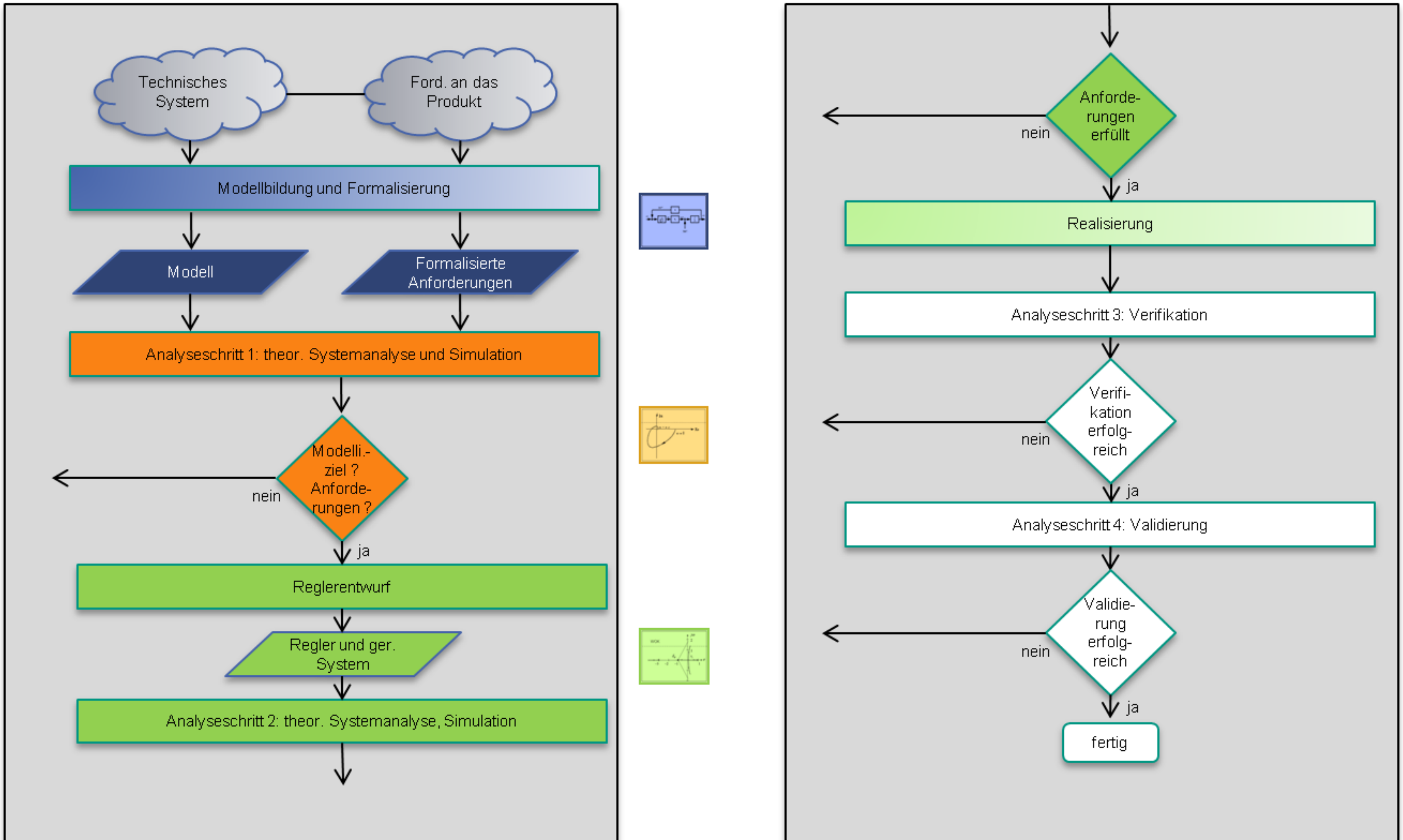
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
Vorlesung: Systemdynamik und Regelungstechnik
Kapitel 3

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann

Einordnung in den Gesamtentwurf
Übersicht



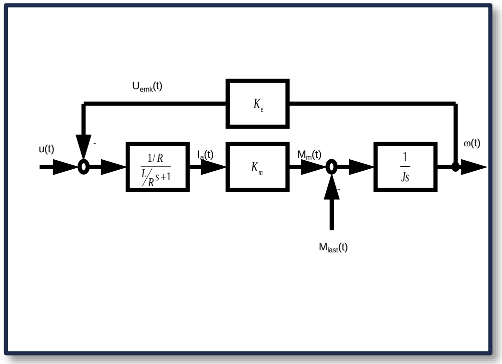
Übersicht
Vorlesungsinhalt

1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme

2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Aufbau digitaler Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise

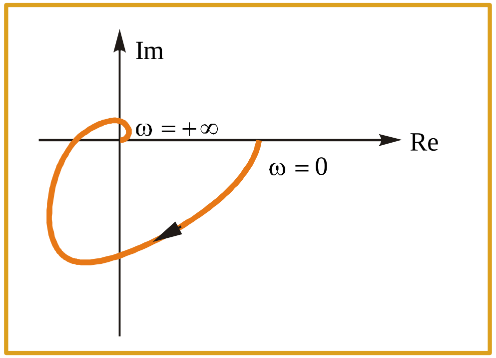


Übersicht

Vorlesungsinhalt (2)

3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



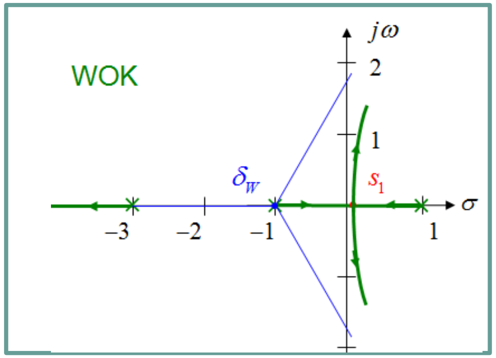
4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

Übersicht
Vorlesungsinhalt (3)

5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

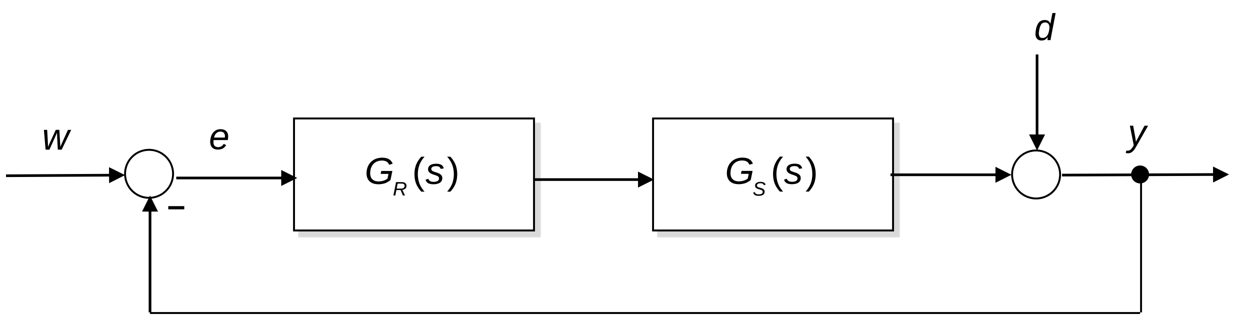
1. Forderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Entwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren
5. Entwurf mit dem Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren

3.1.1 Stationäres Verhalten



- Hier untersucht:

  Stationäres Verhalten der Regelabweichung $\lim_{t\to\infty} e(t)$ bei gegebenen Anregungssignalen

- Gegeben:

$$F_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_o}{s^q}\underbrace{\frac{1+b_1 s+\ldots+b_m s^m}{1+a_1 s+\ldots+a_{n-q}s^{n-q}}}_{Z(s)/N(s)} e^{-T_t s}$$

- Dann gilt:

$$\left.\frac{E(s)}{W(s)}\right|_{D(s)=0} = \frac{1}{1+F_o(s)} = -\left.\frac{E(s)}{D(s)}\right|_{W(s)=0}$$

3.1 Stationäres Verhalten und char. Größen
3.1.1 Stationäres Verhalten (2)

- Mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation folgt:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+\frac{K_o}{s^q}\underbrace{\frac{Z(s)}{N(s)}e^{-T_t s}}_{\to 1}} \cdot W(s) = \ldots = \lim_{s\to 0} \frac{s^{q+1}}{s^q + K_o} \cdot W(s)$$

- Für unterschiedliche Anregungen ergeben sich daraus folgende Endwerte $\lim_{t\to\infty} e(t)$:

Systemtyp $F_o(s)$ / Anregung $w(t)$	P $(q=0)$	I $(q=1)$	I^2 $(q=2)$
Sprung $w_0\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\circ \frac{w_0}{s}$		0	0
Rampe $w_1 t\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\circ \frac{w_1}{s^2}$	∞		0
Beschleunigungsfunktion $\frac{1}{2}w_2 t^2\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\circ \frac{w_2}{s^3}$	∞	∞	$\frac{1}{K_o}w_2$

3.1 Stationäres Verhalten und char. Größen
3.1.1 Stationäres Verhalten (3)

- Aus der Tabelle lassen sich folgende Richtlinien für ein befriedigendes stationäres Verhalten ableiten:
  - damit $e(t \to \infty) = 0$ bei Sprunganregung (in w oder in d)

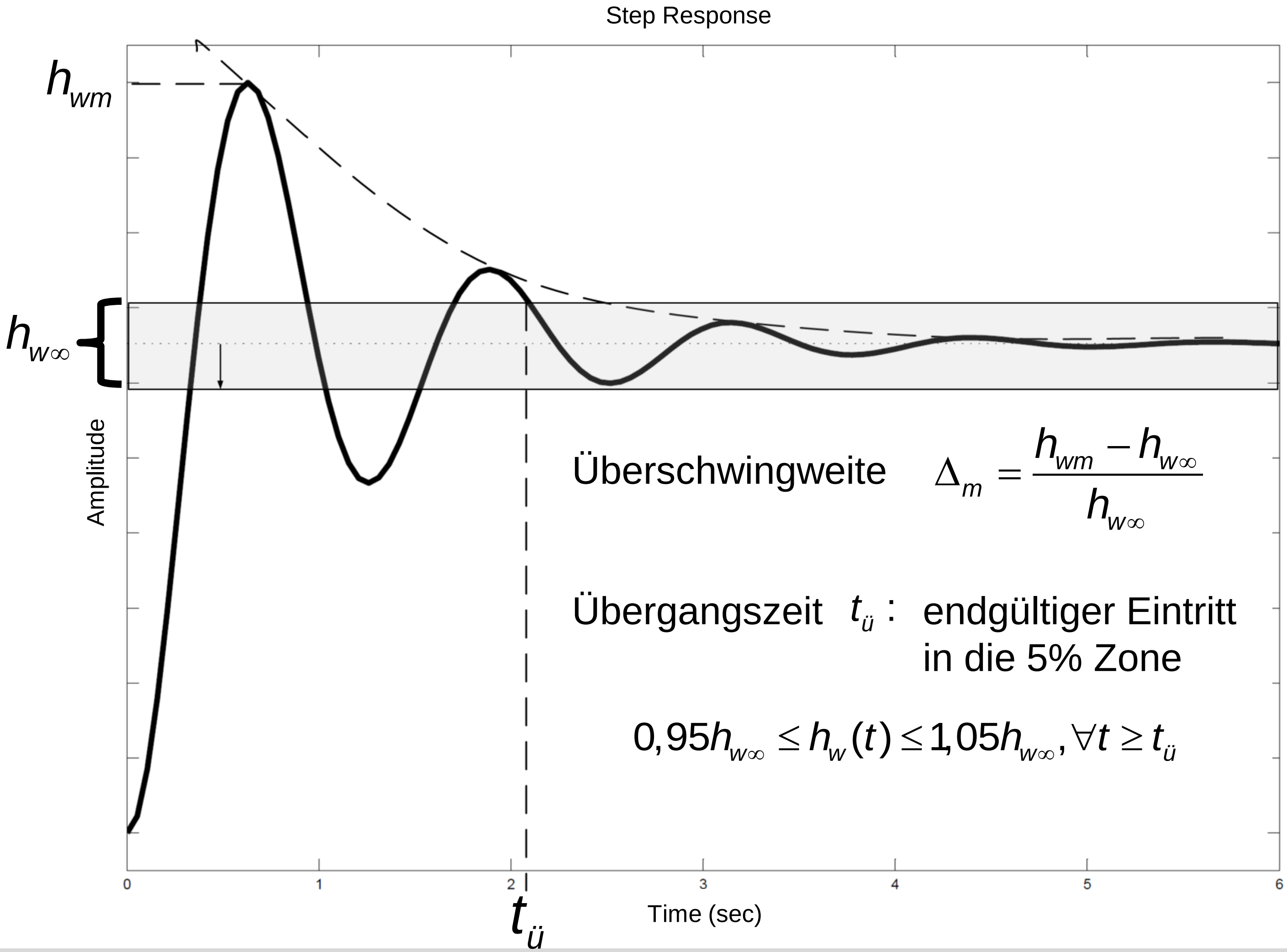
    $\Rightarrow$ **F_o mit I-Verhalten**
  - damit $e(t \to \infty)$ einen endlichen Wert annimmt

