispiel (2)

Graphische Darstellung der Wurzeln  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5K_I}$  der charakteristischen Gleichung  $2,5K_I + s + 0,5s^2 = 0$  bei Variation von  $K_I$ : Wurzelortskurve

- $K_I = 0$  : Pole von  $G_W(s)$  sind gleich den Polen von  $F_o(s)$
- $0 < K_I \leq \frac{1}{5}$  : Pole von  $G_W(s)$  sind negativ reell
- $K_I > \frac{1}{5}$  : Pole von  $G_W(s)$  sind konjugiert komplex

Wurzelortskurve (WOK):



- Ergebnis: aus WOK ersichtlich:
- $G_W(s)$  stabil für alle  $K_I$
  - Dynamik von  $G_W(s)$  abschätzbar

## 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

### 5.5.3 Definition

#### Def.: Wurzelortskurve (WOK):

Die Wurzelortskurve (WOK) besteht aus den  $n$  Bahnen, die die  $n$  Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises durchlaufen, wenn der Verstärkungsfaktor  $k$  des offenen Regelkreises von 0 gegen  $+\infty$  läuft.

Die WOK wird ermittelt als Menge aller Punkte der komplexen  $s$ -Ebene, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$F_o(s) = k \frac{P_o(s)}{Q_o(s)} = k \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - n_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu})} = -1, \quad k > 0$$

# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.4 Berechnung der Wurzelorte

$$F_o(s) = k \frac{P_o(s)}{Q_o(s)} = k \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - n_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu})} = -1, \quad k > 0$$

Phasenbedingung

$$\begin{aligned} \angle F_o(s) &= \sum_{\mu=1}^m \angle(s - n_{\mu}) - \sum_{\nu=1}^n \angle(s - p_{\nu}) \\ &= (2i + 1)\pi, \quad i \text{ beliebig ganz} \end{aligned}$$

⇒ Geometrie der WOK  
(Koordinatensystemunabhängig)

Betragsbedingung

$$|F_o(s)| = 1 \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{\prod_{\nu=1}^n |(s - p_{\nu})|}{\prod_{\mu=1}^m |(s - n_{\mu})|}$$

⇒ Skalierung der WOK

Prinzipielle Vorgehensweise zur Konstruktion der WOK:

- Wahl eines Aufpunktes  $s_v$  in der s-Ebene und Prüfung, ob Phasenbedingung erfüllt (Suchverfahren, realisiert in CAE-Tools)
- Wenn  $s_v$  ein Punkt der WOK ist: Skalierung mittels der Betragsbedingung

## 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

### 5.5.5 Konstruktionsregeln (1)

#### Konstruktionsregeln (bzw. geometrische Eigenschaften) der WOK:

- R1 Die  $n$  Äste der WOK beginnen für  $k = 0$  in den Polen des offenen Kreises. Sie enden für  $k = +\infty$  in den Nullstellen des offenen Kreises, wobei eine  $(n - m)$ -fache Nullstelle von  $F_o(s)$  im Unendlichen liegt. Es streben also  $(n - m)$  Äste der WOK ins Unendliche.
- R2 Die WOK verläuft symmetrisch zur reellen Achse der  $s$ -Ebene.
- R3 Ein Punkt der reellen Achse gehört genau dann zur WOK, wenn rechts von ihm auf der reellen Achse eine ungerade Anzahl von reellen Polen und Nullstellen gelegen ist. Jeder Pol und jede Nullstelle wird dabei der jew. Vielfachheit entsprechend gezählt.
- R4 Die Asymptoten der ins Unendliche strebenden Äste der WOK schneiden sich alle in einem Punkt der reellen Achse, dem Wurzelschwerpunkt. Seine Abszisse ist

$$\delta_w = \frac{\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re}\{p_\nu\} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}\{n_\mu\}}{n - m}.$$

## 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

### 5.5.5 Konstruktionsregeln (2)

#### Konstruktionsregeln (bzw. geometrische Eigenschaften) der WOK: (2)

R5 Die Anstiegswinkel der Asymptoten der WOK sind

$$\varphi_i = (2i + 1) \frac{\pi}{n - m}, \quad i = 0, \dots, n - m - 1.$$

R6 Die von den Nullstellen und Polen des offenen Kreises verschiedenen Verzweigungspunkte der WOK erhält man aus der Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - n_{\mu}} - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - p_{\nu}} = 0.$$

R7 Schneiden sich in einem von den Nullstellen und Polen des offenen Kreises verschiedenen Verzweigungspunkt der WOK  $r$  Äste, so ist der Betrag des Winkels zwischen benachbarten Kurvenstücken

$$\Delta\psi = \frac{\pi}{r}.$$

# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.5 Konstruktionsregeln (3)

### Konstruktionsregeln (bzw. geometrische Eigenschaften) der WOK: (3)

R8 Ist  $s_\rho$  ein Pol oder eine Nullstelle des offenen Kreises mit der Ordnung  $r_\rho$ , so sind die Neigungswinkel der  $r_\rho$  WOK-Äste mit der reellen Achse, die dort beginnen oder enden:

$$\varphi_{\rho i} = -\frac{1}{\varepsilon_\rho r_\rho} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ s_\lambda \neq s_\rho}}^{m+n} \varepsilon_\lambda \angle(s_\rho - s_\lambda) + (2i + 1) \frac{\pi}{\varepsilon_\rho r_\rho}, \quad i = 0, \dots, r_\rho - 1$$

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} +1, & \text{falls } s_\lambda \text{ eine Nullstelle } n_\mu \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } s_\lambda \text{ eine Polstelle } p_\nu \text{ ist} \end{cases}.$$

R9 Die Schnittpunkte der WOK mit der imaginären Achse und die zu ihnen gehörigen Parameterwerte  $k$  erhält man aus der Gleichung

$$kP_o(j\omega) + Q_o(j\omega) = 0$$

durch Auflösen nach  $\omega$  und  $k$ .

⇒ für die Stabilitätsprüfung wichtig

# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.6 Anwendung des Verfahrens

Der Regelkreis ist stabilisierbar, wenn es einen Verstärkungsfaktor  $k$  gibt, bei dem alle Pole des geschlossenen Kreises links liegen.