    $\Rightarrow$ **K_o so groß wie möglich**

- Aber:
  - mehr als eine Integrationsstufe ist aus Stabilitätsgründen nicht sinnvoll
    $\Rightarrow$ Abschnitt Stabilität
  - auch K_O darf nicht zu groß werden, um die Stabilität nicht zu gefährden

- Für die Reglerauswahl ergeben sich in Abhängigkeit von der Regelstrecke folgende Reglerstrukturen für befriedigendes stationäres Verhalten:

> - P – Strecken $\Rightarrow$ **Regler mit I – Anteil**
> - I – Strecken $\Rightarrow$ **Regler ohne I – Anteil**



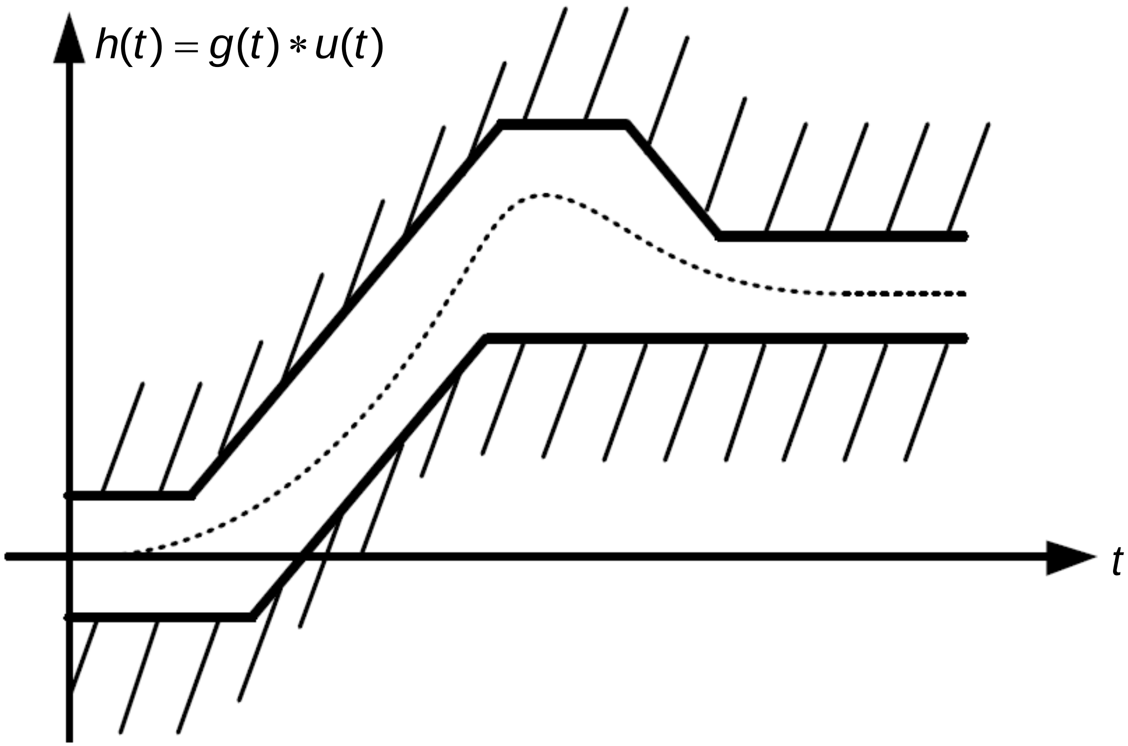
Überschwingweite $\Delta_m = \dfrac{h_{wm} - h_{w\infty}}{h_{w\infty}}$

Übergangszeit $t_ü$: endgültiger Eintritt in die 5% Zone

$$0{,}95 h_{w\infty} \le h_w(t) \le 1{,}05 h_{w\infty}, \forall t \ge t_ü$$

3.1 Stationäres Verhalten und char. Größen
3.1.3 Spezifikation von Regelkreisen im Zeitbereich

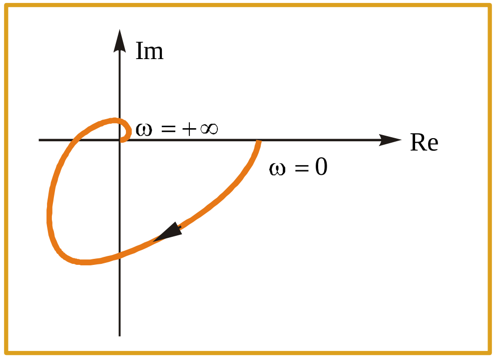
Anforderungen an den Regelkreis werden häufig durch das Verhalten des Regelkreis als Antwort auf bestimmte Testfunktionen definiert. Es wird definiert in welchen Bereichen die Regelkreisantwort zu liegen hat.



Übersicht
Vorlesungsinhalt

3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

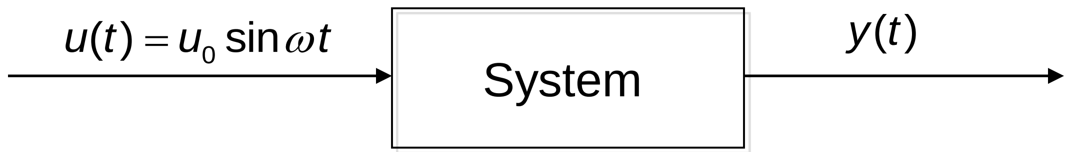
1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. **Frequenzgang und Ortskurve**
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

- Sinusförmige Anregung eines stabilen linearen Systems:



- Zugehörige Differentialgleichung:

$$a_n \overset{(n)}{y}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \;=\; b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \ldots + b_m \overset{(m)}{u}(t)$$

- Allgemeine Lösung:

$$y(t) \;=\; \mathrm{y}_{\mathrm{hom}}(t) + y_{part}(t)$$

- Speziell im eingeschwungenen Zustand gilt dann:

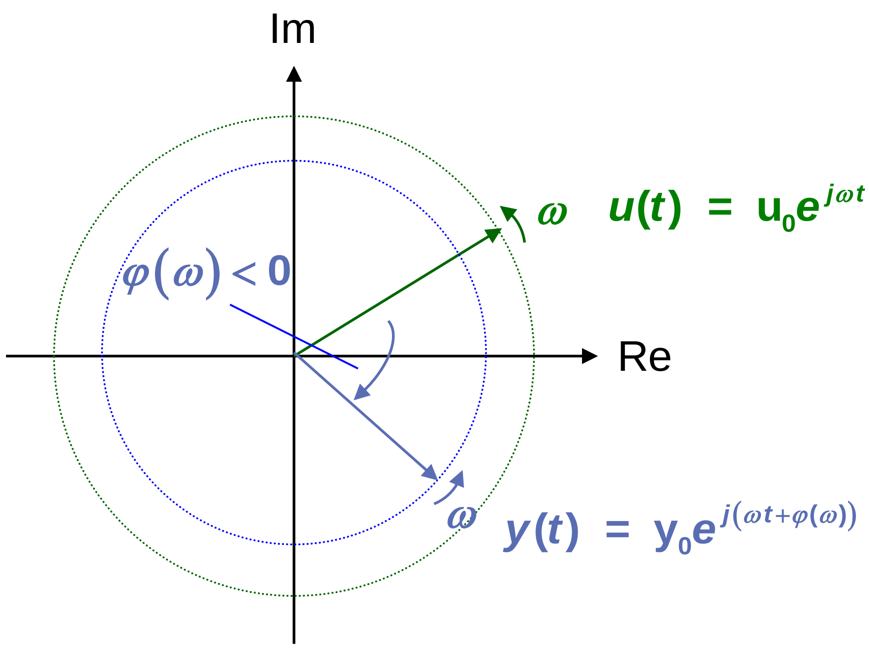
$$y(t) \;=\; \mathrm{y}_{part}(t) \;=\; A \sin[\omega t + \varphi] \qquad (*)$$

dabei: Bestimmung der Konstante A und φ durch Einsetzen von $(*)$ in die Differentialgleichung möglich, jedoch unhandlich

3.2 Frequenzgang und Ortskurve
3.2.1 Frequenzgang (2)

- Einfacherer Weg: Ersetzen der reellen harmonischen Funktion $\sin\omega t$ durch den **komplexen Drehzeiger**:

$$\boxed{u(t) \;:=\; u_0(\cos\omega t + j\sin\omega t) \;=\; u_0 e^{j\omega t}}$$



- Dabei: Übergang vom komplexen Drehzeiger auf die reelle Zeitfunktionen jederzeit durch Betrachtung nur des Realteils möglich
- Von praktischem Interesse: Verhältnis der komplexen Drehzeiger

Phasengang

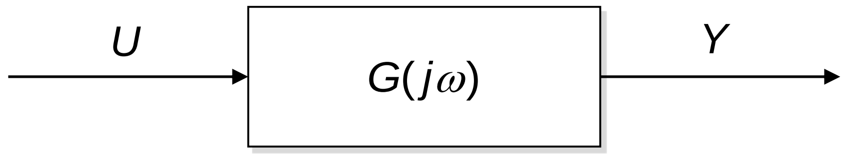
$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0(\omega)\cancel{e^{j\omega t}}e^{j\varphi(\omega)}}{u_0\cancel{e^{j\omega t}}} = \underbrace{\frac{y_0(\omega)}{u_0}}_{A(\omega)\,:\ \text{Amplitudengang}} e^{j\varphi(\omega)} =: G(j\omega) \text{ : Frequenzgangsfunktion}$$

⟹ Komplexer Frequenzgang $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)} = \frac{y(t)}{u(t)}$$

also: der komplexe Frequenzgang $G(j\omega)$ entspricht der Übertragungsfunktion $G(s)$ auf der imaginären Achse ($s = j\omega$)

- Systemantwort bei harmonischer Anregung im stationären (eingeschwungenen) Zustand:

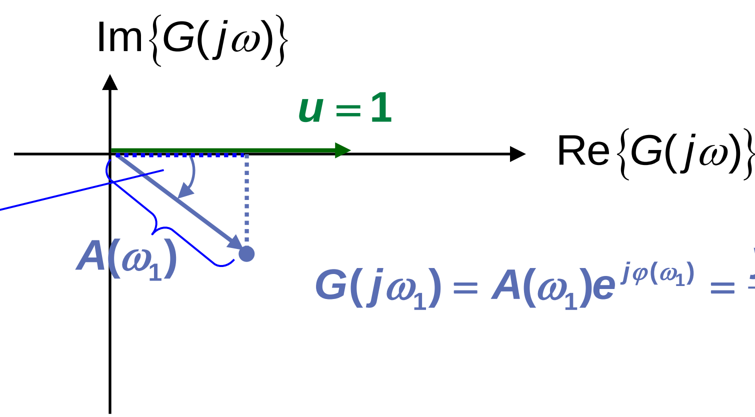


$$\Longrightarrow \quad Y = G(j\omega)U$$

- Für die jeweilige betrachtete Frequenz gilt also:

  [Zeiger der Ausgangsgröße] = [Zeiger der Eingangsgröße] · [Frequenzgang]

- Beispiel:



$$G(j\omega_1) = A(\omega_1)e^{j\varphi(\omega_1)} = \frac{y_0(\omega_1)}{u_0}e^{j\varphi(\omega_1)}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega_1)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega_1)\}}$$

3.2 Frequenzgang und Ortskurve
3.2.2 Frequenzgangsortskurve (2)

Def.: **Frequenzgangsortskurve**

Die Frequenzgangsortskurve (Ortskurve) ist die Kurve in der komplexen $G(j\omega)$-Ebene, die durch Verbindung aller Pfeilspitzen $G(j\omega)$ für $0 \leq \omega < \infty$ entsteht.