### Anmerkungen

- Durch die Lage der Pole kann auch auf dynamisches Verhalten geschlossen werden
- schnelle Auswahl des Reglertyps möglich
- Einsatz auch möglich bei instabilen und allpasshaltigen Strecken
- Nachteile:
  - praktisch nicht anwendbar für Strecken mit Totzeit
  - Strecke muss analytisch vorliegen

Problem: Analytische Wurzelermittlung für komplexe Systeme kaum möglich

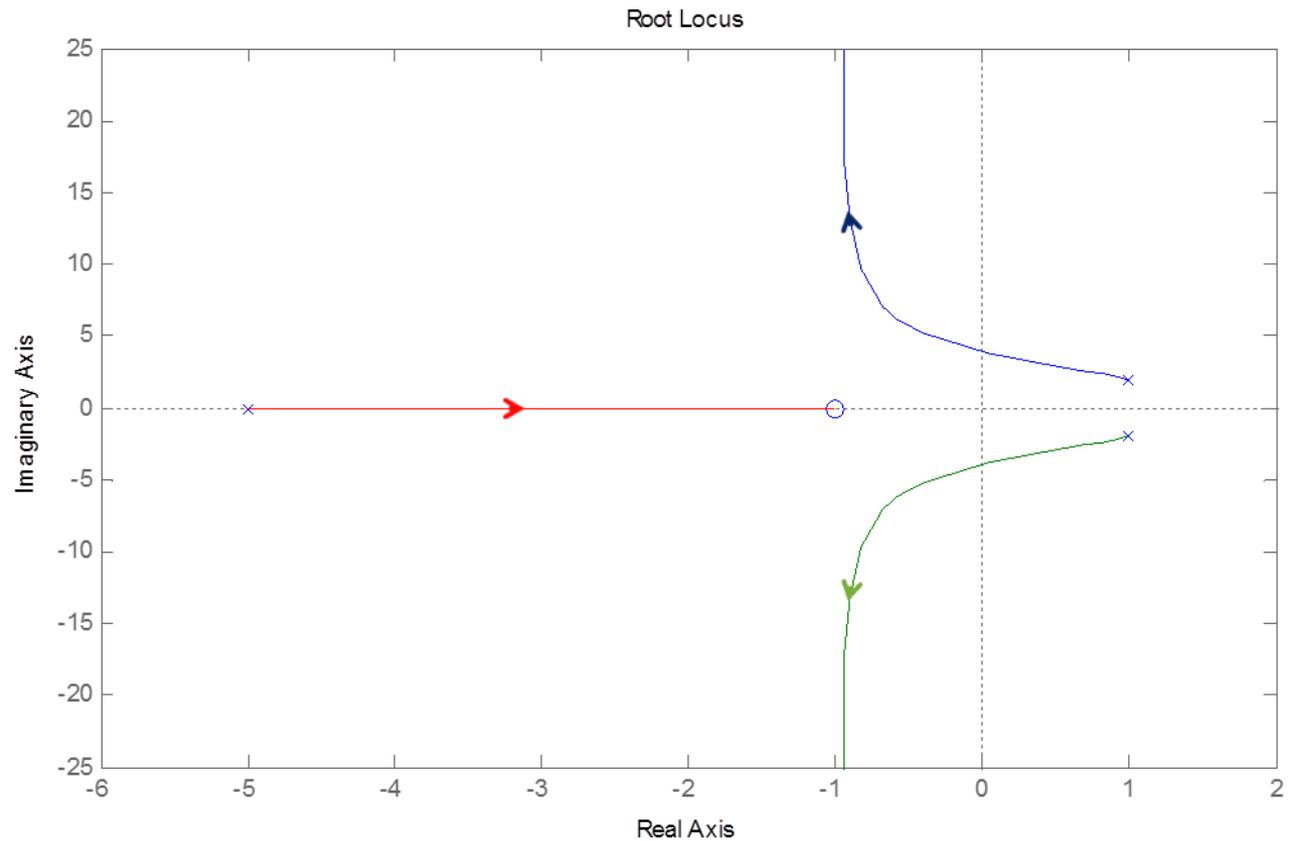
- Lösung:
- numerisch mittels Rechner (verbreitet)
  - halbanalytisches Verfahren zur (näherungsweise) Bestimmung der WOK anhand von **Konstruktionsregeln**, die die wesentlichen geometrischen Eigenschaften zusammenfassen
    - ⇒ schnelle Einsicht in die Systemdynamik
    - Interpretation numerischer Ergebnisse möglich

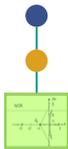
# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.7 Beispiel

$$F_o(s) = \frac{s+1}{(s+5)(s^2-2s+5)}$$

Numerische Lösung mit Matlab:





## 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

### 5.5.8 Entwurfsstrategie

#### Entwurfsstrategie:

1. Prüfung anhand der WOK, ob der Regelkreis mit einem P-Regler stabilisierbar ist
2. Ggf. Wahl eines besser geeigneten Reglertyps (abhängig vom Streckentyp)  
Wahl der Zeitkonstante gemäß allgemeiner Einstellregeln
3. Stabilitätsprüfung mittels der WOK
4. Quantitative Regelkreisspezifikation leicht erfüllbar, falls der geschlossene Kreis durch ein dominantes Polpaar beschreibbar ist (Reglerparametrierung)
5. Überprüfung des Zeitverhaltens durch Simulation
6. Bei Bedarf Iteration mit Schritt 2

## 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

### 5.5.9 Beispiel (1)

Beispiel:

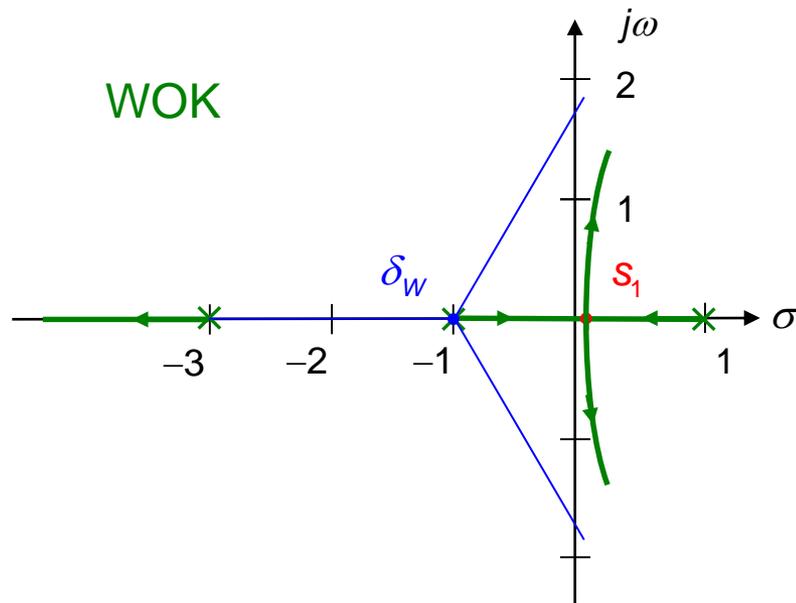
Gegeben: 
$$G_S(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$

- Gesucht:
- Ist der Regelkreis mit einem  $P$ -Regler stabilisierbar?
  - Regler derart, dass das geregelte System stabil ist und eine Dämpfung von  $d = 1/\sqrt{2}$  aufweist.

# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

## 5.5.9 Beispiel (2)

Lösung: a) Konstruktion der WOK (vgl. Konstruktionsregeln aus 5.2.3):



R1  $\implies$  Pole:  $p_1 = 1, p_2 = -1, p_3 = -3$

R3  $\implies$  WOK auf reeller Achse

R4  $\implies$  Wurzelschwerpunkt als Schnittpunkt der Asymptoten:  $\delta_w = -1$

R5  $\implies$  Asymptotenwinkel:  $\varphi_i = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

R6  $\implies$  Verzweigungspunkt:  $s_1 = 0.15$

Ergebnis: RK mit  $P$ -Regler nicht stabilisierbar, da stets instabile Pole vorliegen!

# 5.5 Wurzelortskurvenverfahren

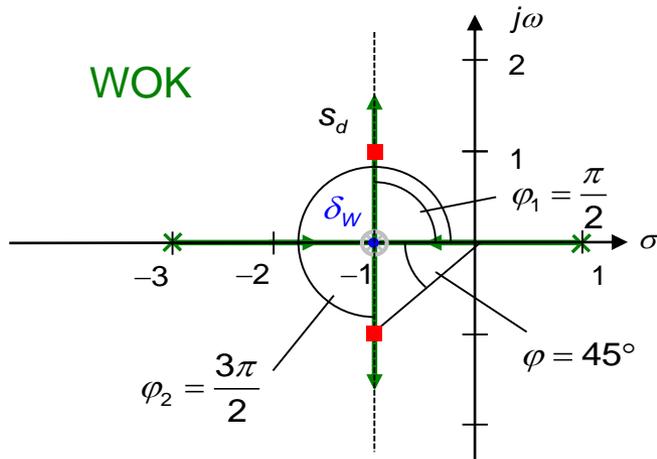
## 5.5.9 Beispiel (3)

Lösung:

b) stabilisierender Regler: vom PD-Typ:  $G_R(s) = K_R(1 + T_V s)$

$$\implies F_O(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_R(1 + T_V s)}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$

Wahl:  $T_V = 1$  (Kürzen der größten Streckenzeitkonstanten)



R1  $\implies$  Pole:  $p_1 = 1, p_3 = -3$

R3  $\implies$  WOK auf reeller Achse

R4  $\implies$  Wurzelschwerpunkt als Schnittpunkt der Asymptoten:  $\delta_W = -1$

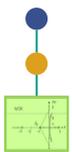
R5  $\implies$  Asymptotenwinkel:  $\varphi_i = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

R6  $\implies$  Verzweigungspunkt:  $s_1 = \delta_W$

Forderung:  $d = 1/\sqrt{2}$  ( $PT_2$ -Glied mit  $\varphi = 45^\circ$ , Pole:  $-1 \pm j$ )

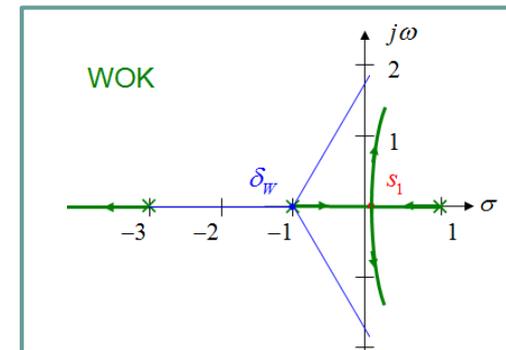
$$\implies K_R = k(s_d) = |s_d - 1||s_d + 3| = |-1 + j - 1||-1 + j + 3| = 5$$

Ergebnis: RK stabil mit gewünschter Dämpfung mit PD-Regler  $G_R(s) = 5(1 + s)$



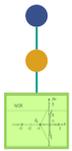
## 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
- 6. Parameteroptimierung**
7. Vermaschung und Vorsteuerung



## 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



## Übersicht

### Entwurfsverfahren:

#### 1. Ohne explizites Gütekriterium

##### a) Direkte Verfahren

- Kompensation
- Polvorgabe

##### b) Indirekte Verfahren

- Frequenzkennlinien
- Wurzelortskurve

##### c) Heuristische Parameter-einstellungen

- Ziegler-Nichols

#### 2. Mit explizitem Gütekriterium

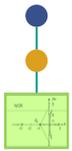
##### a) Parameteroptimierung, z.B.

- Betragsoptimum
- Min. Quadrat. Regelfläche

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt \rightarrow Min$$

##### b) Strukturoptimierung, z.B.

- Riccati Regelung



## 5.6 Parameteroptimierung

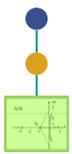
### 5.6.1 Betragsoptimum

**Annahme:**

- verzögerndes System:  $G_S(s) = \frac{1}{a_0 + a_1s + \dots} = \frac{1}{A(s)}$
- Reglertyp: PI oder PID  $G_R(s) = \frac{r_0 + r_1s + r_2s^2}{2s} = \frac{R(s)}{2s} \quad (r_0 \neq 0)$

**Geschlossener Kreis:**

$$G_w(j\omega) = \frac{G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)}{1 + G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)}} = \frac{1}{1 + \frac{2j\omega \cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}}$$