- Beispiele:

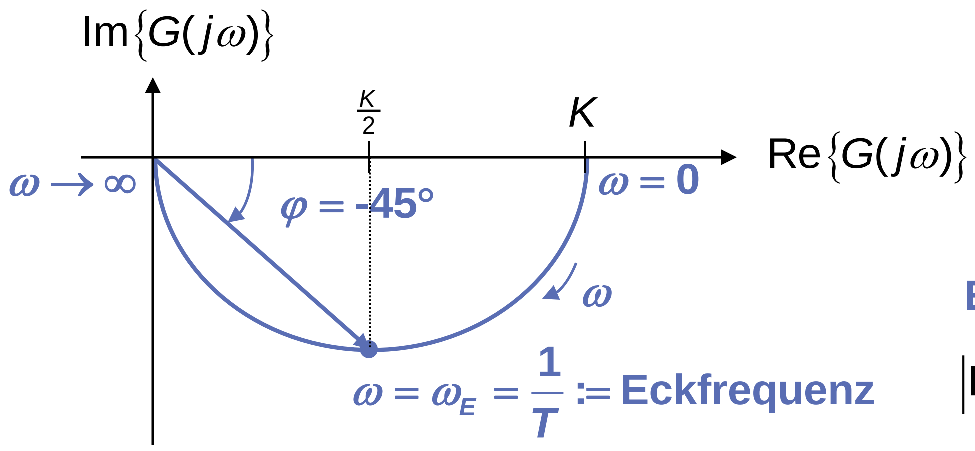
1. PT_1-Glied:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} \quad \Rightarrow \quad \text{Frequenzgang:} \quad G(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\omega} = \frac{Y}{U} = \frac{K(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2}$$

wegen $\mathrm{Re}\{G\} = \dfrac{K}{1+(\omega T)^2}$ und $\mathrm{Im}\{G\} = -\dfrac{K\omega T}{1+(\omega T)^2} = -\mathrm{Re}\{G\} \cdot \omega T$ gilt:

$$\underbrace{\left[\mathrm{Re}\{G\} - \frac{K}{2}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{G\}\right]^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2}_{\text{Kreis bzw. Halbkreis für } \omega \geq 0}$$

1. PT_1-Glied (2):



Eckfrequenz, gegeben durch:

$$\left|\mathrm{Re}\{G(j\omega_E)\}\right| = \left|\mathrm{Im}\{G(j\omega_E)\}\right|$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega_E) = -\arctan 1 = -45°$$

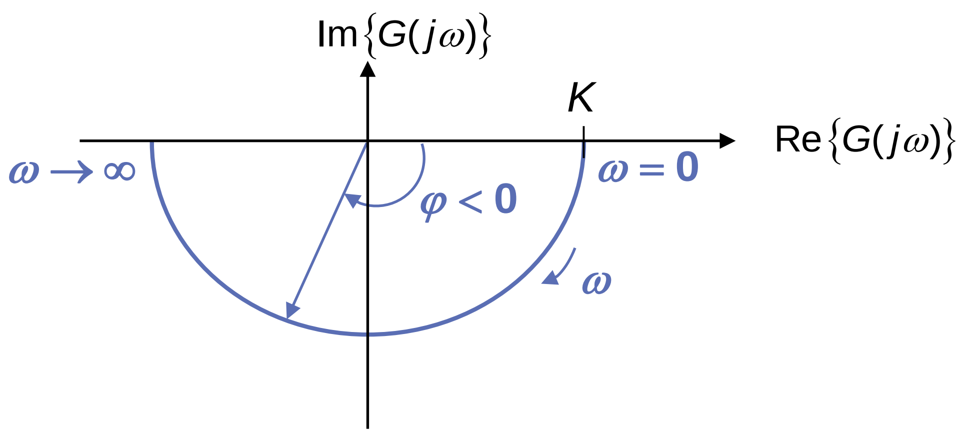
$$\Rightarrow \left|G(j\omega_E)\right| = A(\omega_E) = \frac{K}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot K$$

- Schlussfolgerungen:
  - φ wächst mit ω von 0°...90° $\Rightarrow$ **Verzögerungsverhalten**
  - A nimmt für $\omega > \omega_E = \frac{1}{T}$ stark ab $\Rightarrow$ **Tiefpassverhalten**

2. Übertragungsfunktion mit spiegelsymmetrischer Nullstelle (Allpass 1. Ordnung):

$$G(s) = \frac{K\left(1 - Ts\right)}{1 + Ts} \quad \Rightarrow \quad \text{Frequenzgang:} \quad G(j\omega) = K\,\frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

es gilt: $\left|G(j\omega)\right| = K,\ \varphi(\omega) = -2\arctan\left(\omega T\right)$

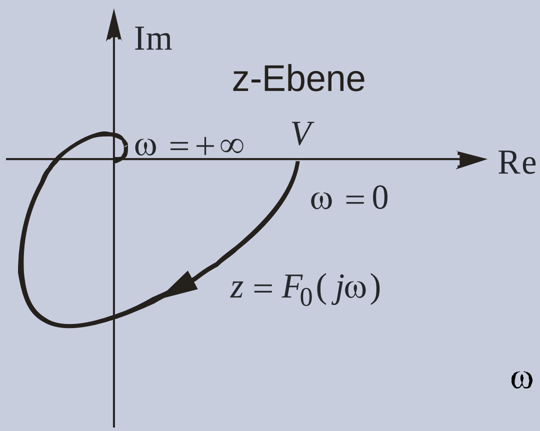


- Schlussfolgerung:
  - $\left|G(j\omega)\right| = A(\omega) = \text{const}$

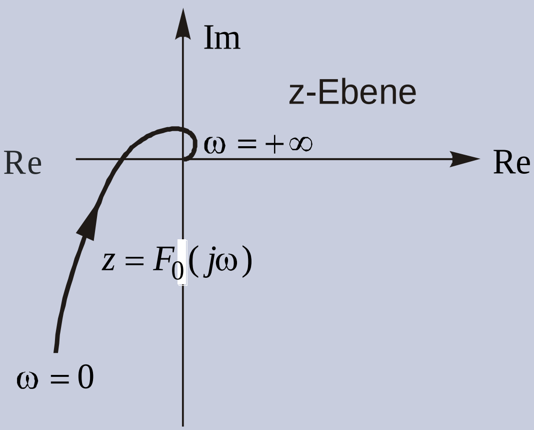
3. Verzögerungssystem 4. Ordnung

$$G(j\omega) = \frac{V}{(j\omega)^q} \cdot \frac{1}{1 + a_1(j\omega) + \cdots + a_4(j\omega)^{4-q}}$$

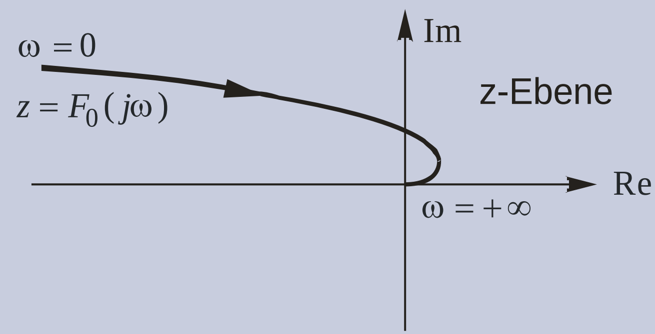
$q = 0$ (P-Verhalten):



$q = 1$ (I-Verhalten):



$q = 2$ (Doppel-I-Verhalten):



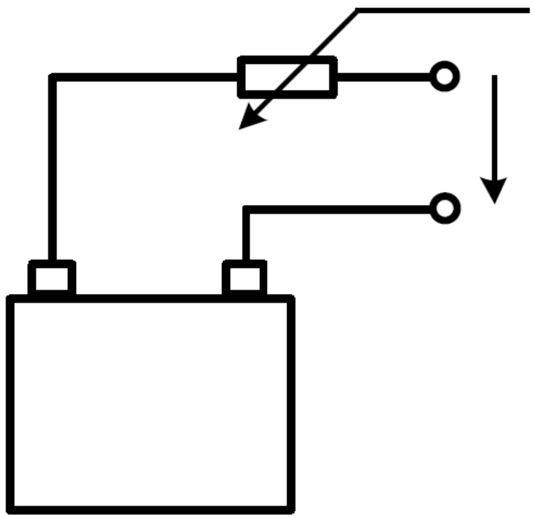
3.2.2 Frequenzgangsortskurve (6)

Bei sinkenden Temperaturen ist rasch Schluss mit den Reichweitenversprechen der Elektroautohersteller: Bis zu knapp 50 Prozent ihres Aktionsradius büßen E-Fahrzeuge in der Kälte ein.

Winterliche Temperaturen setzen Elektroautos mächtig zu. Nach einem ersten Wärme-Kälteprüfstand-Vergleichstest bei Extremtemperaturen der Zeitschrift „auto motor und sport" und des TÜV Süd haben kann sich die Reichweite um bis zu 47 Prozent verringern. Zwei Gründe werden dafür genannt: Zum einen wird das Elektrolyt (Substanz, die in einer Akkuzelle eines E-Autos für die Stromleitung zwischen Plus- und Minuspol sorgt) bei Kälte dickflüssiger und die elektrochemischen Prozesse laufen langsamer ab. Damit steigt der sogenannte Innenwiderstand der Lithium-Ionen-Batterie, die dann weniger Strom und damit weniger Leistung liefert. Zum anderen saugen auch elektrische Verbraucher im Winter besonders viel Strom. Beispielsweise, wenn eine elektrische Innenraumheizung volle Leistung bringt. Hinzu kommt ein erhöhter Strombedarf der Lichteinheiten.

Quelle: Fokus 14.01.2011

4. Impedanz einer Batterie



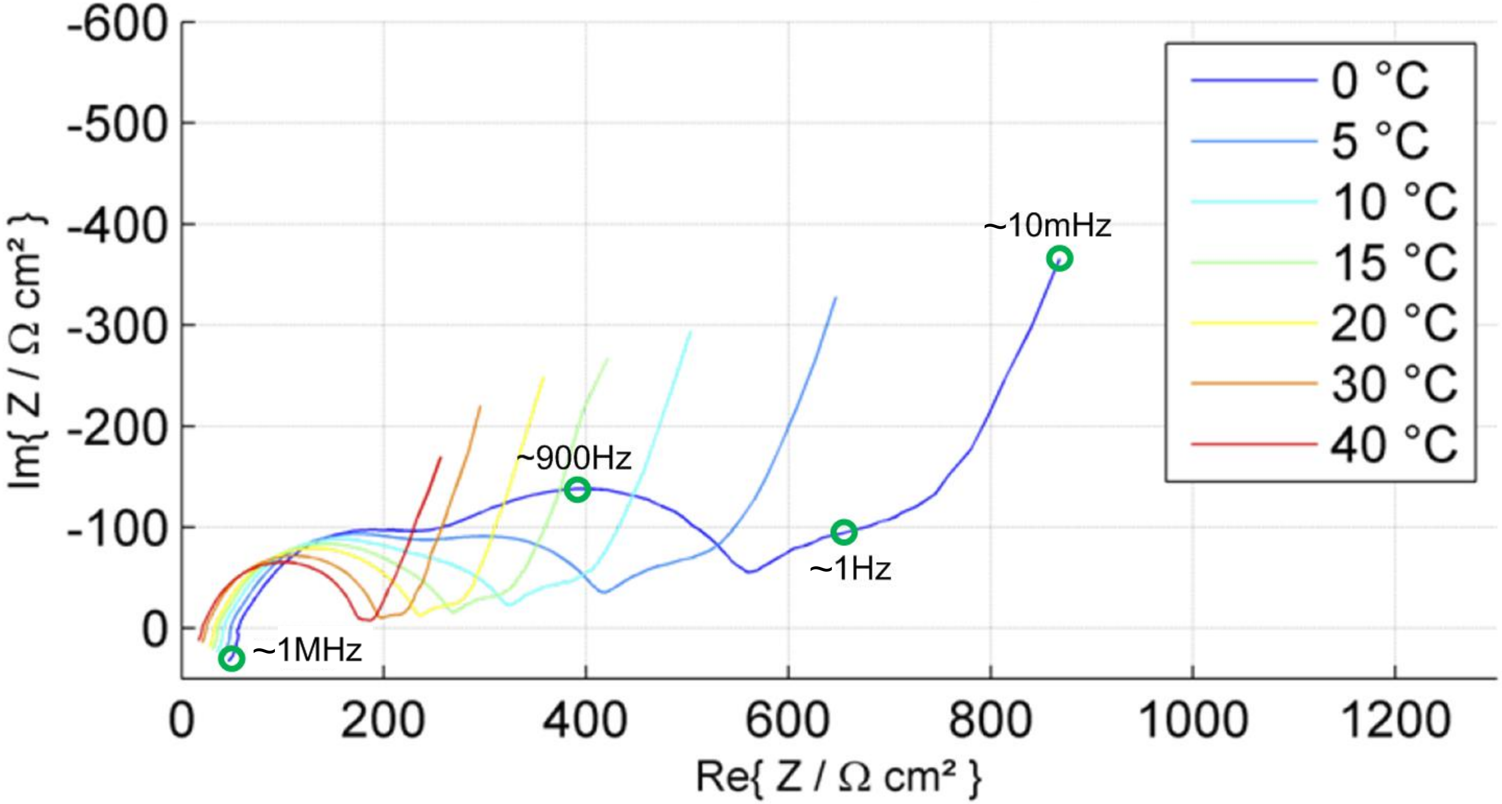
$i(t) = i_0 sin(\omega t) \;\; \hat{=}\; Eingangsgröße\; u$

$u(t) = ? \;\; \hat{=}\; Ausgangsgröße\; y$

Betrachtet wird die Systemantwort $y(t)$ als Antwort auf die Eingangsgröße $u(t)$

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)}$$

4. Impedanz einer Batterie

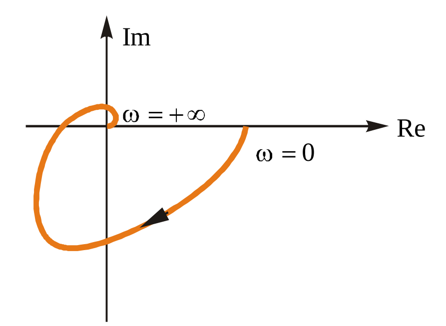


Quelle: IWE

Übersicht
Vorlesungsinhalt

3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. **Frequenzkennlinie**
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien

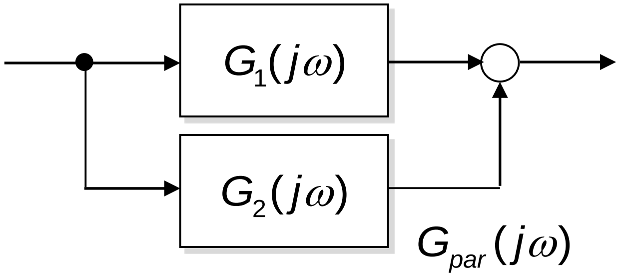


4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

3.3 Frequenzkennlinie

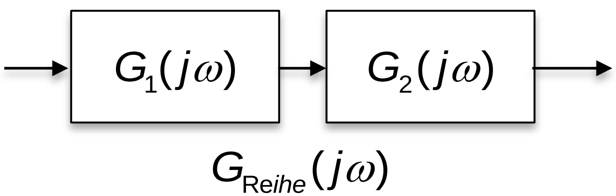
- Aufbau der Frequenzgangsortskurven komplexerer Übertragungsglieder:
  - Parallelschaltung einzelner Glieder:



$$G_{par}(j\omega) = G_1(j\omega) + G_2(j\omega)$$

$\Rightarrow$ vektorielle Addition der einzelnen Zeiger (einfach)

  - Reihenschaltung einzelner Glieder:



$$G_{Reihe}(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

$\Rightarrow$ Multiplikation der Beträge, Addition der Phasenwinkel (umständlich)

- Zweckmäßig: Verwendung logarithmischer Frequenzkennlinien (Bode-Diagramm)

3.3 Frequenzkennlinie

Def.: **Frequenzkennlinien (Bode-Diagramm)**

Die Frequenzkennlinien eines Systems bestehen aus zwei getrennten Diagrammen für den Betrag und die Phase von $G(j\omega)$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω.

$$G(j\omega) \begin{cases} |G(j\omega)| = A(\omega) & \text{Betrag} \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) & \text{Phase} \end{cases}$$

Dabei gilt:

- Auftragen von $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ über der logarithmisch geteilten ω-Achse
- Auftragen von $A(\omega)$ im logarithmischen Maßstab
- Auftragen von $\varphi(\omega)$ im linearen Maßstab

Alternative für die Betragskennlinie: **Dezibel-Maß** $\quad \left|G(j\omega)\right|\Big|_{dB} = 20\log\left|G(j\omega)\right|$

Vorteil: $\left|G(j\omega)\right|\Big|_{dB}$ kann linear aufgetragen werden:

$G(j\omega)$	0.01	0.1	1	2	3.16	10	100	1000
$\left\|G(j\omega)\right\|\Big\|_{dB}$	-40	-20	0	6.02	10	20	40	60

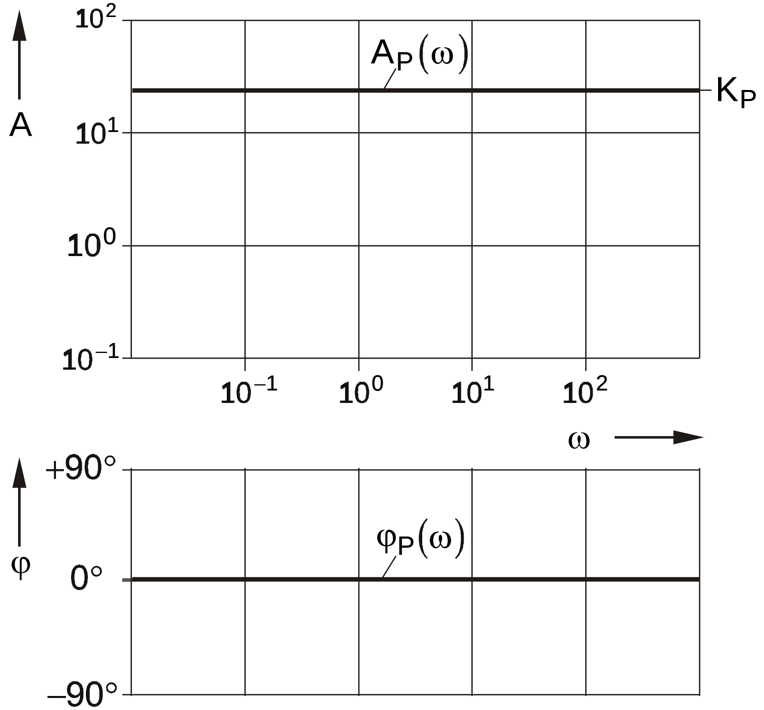
3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder

1. Beispiel: *P*-Glied:

$$G(j\omega) = K_P \qquad \Rightarrow \qquad |G(j\omega)| = A_P(\omega) = K_P, \qquad \angle G(j\omega) = \varphi_P(\omega) = 0$$

- Betrags- und Phasenverlauf:

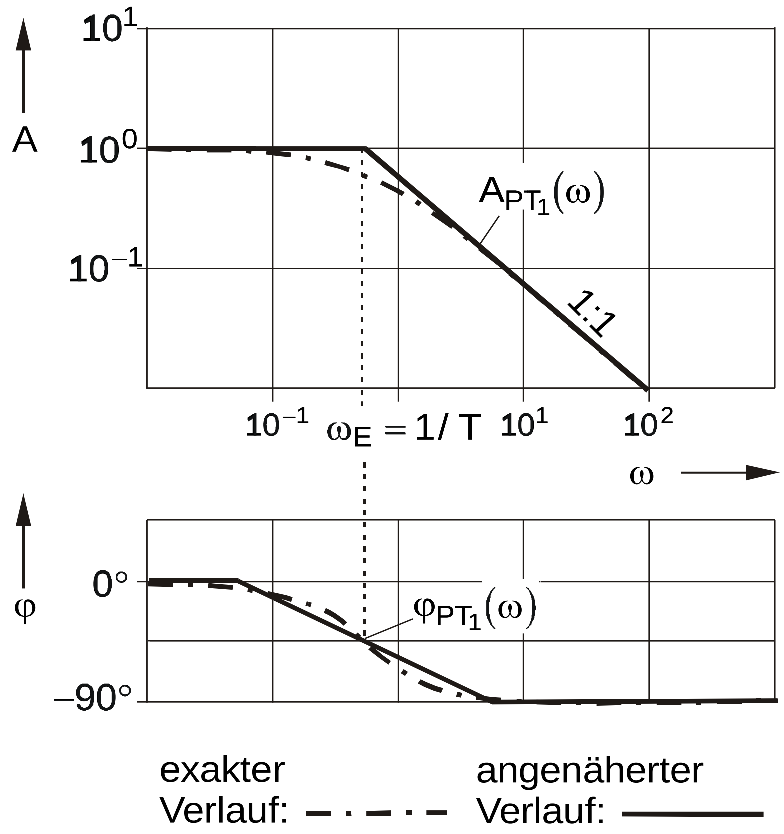


Tafelanschrieb 3.3 (1)
Frequenzkennlinie PT_1-Glied

3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (2)

2. Beispiel: PT_1-Glied:



3.3 Frequenzkennlinie

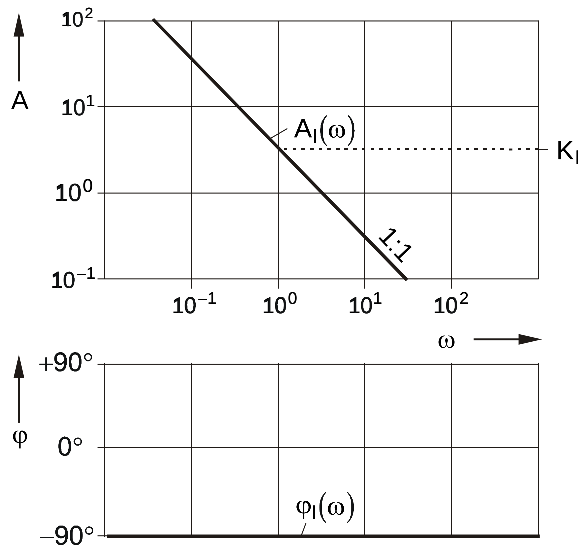
3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (3)

3. Beispiel: *I*-Glied:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} = -j\frac{K_I}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad A_I(\omega) = \frac{K_I}{\omega},\ \log A_I = \log K_I - \log\omega$$

$$\varphi_I(\omega) = \arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}(..)}{\mathrm{Re}(..)}\right\} = \arctan(-\infty) = -90°$$

- Betrags- und Phasenverlauf:



3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (4)

4. Beispiel: PT_2-Glied ($K = 1$) (1):

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2dTj\omega + T^2(j\omega)^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2d\omega_0(j\omega) + (j\omega)^2}$$

$\omega_0 := \frac{1}{T}$: **Eigenfrequenz** des ungedämpften Systems

$$A_{PT_2} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2}} \quad ; \quad \varphi_{PT_2}(\omega) = -\arctan\frac{2d\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Es gelten speziell folgende Asymptotennäherungen:

$$\omega \ll \omega_0: \quad A_{PT_2}(\omega) \approx 1 \qquad \varphi_{PT_2}(\omega) \approx 0$$

$$\omega = \omega_0: \quad A_{PT_2}(\omega_0) = \frac{1}{2d} \qquad \varphi_{PT_2}(\omega_0) = -90°$$

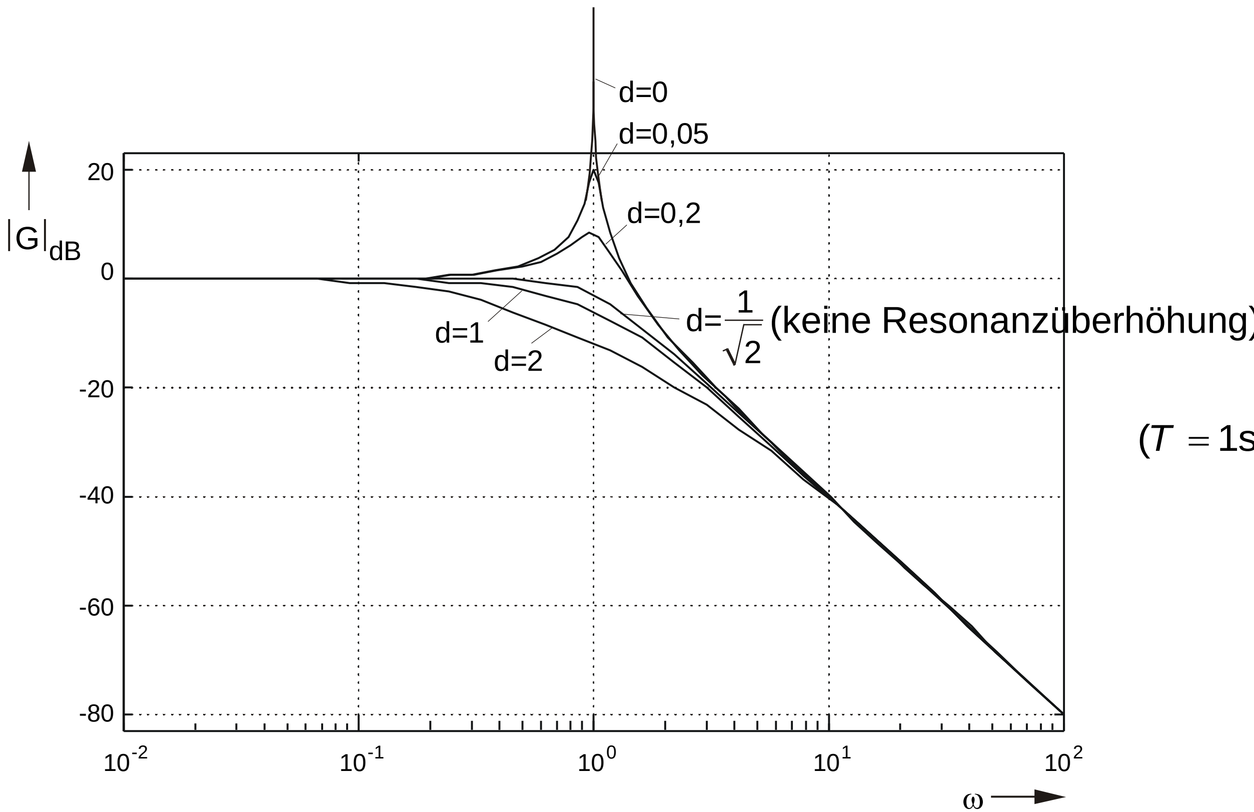
$$\omega \gg \omega_0: \quad A_{PT_2}(\omega) \approx \frac{1}{\left(\omega/\omega_0\right)^2} \qquad \varphi_{PT_2}(\omega) \approx -180°$$