## 5.6 Parameteroptimierung

### 5.6.1 Betragsoptimum (2)

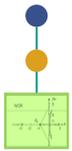
■ Ideal wäre:  $G_w(j\omega) \stackrel{!}{=} 1$  für alle  $\omega$

$$\Rightarrow |G_w(j\omega)| \stackrel{!}{=} 1 \text{ bzw. } |G_w(j\omega)|^2 = G_w(j\omega) \cdot G_w(-j\omega) = 1$$

$$|G_w(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + 4 \frac{\omega^2 A(j\omega) \cdot A(-j\omega) + \frac{1}{2} j\omega A(j\omega) \cdot R(-j\omega) - \frac{1}{2} j\omega A(-j\omega) \cdot R(j\omega)}{R(j\omega) \cdot R(-j\omega)}} \stackrel{!}{=} 1$$

■ Also:  $\omega^2 A(j\omega) \cdot A(-j\omega) + \frac{1}{2} j\omega A(j\omega) \cdot R(-j\omega) - \frac{1}{2} j\omega A(-j\omega) \cdot R(j\omega) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} & \downarrow A(j\omega) = a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots \\ & R(j\omega) = r_0 + r_1 j\omega + r_2 (j\omega)^2 \end{aligned}$$



## 5.6 Parameteroptimierung

### 5.6.1 Betragsoptimum (3)

- Lösung: Die Gleichung wird komponentenweise erfüllt:

$$(a_0^2 - r_0 a_1 + r_1 a_0) \omega^2 + (-2a_0 a_2 + a_1^2 + r_0 a_3 - r_1 a_2 + r_2 a_1) \omega^4 + \\ (2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2 - r_0 a_5 + r_1 a_4 - r_2 a_3) \omega^6 + \dots = P(\omega) \stackrel{!}{=} 0$$

- ➔ Die freien Parameter  $r_k$  sind so zu wählen, dass möglichst viele Koeffizienten von  $P(\omega)$  zu Null werden

# Tafelanschrieb 5.6 (1)

## Betragsoptimum



# 5.6 Parameteroptimierung

## 5.6.1 Betragsoptimum (5)

Strecke $G(s)$	Regler $R(s)$	Einstellregeln
$\frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots}$	$PI: \frac{r_0 + r_1s}{2s}$	$r_0 = a_0 \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_1a_2 - a_0a_3} ; r_1 = a_1 \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_1a_2 - a_0a_3} - a_0$
$\frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots}$	$PID: \frac{r_0 + r_1s + r_2s^2}{2s}$	$r_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_0^2 & -a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2a_0a_2 & -a_2 & a_1 \\ a_0^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_0^2 & 0 \\ a_3 & -a_1^2 + 2a_0a_2 & a_1 \\ a_5 & a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & a_0^2 \\ a_3 & -a_2 & -a_1^2 + 2a_0a_2 \\ a_5 & -a_4 & a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$

# 5.6 Parameteroptimierung

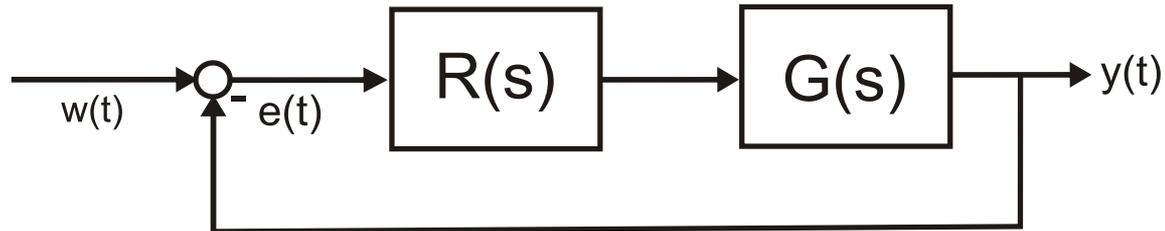
## 5.6.1 Betragsoptimum (6)

Strecke $G(s)$	Regler $R(s)$	Einstellregeln
$\frac{K_S}{\prod_{v=1}^n (1+T_v s)}$ <p>mit einer großen Zeitkonstanten <math>T_1</math> :</p> $T_1 \gg T_\Sigma = \sum_{v=2}^n T_v$	$PI: K_{PI} \frac{1+T_R s}{s}$	$K_{PI} = \frac{1}{2K_S T_\Sigma} ; T_R = T_1$
$\frac{K_S}{\prod_{v=1}^n (1+T_v s)}$ <p>mit zwei großen Zeitkonstanten <math>T_1, T_2</math> :</p>	$PI: K_{PI} \frac{1+T_R s}{s}$	$K_{PI} = \frac{1}{2K_S} \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{(T_1 + T_2) T_1 T_2}$ $T_R = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}$
$T_1, T_2 \gg T_\Sigma = \sum_{v=3}^n T_v$	$PID: K_{PID} \frac{(1+T_{R1} s)(1+T_{R2} s)}{s}$	$K_{PID} = \frac{1}{2K_S T_\Sigma} ; T_{R1} = T_1 ; T_{R2} = T_2$

# 5.6 Parameteroptimierung

## 5.6.2 Quadratische Regelfläche

Ausgangspunkt:



**Gesucht:** Regler  $R(s)$  , durch welchen das Gütemaß  $J$  minimiert wird

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

„Minimale Quadratische Regelfläche“

## 5.6 Parameteroptimierung

### 5.6.2 Quadratische Regelfläche (2)

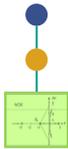
Annahme:

- $w(t) = \sigma(t)$
- $R(s)$ ,  $G(s)$  seien rationale Funktionen
- Für  $F_o(s) = R(s)G(s)$  gelte Zählergrad < Nennergrad

■ Somit gilt:

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s}$$
$$= \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + d_n s^n} = \frac{C(s)}{D(s)} \quad d_n \neq 0$$

- Die Koeffizienten  $c_i$  und  $d_i$  müssen nun so bestimmt werden, dass  $J$  minimal wird



## 5.6 Parameteroptimierung

### 5.6.2 Quadratische Regelfläche (3)

**Hier:** analytische Lösung möglich

→ Diese Integral kann mit Hilfe von Residuen ausgewertet werden

## 5.6 Parameteroptimierung

### 5.6.2 Quadratische Regelfläche (4)

Ergebnisse (bis n=4):

$$J_1 = \frac{c_0^2}{2d_0d_1}$$

$$J_2 = \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}$$

$$J_3 = \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}$$

$$J_4 = \frac{c_3^2(d_0d_1d_2 - d_0^2d_3) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0d_1d_4 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3d_4 + c_0^2(d_2d_3d_4 - d_1d_4^2)}{2d_0d_4(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_1^2d_4)}$$