3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (5)

4. Beispiel: PT_2-Glied ($K = 1$) (2):

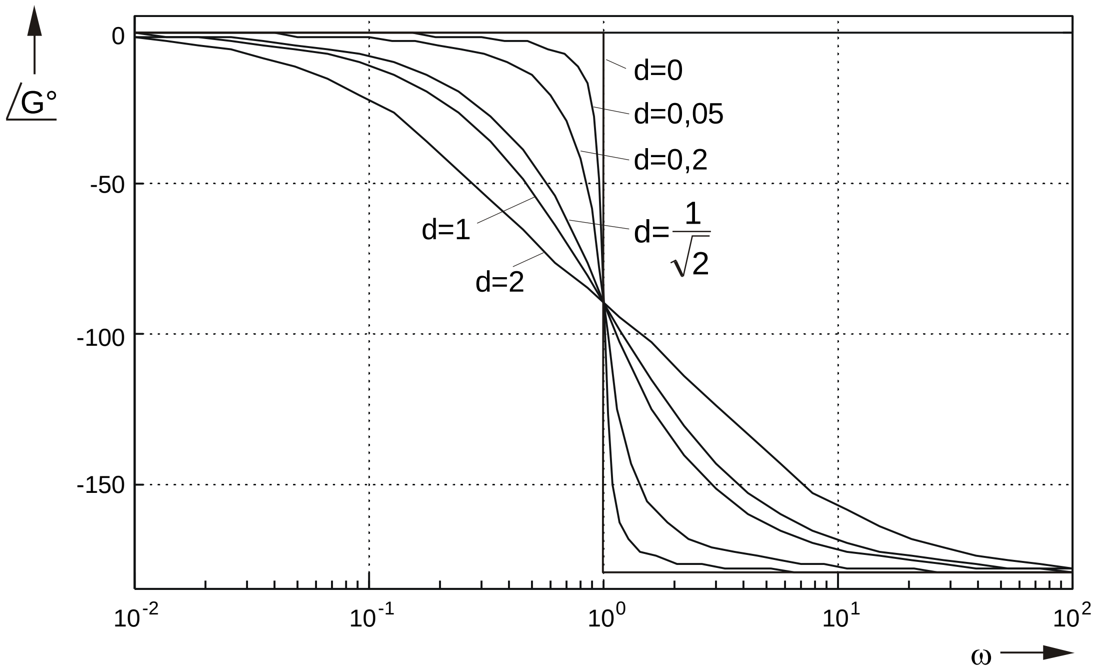
- Betragsverlauf:



$(T = 1\text{sec} \; ; K = 1)$

4. Beispiel: PT_2-Glied ($K=1$) (3):

- Phasenverlauf:

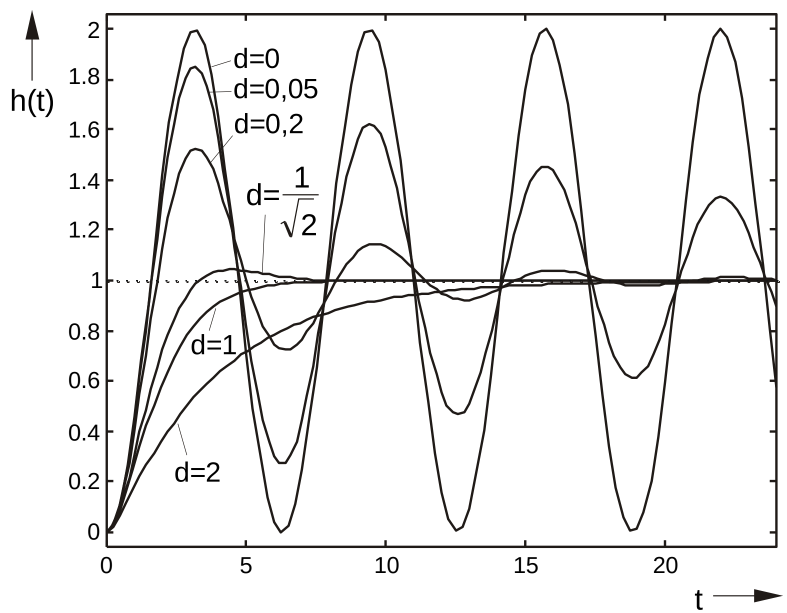


$(T = 1\text{sec}\ ;\ K = 1)$

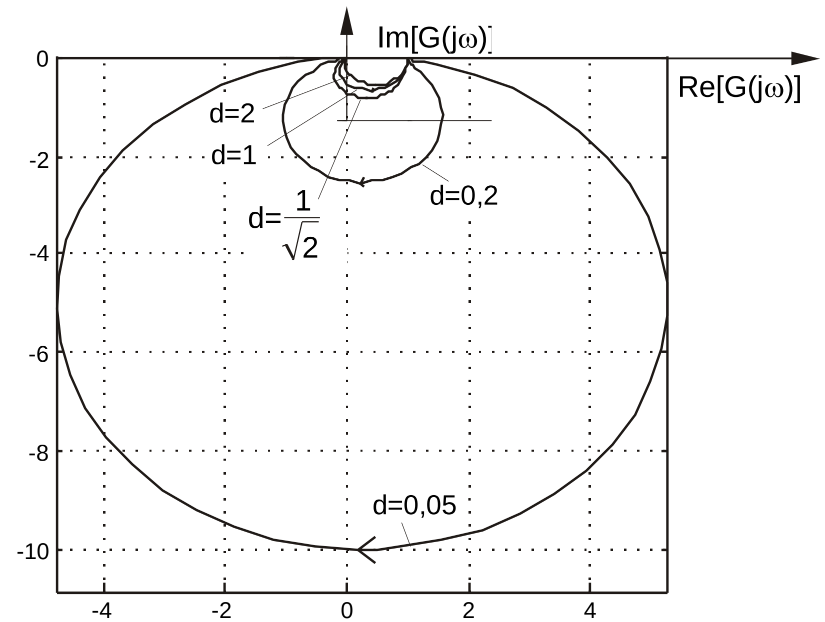
4. Beispiel: PT_2-Glied ($K = 1$) (4):

- zum Vergleich: weitere Charakteristika von PT_2-Gliedern: $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2dTs + T^2 s^2}$

(a) Sprungantwort ($T = 1\,\text{sec}$; $K = 1$)



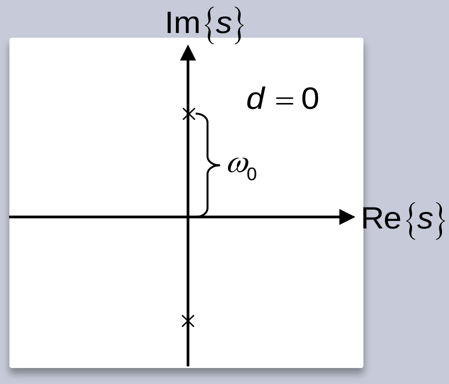
(b) Ortskurve ($T = 1\,\text{sec}$; $K = 1$)



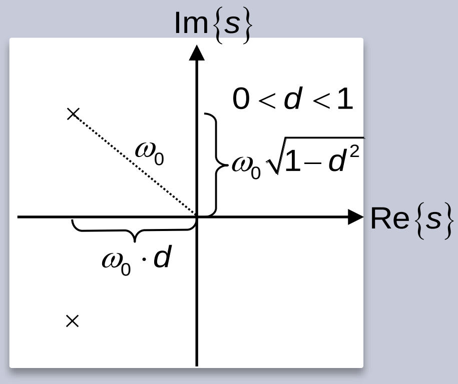
4. Beispiel: PT_2-Glied ($K = 1$) (5):

(c) Pollagen für verschiedenen Dämpfungen d

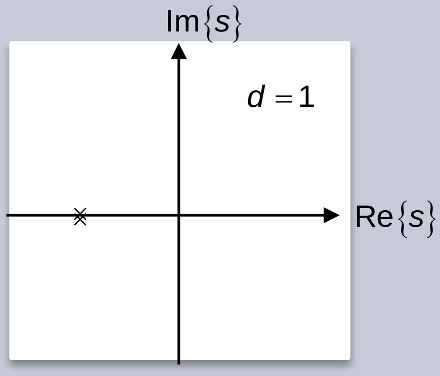
Ungedämpft:



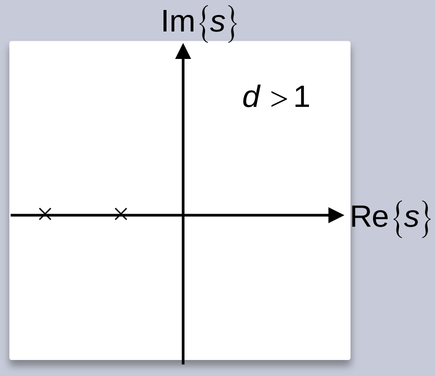
Gedämpft:



aperiodischer Grenzfall:



Kriechfall:

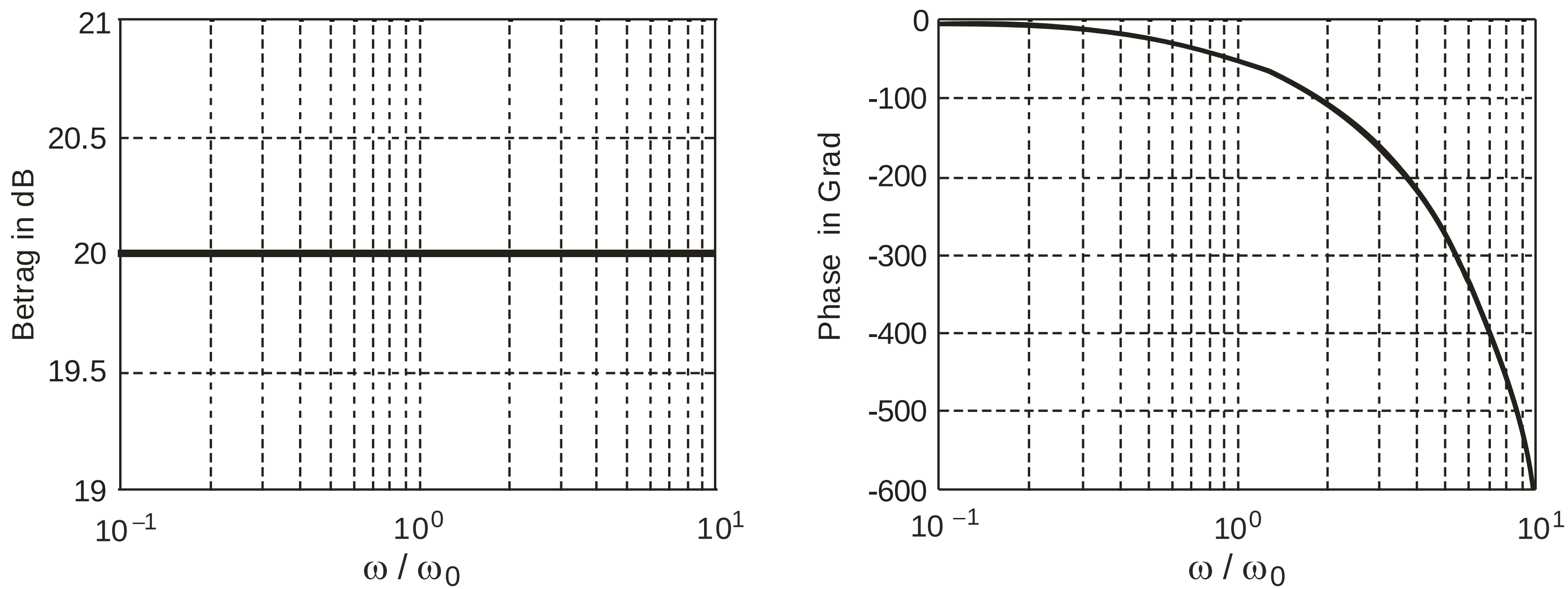


5. Beispiel: *Totzeit*-Glied:

$$G(j\omega) = K \cdot e^{-T_t j\omega} \quad (K > 0\ ;\ T_t > 0) \qquad \Rightarrow \qquad A_T(\omega) = K$$

$$\varphi_T(\omega) = -\omega T_t = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

- Betrags- und Phasenverlauf $(K = 10\ ;\ \omega_0 = 1)$:



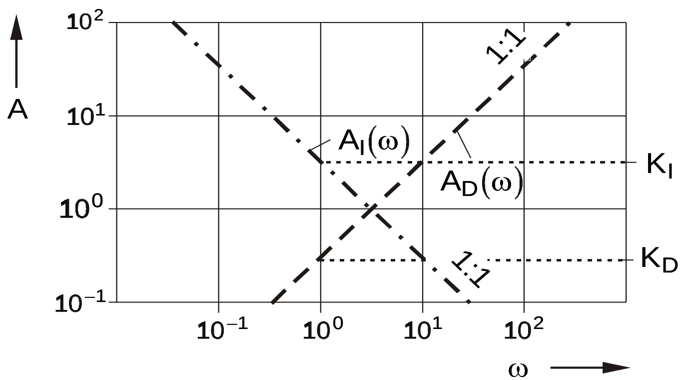
- Also: Die Frequenzkennlinien der inversen Glieder erhält man wie folgt:

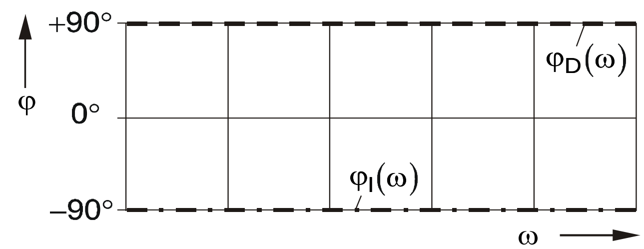
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \Rightarrow \quad G^{-1}(j\omega) = \frac{1}{|G(j\omega)|} \cdot e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$G(j\omega)^{-1}\Big|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log|G(j\omega)| = -|G(j\omega)|\Big|_{dB}$$

> - Betragskennlinie: Spiegelung an der *0 dB*-Linie
> - Phasenkennlinie: Spiegelung an der *0*-Grad-Linie

- Beispiel: ***D*-Glied** aus ***I*-Glied**:





- Damit z.B. auch verfügbar: ***PD*-Glied** aus ***PT*$_1$-Glied**, Nullstellenpaar aus ***PT*$_2$-Glied**

3.3 Frequenzkennlinie

3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder

- Reihenschaltung elementarer Übertragungsglieder:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{Reihe}}(j\omega) &= G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \\ &= \left|G_1(j\omega)\right| \cdot \left|G_2(j\omega)\right| \cdot \left|G_3(j\omega)\right| \cdot e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\varphi_3(\omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log A_{\mathrm{Reihe}}(\omega) &= \log\left|G_1(j\omega)\right| + \log\left|G_2(j\omega)\right| + \log\left|G_3(j\omega)\right| \\ \varphi_{\mathrm{Reihe}}(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) \end{aligned}$$

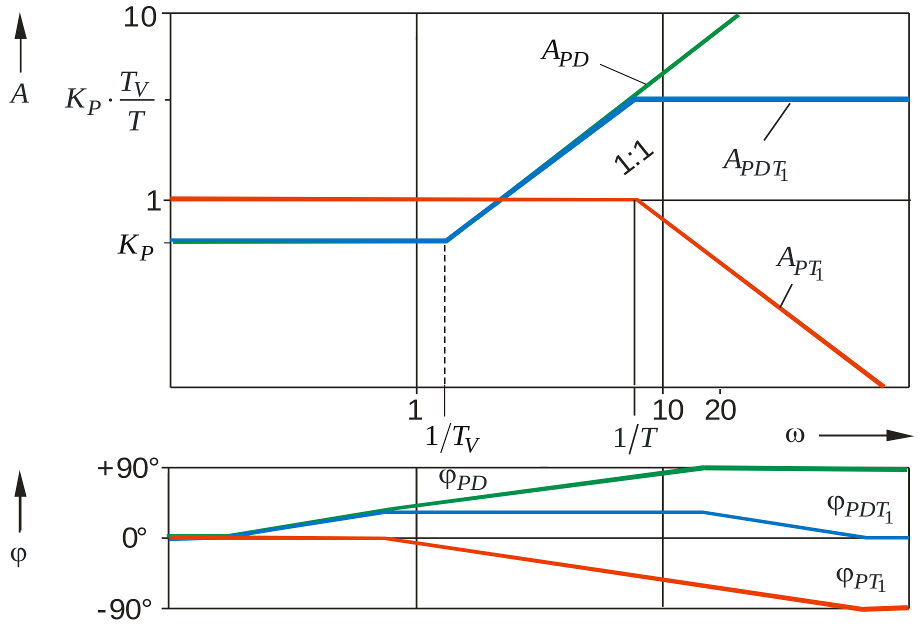
- Also:

  Die Frequenzkennlinien der Reihenschaltung von Übertragungsgliedern erhält man wie folgt:

  - Betragskennlinie: Summation der Teilamplitudengänge in *dB*
  - Phasenkennlinie: Summation der Teilphasengänge

- Beispiel: Bode-Diagramm ***PDT₁*-Glied**:

$$G(s) = K_P \frac{1+T_v s}{1+Ts} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K_P \frac{1+j\omega T_v}{1+j\omega T} = \underbrace{\underbrace{K_P\left(1+j\frac{\omega}{1/T_v}\right)}_{PD} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+j\frac{\omega}{1/T}}}_{PT_1}}_{PDT_1}$$

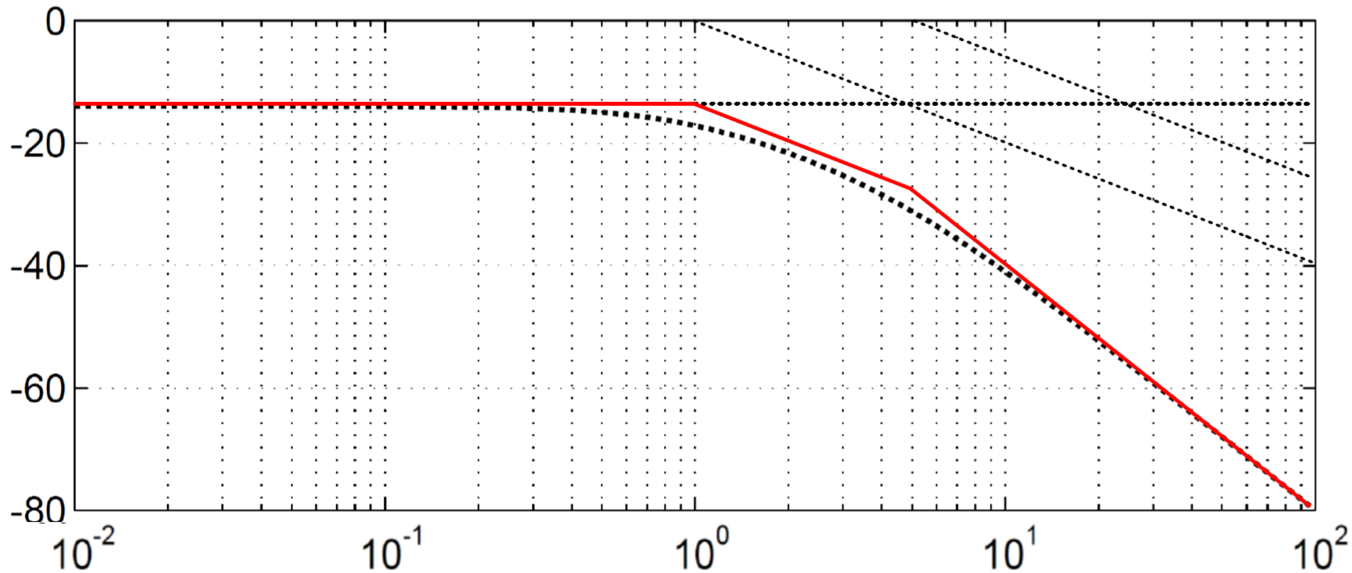


3.3 Frequenzkennlinie
3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder (3)

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+5}$

Stationäre Schwingungen: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}\frac{1}{j\omega+5}$

- Betragsverlauf: $M_{dB} = -20\left(\log(|1+j\omega|) + \log(|1+j\frac{1}{5}\omega|) + \log(5)\right)$

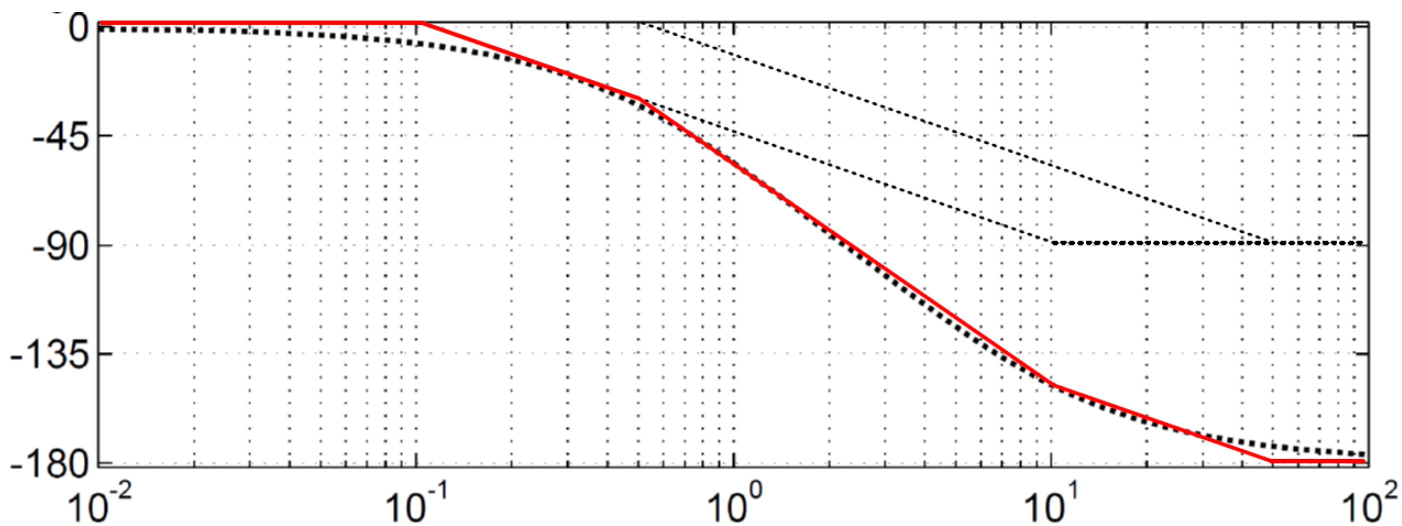


3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder (4)

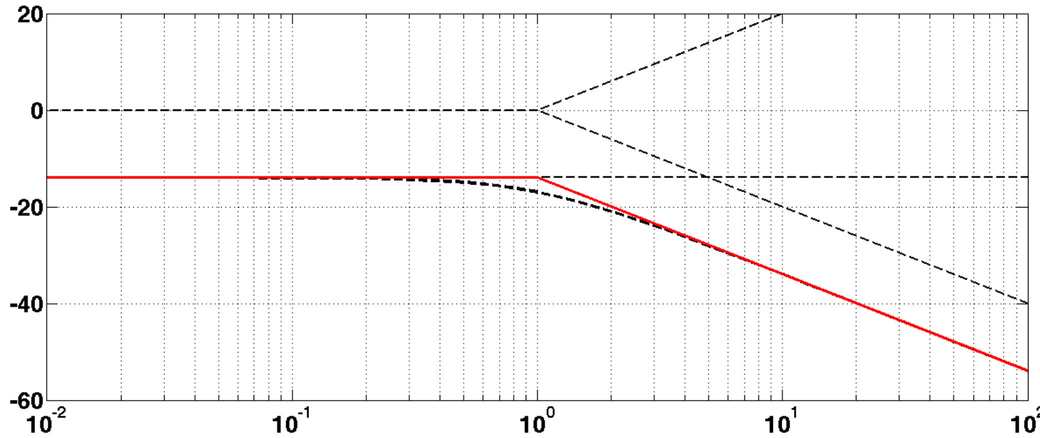
Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+5}$

Stationäre Schwingungen: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}\frac{1}{j\omega+5}$

- Phasenverlauf: $\varphi = -\arctan(\omega) - \arctan(\frac{\omega}{5})$



3.3 Frequenzkennlinie
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe



$K = \frac{1}{5} \hat{=} -14\,dB$

$T = 1s$

- Vermutung: Aus dem Betragsverlauf kann auf den Phasenverlauf geschlossen werden.

- Beispiel: $G(j\omega) = K \dfrac{1 - Tj\omega}{(1 + Tj\omega)(1 + Tj\omega)}$

$$\left|G(j\omega)\right| = \left|K\right| \frac{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{1 + T^2\omega^2} \qquad \equiv \qquad \left|K\right| \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = \left|G_{PT1}(j\omega)\right|$$

Fazit: Aus dem Betragsverlauf kann im Allgemeinen nicht auf den Phasenverlauf geschlossen werden.