Zum Schluss:  $J_i$  über alle  $c_i, d_i$  minimieren

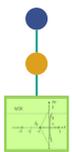
# Tafelanschrieb 5.6 (2)

## Minimale quadratische Regelfläche



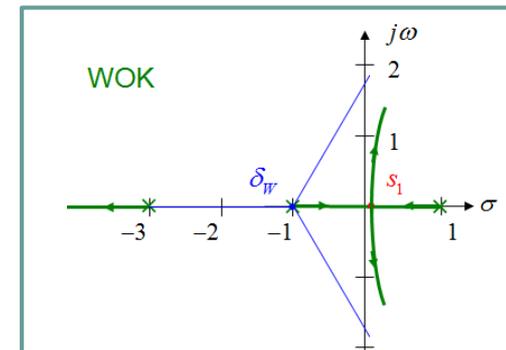






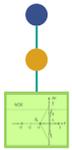
## 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. **Vermaschung und Vorsteuerung**



## 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

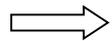
1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



## 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

Probleme der bislang betrachteten einschleifigen Regelkreise:

- Verzögerungen bzw. Totzeiten in der Strecke verhindern unter Umständen schnelles Ausregeln von Störungen und schnelles Folgen bei Führungsgrößenänderungen
- Stabilitätsforderung und Stellgrößenbeschränkung verbieten eine dafür erforderliche zu starke Erhöhung der Kreisverstärkung



Modifikation der Regelungsgrundstruktur durch Vermaschung und zusätzliche Rückführungen



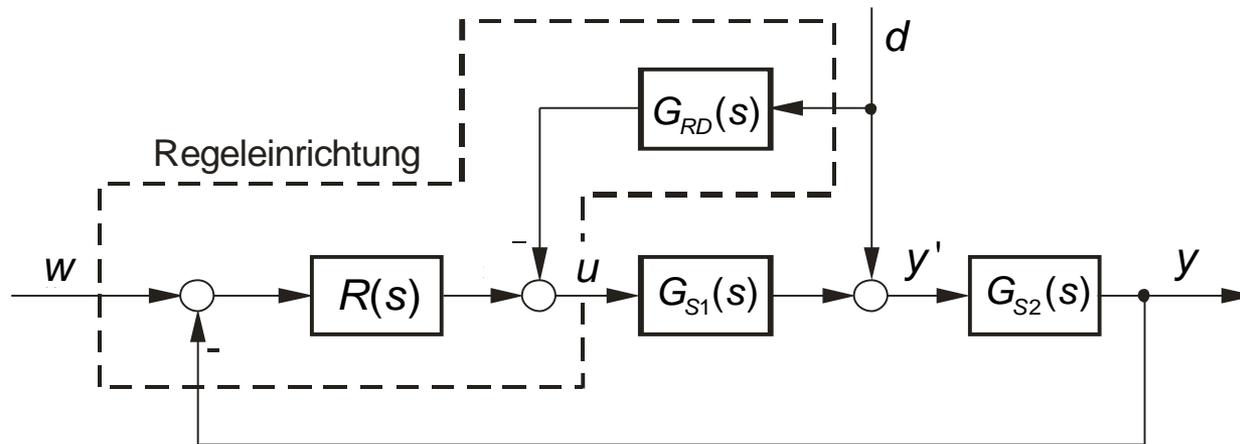
# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.1 Störgrößenaufschaltung

Prinzip: Kompensation der Störgröße  $d$  ohne Verwendung der Regelschleife durch geeignete Aufschaltung der Störgröße über  $G_{RD}(s)$

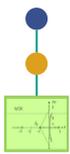
- Voraussetzungen:
- Angriffsort der Störgröße  $d$  an der Strecke bekannt
  - Störgröße  $d$  messbar

Struktur:



$$Y'(s) = U(s)G_{S1}(s) + D(s) - D(s)G_{RD}(s)G_{S1}(s) = U(s)G_{S1}(s) + D(s)\underbrace{(1 - G_{RD}(s)G_{S1}(s))}_{\stackrel{!}{=}0}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{RD}(s) = \frac{1}{G_{S1}(s)}}$$



## 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

### 5.7.1 Störgrößenaufschaltung (2)

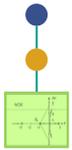
#### Eigenschaften der Störgrößenaufschaltung:

- Entlastung des Regelkreises von der Hauptstörgröße  $d$   
⇒ Vereinfachung von Reglerentwurf und gerätetechnischer Realisierung
- $G_{RD}(s)$  häufig nicht realisierbar  
⇒ zumindest **stationäre Kompensation** des Störgrößeneinflusses:

$$G_{RD}(s) = \frac{1}{G_{S1}(0)} = K_{RD} = \text{const}$$

- alternativ über  $G_{RD2}(s)$  auch Aufschaltung der Störgröße auf den Reglereingang möglich:

$$G_{RD2}(s) = \frac{1}{G_{R1}(s) \cdot G_{S1}(s)}$$

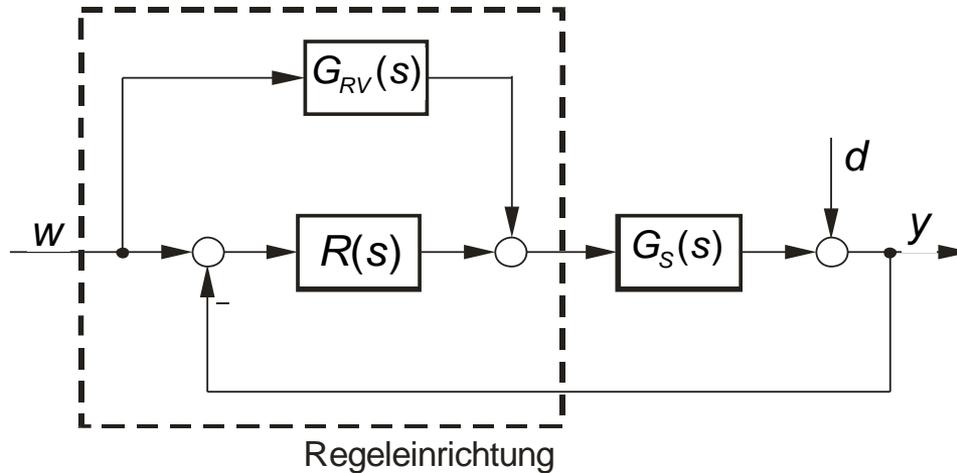


# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.2 Vorwärtssteuerung (feedforward control, Sollwertaufschaltung)

Prinzip: direkte Beeinflussung der Stellgröße durch die Führungsgröße  $w$  durch eine geeignete Aufschaltung über  $G_{RV}(s)$

Struktur:

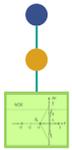


$G_{RV}(s)$ : Vorsteuerung für Folgeverhalten  
 $R(s)$ : Regelung für Störverhalten

⇒ Weitgehend unabhängige Einstellung von Führungs- und Stör-Verhalten:

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{R(s)G_S(s)}{1 + R(s)G_S(s)} + \frac{G_{RV}(s)G_S(s)}{1 + R(s)G_S(s)} = \frac{G_S(s)(R(s) + G_{RV}(s))}{1 + R(s)G_S(s)}$$

$$G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + R(s)G_S(s)}$$



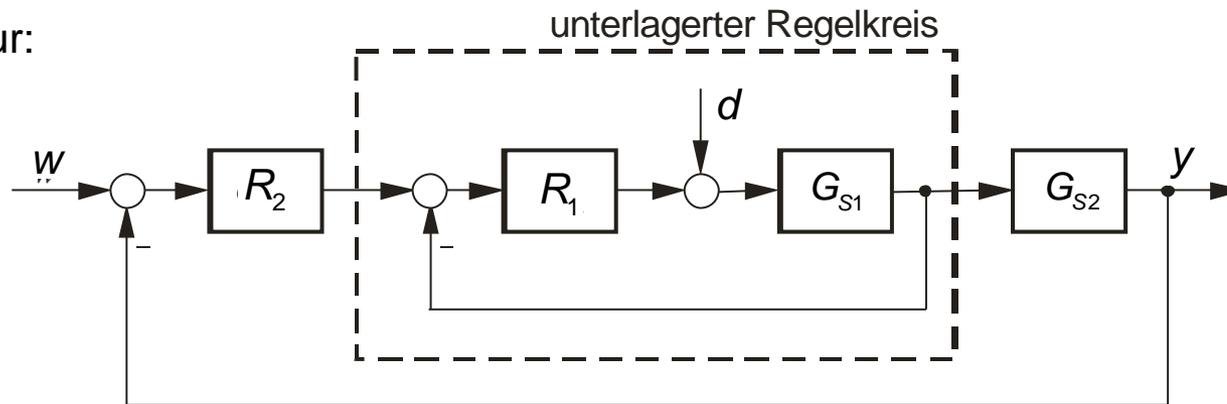
## 5.7 Erweiterungen: Vermaschung und Vorsteuerung

### 5.7.3 Kaskadenregelung

Prinzip: Vorabregelung gewisser (Hilfs-)Regelgrößen in unterlagerten Regelkreisen (hier Kreis mit Regler  $R_1(s)$ ), bevor sie in den überlagerten (äußeren) Kreisen (hier Kreis mit Regler  $R_2(s)$ ) wirksam sind.

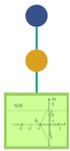
⇒ Reglerkaskade  $R_1(s), R_2(s)$

Struktur:



Vorgehensweise: Mehrmalige Anwendung der Reihenstabilisierung

1. Bestimmung von  $R_1(s)$
2. Zusammenfassung des inneren Kreises zu einem Block
3. Entwurf von  $R_2(s)$  mit der Serienschaltung von unterlagertem Kreis und  $G_{S2}(s)$  als neue „Strecke“



## 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

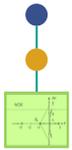
### 5.7.3 Kaskadenregelung (2)

#### Eigenschaften der Kaskadenregelung:

Verbreitete Anwendung in der Antriebstechnik  
(z.B. Positionsregelung von Zügen, Lageregelung von Antennen (s. Beispiel))

#### Vorteile der Kaskadenstruktur:

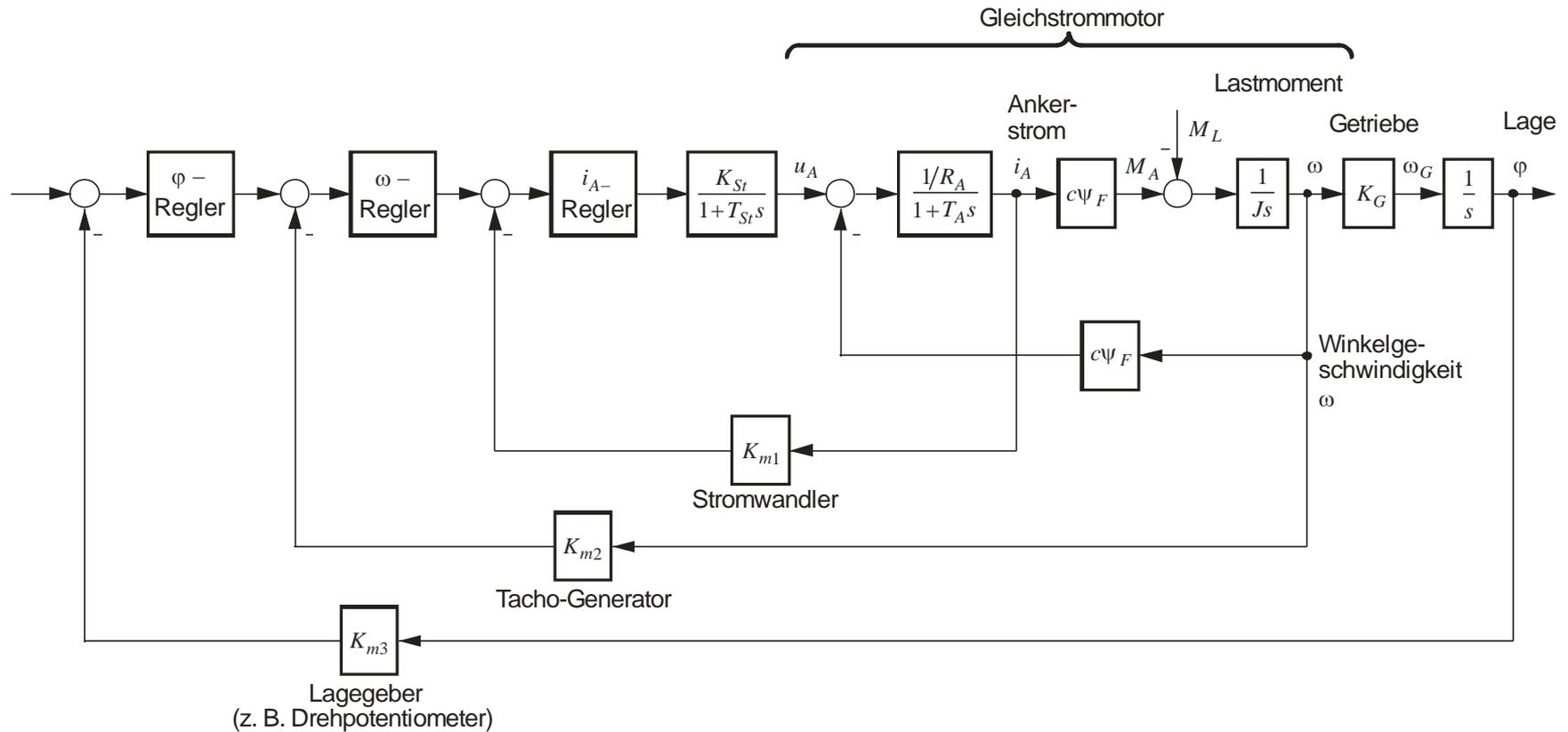
- die einzelnen Regelkreise können nacheinander (von innen nach außen) entworfen, getestet und in Betrieb genommen werden
- Dimensionierung der Einzelregler einfach, wenn innere Kreise schneller als die äußeren (innere Kreise dann als  $P$ - oder  $PT_1$ -Glieder zu behandeln)