- Frage: Durch was unterscheiden sich zwei R-Glieder mit gleichem Betragsverlauf ?

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)|$$

$$\Rightarrow \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} = \left|\frac{G_1(j\omega)}{G_2(j\omega)}\right| = 1$$

- Offenbar ergibt sich der Unterschied durch einen Frequenzgang $G_A(j\omega)$, dessen Betrag unabhängig von der Frequenz ist.

- Diese Übertragungsglieder bezeichnet man allgemein als Allpass.

Es gilt nun: Sämtliche **R-Glieder, die dieselbe Betragskennlinie** aufweisen **unterscheiden sich durch Allpässe**, deren Betragskennlinie konstant ist und es gilt:

$$G_1(j\omega) = G_2(j\omega) G_A(j\omega)$$

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (3)

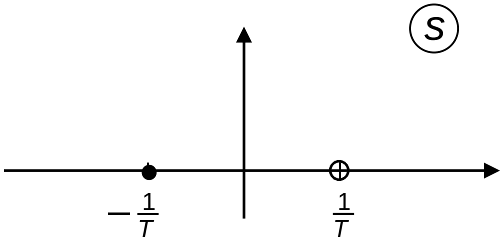
Def.: **Allpass**

Ein System mit rationaler Übertragungsfunktion heißt Allpass, wenn sich Zähler- und Nennerpolynom nur im Vorzeichen der komplexen Variablen unterscheiden:

$$G_A(s) = \frac{Z_A(s)}{N_A(s)} \quad \text{mit} \quad N_A(s) = Z_A(-s).$$

Damit liegen also Pole und Nullstellen eines Allpasses jeweils symmetrisch zueinander links und rechts von der imaginären Achse.

- Beispiel: $G_A(s) = \dfrac{1 - Ts}{1 + Ts}$

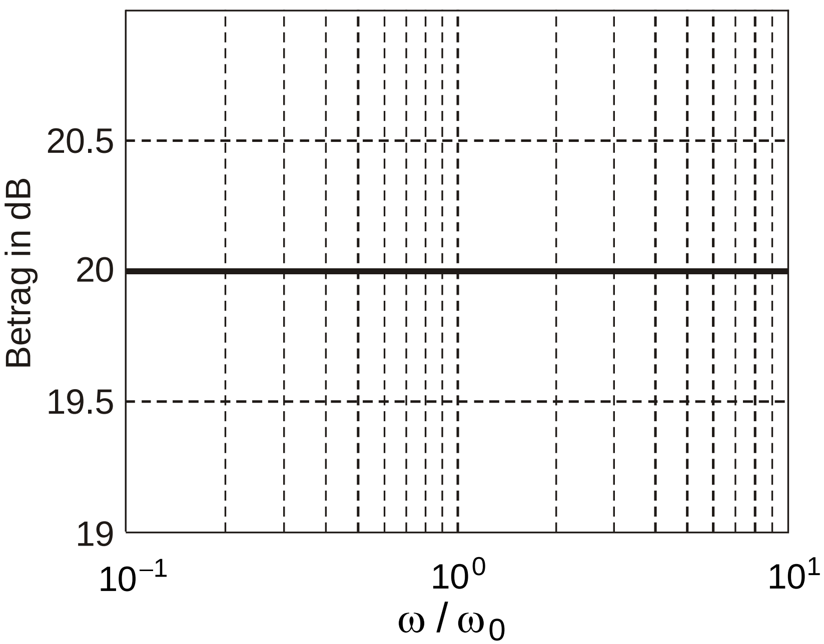


3.3 Frequenzkennlinie
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (4)

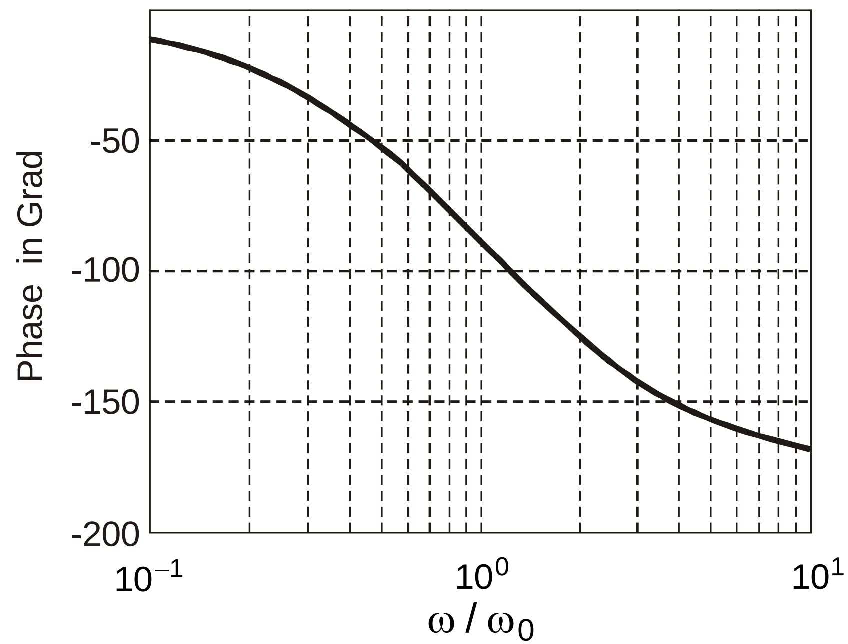
- Beispiel: Bode-Diagramm eines ***Allpasses 1. Ordnung*:**

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{1 - j\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\,\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \Rightarrow \qquad A_{AP}(\omega) = K \;\; ; \;\; \varphi_{AP}(\omega) = -2 \cdot \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Betragskennlinie $(K = 10 \; ; \; \omega_0 = 1)$



Phasenkennlinie $(K = 10 \; ; \; \omega_0 = 1)$



3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (5)

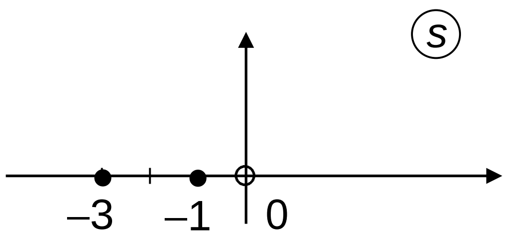
Def.: **Minimalphasensystem**:

Ein System mit rationaler Übertragungsfunktion

$$G_m(s) = \frac{Z_m(s)}{N_m(s)} \;,\; G_m(s=0) > 0$$

heißt Minimalphasensystem, wenn es keine Pole und keine Nullstellen rechts der imaginären Achse aufweist.

- Beispiel: $G(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s - \overset{\beta_1}{\downarrow} 0)}{(s + \underset{\alpha_1}{\uparrow} 1)(s + \underset{\alpha_2}{\uparrow} 3)}$

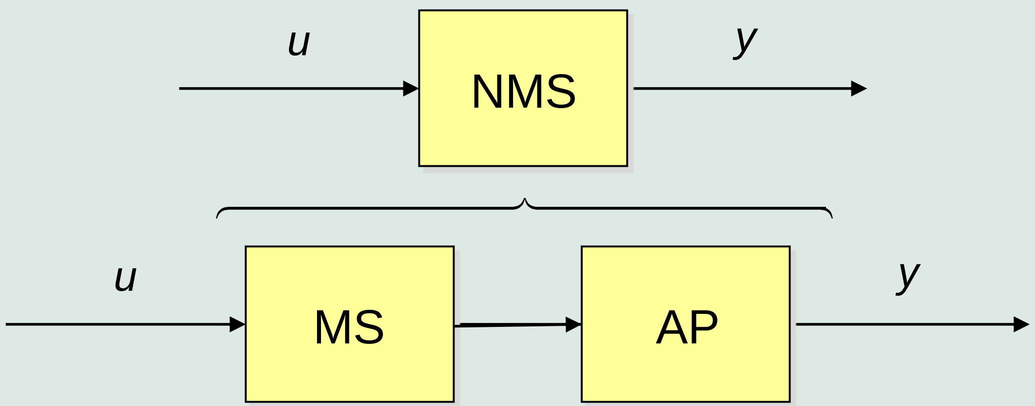


Fazit: Zu einer gegebenen Betragskennlinie gibt es nur ein Minimalphasenglied

3.3 Frequenzkennlinie
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (6)

Nicht-Minimalphasensystem (NMS):

Reihenschaltung von Minimalphasensystem (MS) und Allpass (AP)

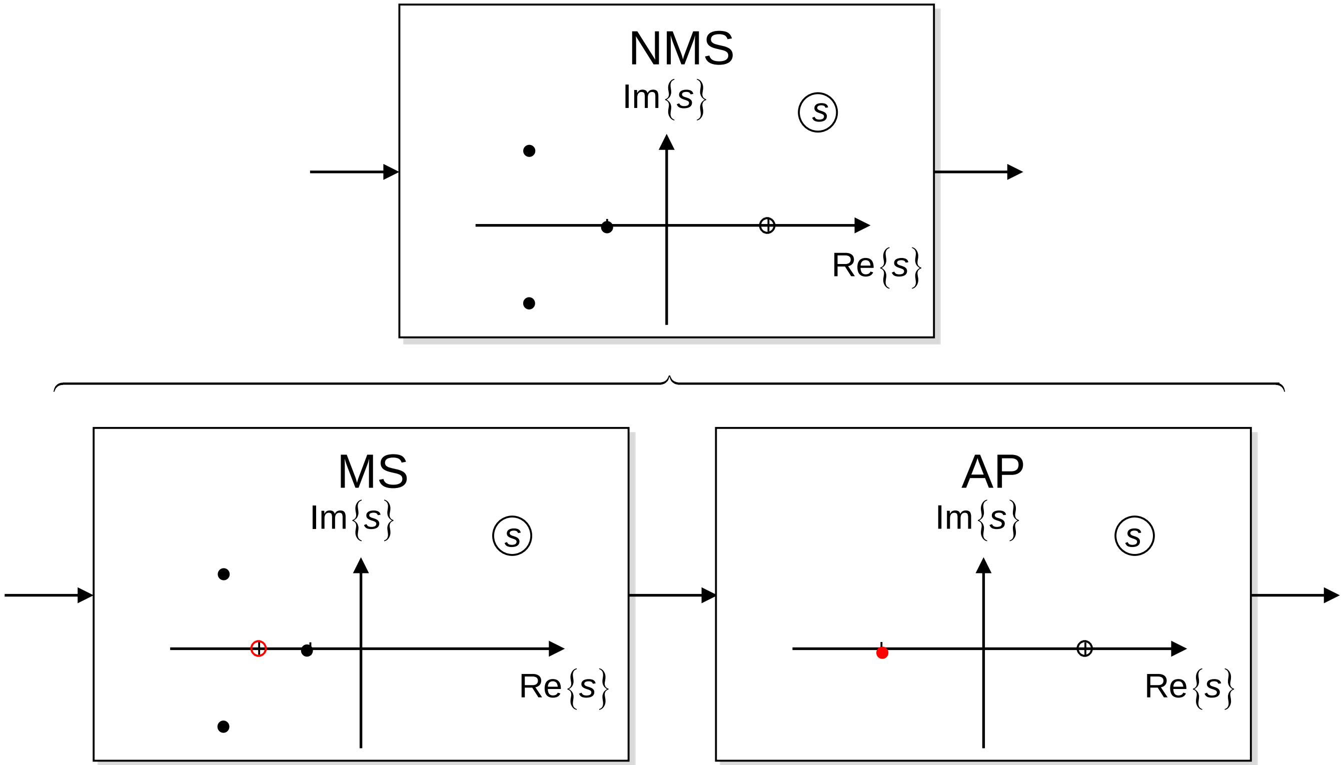


- Allpass dreht Phase zurück

  ⇨ Der Phasengang eines Minimalphasensystems liegt oberhalb der Phasenkennlinie aller rationalen Übertragungsfunktionen, die dieselbe Betragskennlinie und keine Pole rechts der imaginären Achse haben.