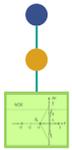


# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.4 Beispiel (1)

Beispiel: Kaskaden-Lageregelung mit einem Gleichstrommotor





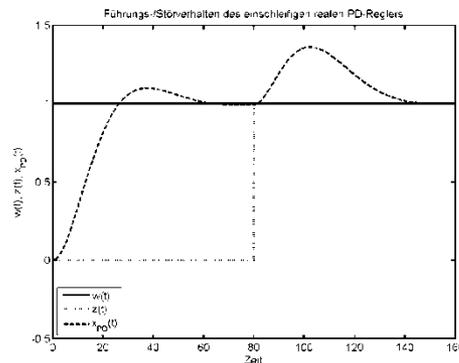
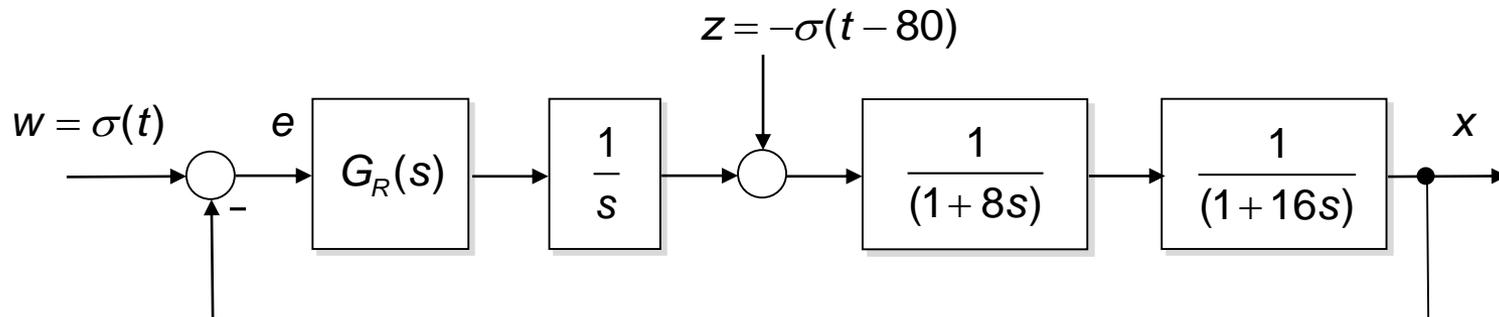
# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.4 Beispiel (2)

### PC-Demo 6: Kaskadenregelung

a) Einschleifiger realer PD-Regler mit Dämpfung  
Entwurf einer Kaskadenregelung

$$d = 0.6: G_R(s) = 0.0868 \frac{1 + 16s}{1 + 0.1s}$$

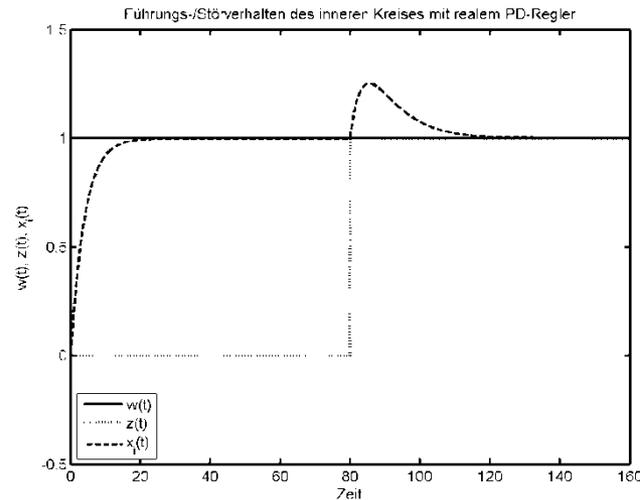
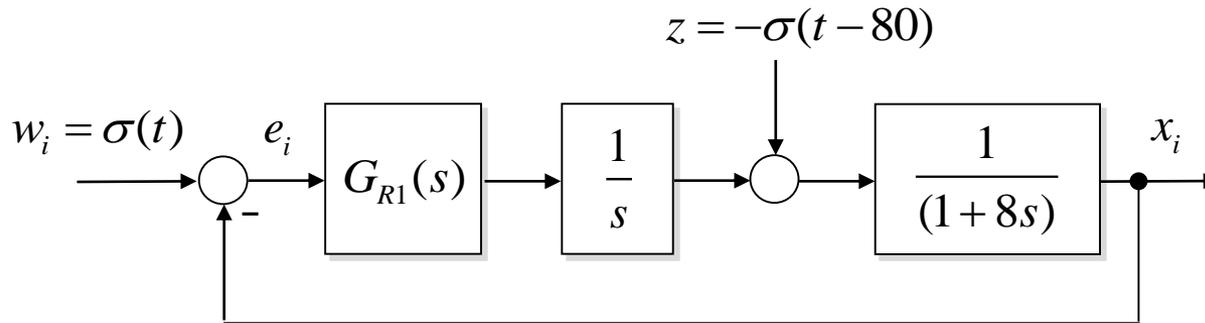


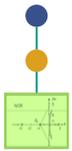


# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.4 Beispiel (3)

b) Innerer Kreis:  $PT_1$ -Verhalten durch realen  $PD$ -Regler  $G_{R1}(s) = 0.25 \frac{1 + 8s}{1 + 0.1s}$

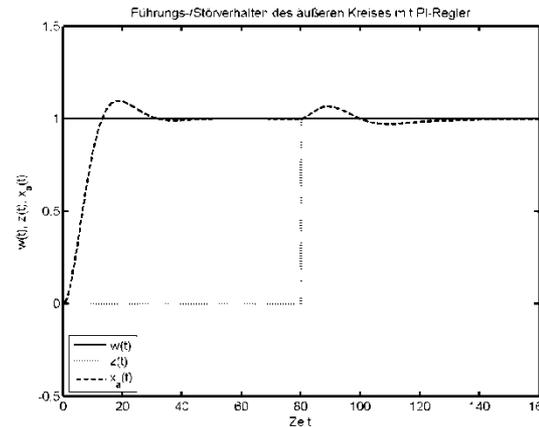
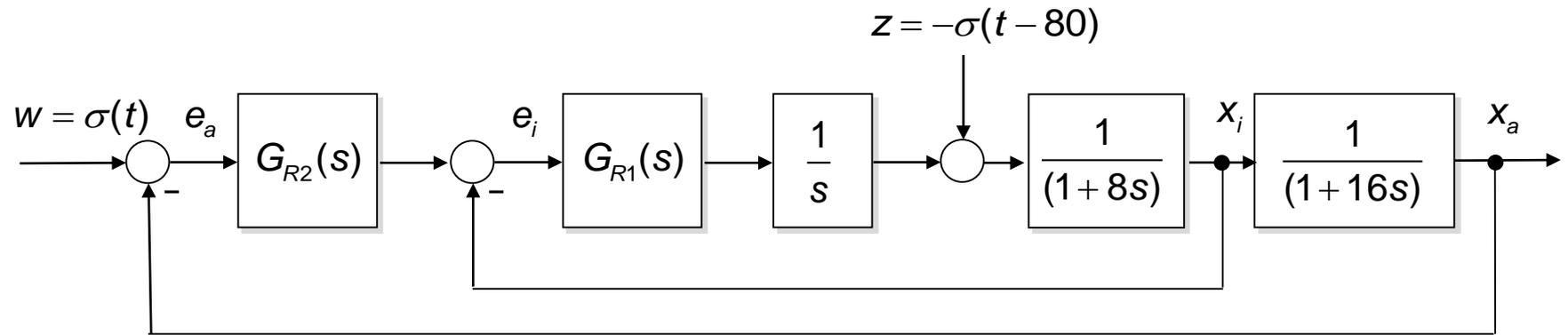


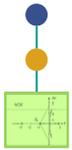


# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.4 Beispiel (4)

c) Äußerer Kreis: *PI*-Regler für Gesamtdämpfung  $d = 0.6$ :  $G_{R2}(s) = 0.1736 \frac{1+16s}{s}$

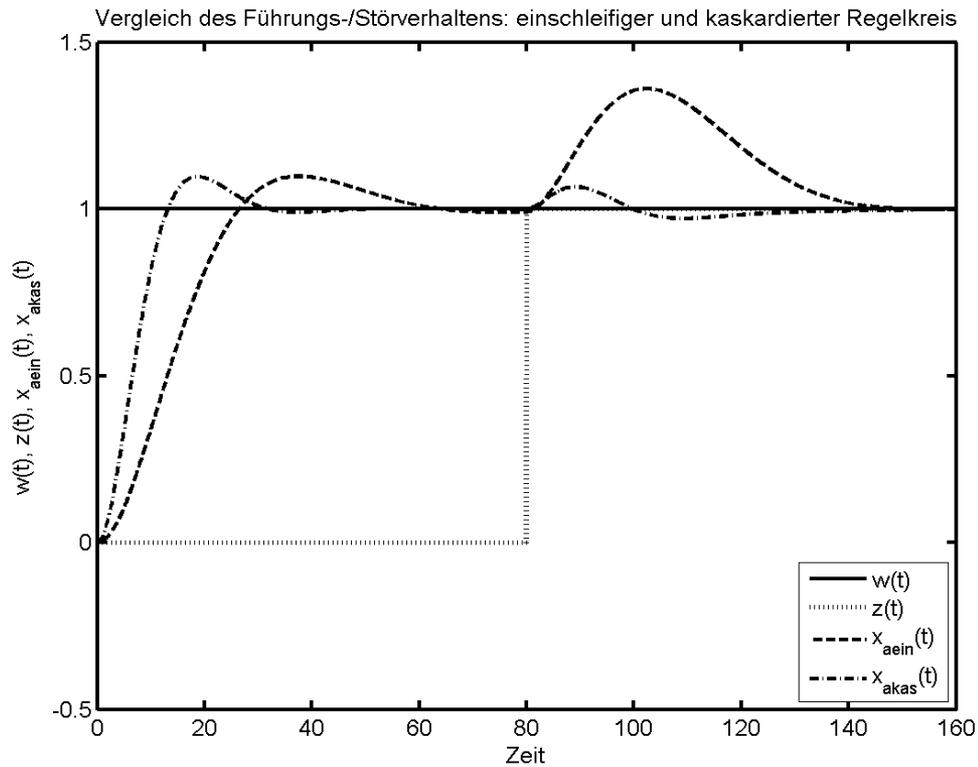


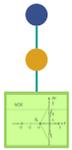


# 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

## 5.7.4 Beispiel (5)

d) Vergleich: einschleifiger Regelkreis - Kaskadenregelung





## 5.7 Vermaschung und Vorsteuerung

### 5.7.4 Beispiel (6)

**Film**