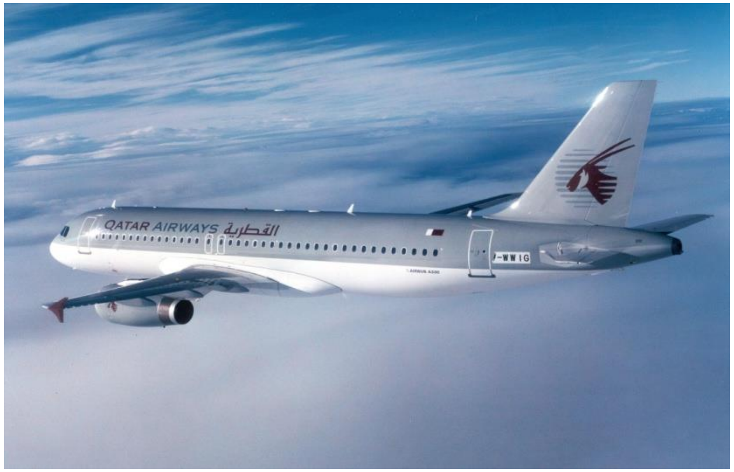
- Nun gilt:

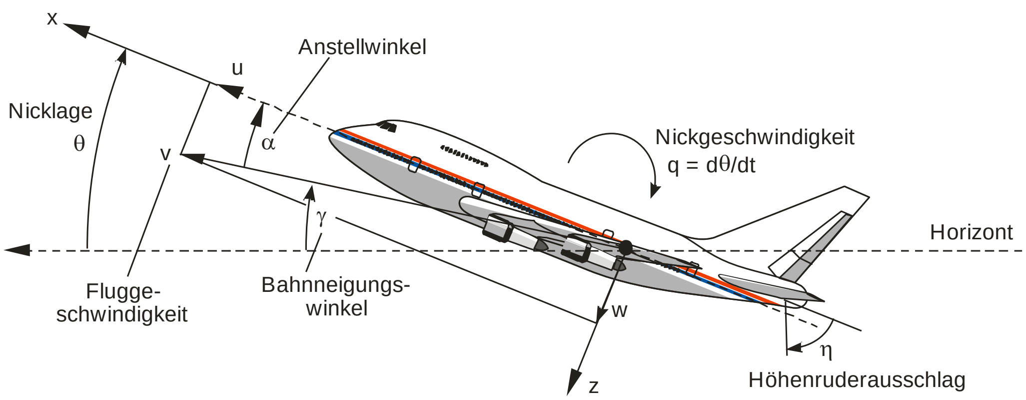
  jedes allgemeine Nicht-Minimalphasensystem (NMS) lässt sich stets zerlegen in ein Minimalphasensystem (MS) und einen Allpass (AP):



3.3 Frequenzkennlinie
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (8)

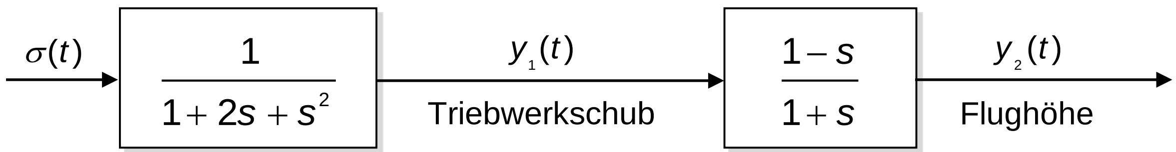
- Zusammenhang Flughöhe – Triebwerkschub beim Airbus 320

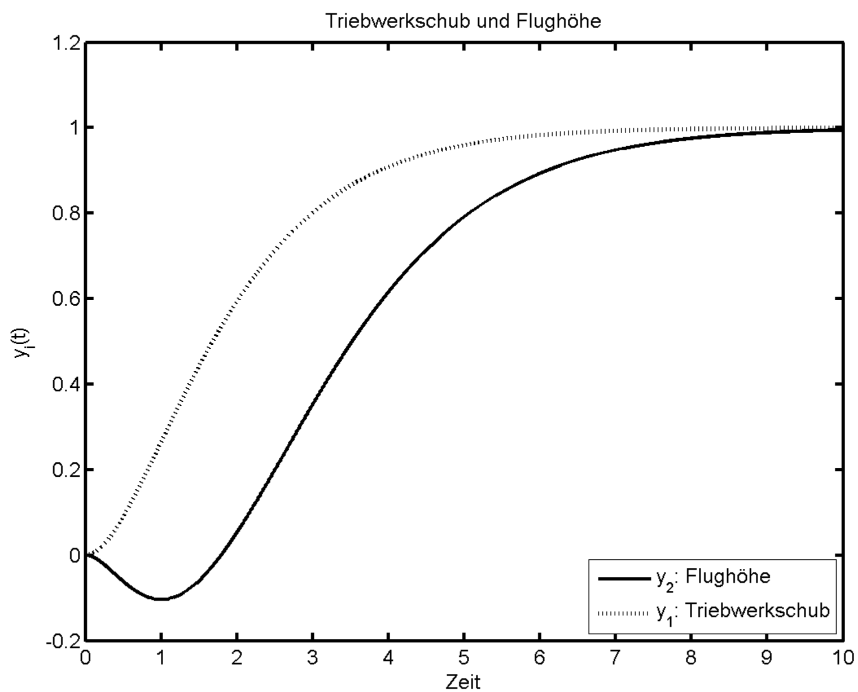




PC-Demo 2: Allpass

- Kommandierung – Triebwerkschub – Flughöhe: ***PT_2*-Glied** und ***Allpass***

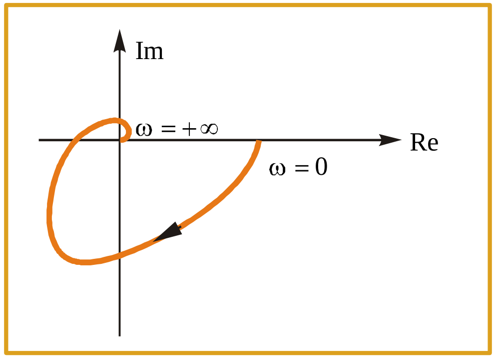




Übersicht
Vorlesungsinhalt

3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. **Grundlagen zur Stabilität**
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

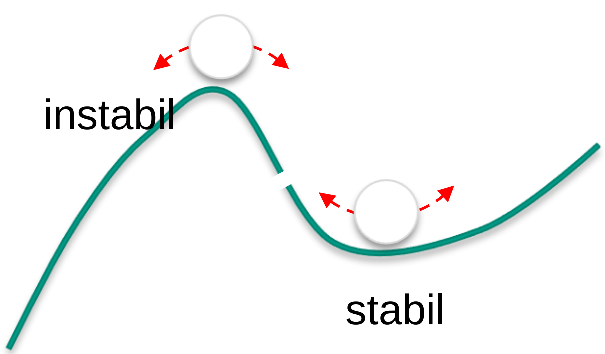
1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

3.4 Grundlagen zur Stabilität

3.4.1 Definitionen

I) Stabilität einer Ruhelage	II) Ein/Ausgangsstabilität
• System kehrt bei kleiner Auslenkung aus der Ruhelage in diese zurück oder verbleibt in deren Nähe • ➔ Nichtlineare Regelungen und RLM	• System reagiert auf eine beschränkte Eingangsgröße (Testfunktion) mit einer beschränkten Ausgangsgröße • ➔ Die Art der Beschränkung muss definiert werden

Merkhilfe: Kugel im Gebirge



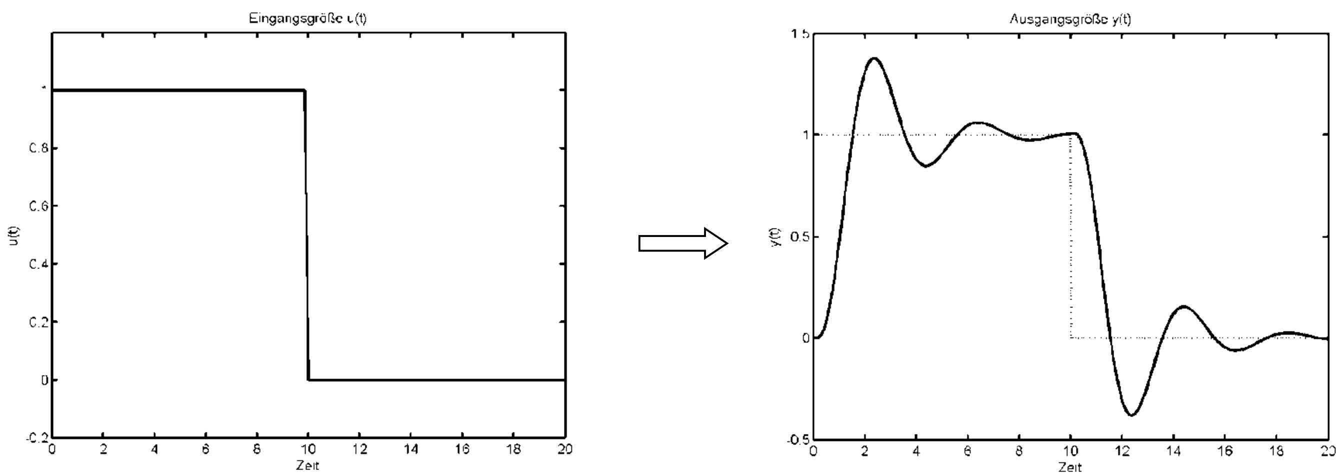
3.4 Grundlagen zur Stabilität
3.4.1 Definitionen (2)

Def.: **Übertragungsstabilität (BIBO-Stabilität):**

Ein System heißt übertragungsstabil, wenn es auf jede betragsbeschränkte Eingangsgröße stets mit einer betragsbeschränkten Ausgangsgröße antwortet (BIBO: Bounded Input Bounded Output), d.h., wenn für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt:

$$|u(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq N \quad (M, N \text{ positiv, konstant } < \infty)$$

- Beispiel:



Stabilitätsbedingung I

Ein lineares zeitinvariantes (LTI-) System ist genau dann **übertragungsstabil**, wenn das **Integral über die Impulsantwort** $g(t)$ **absolut konvergent ist**:

$$\int_0^\infty |g(\tau)| \, d\tau < \infty$$

- Ist ein System übertragungsstabil (Stabilitätsbedingung I erfüllt), so
  - strebt seine Sprungantwort $h(t)$ für $t \to \infty$ einen endlichen Wert an:

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^\infty g(\tau) d\tau = const < \infty$$

  - klingt seine Impulsantwort $g(t)$ für $t \to \infty$ nach Null ab:

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

- (Anmerkung: bei rationalen Übertragungsgliedern gilt auch die Umkehrung!)

3.4.2 Stabilitätsbedingungen (2)

Stabilität gebrochen rationaler Übertragungsglieder: Stabilitätsbedingung II

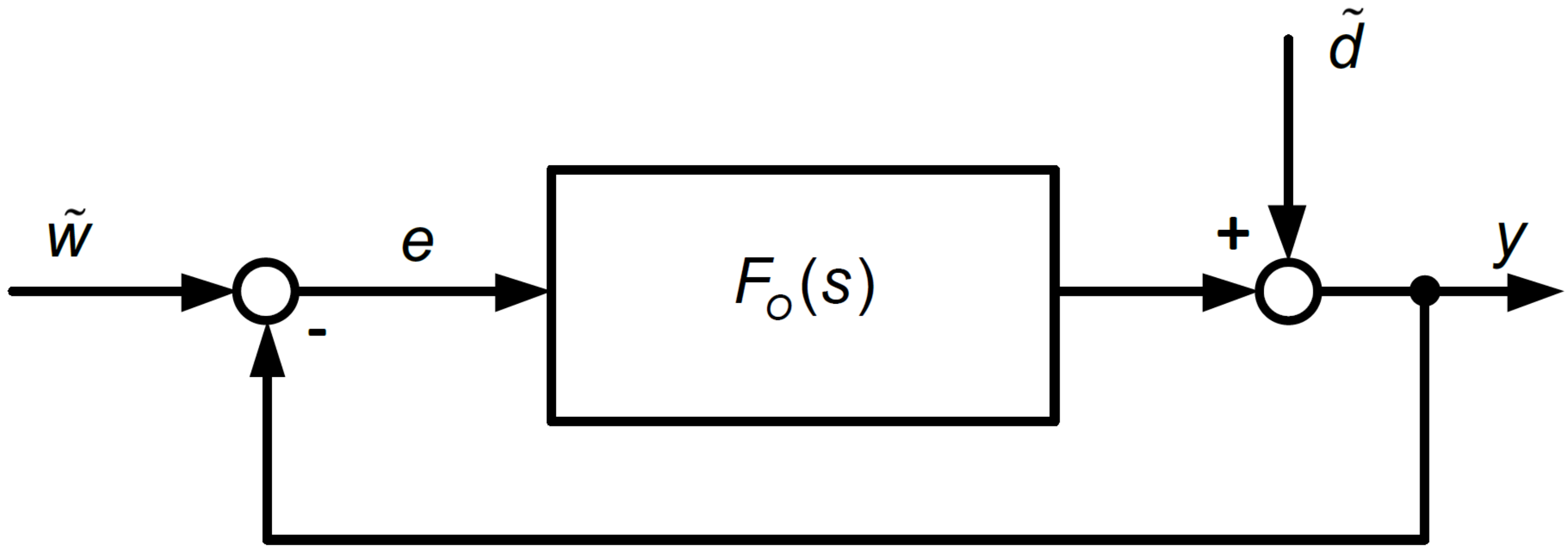
Stellt die Systemübertragungsfunktion $G(s)$ eine gebrochen rationale Funktion mit

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \qquad \left(Z,\ N \text{ teilerfremd, } m = Grad(Z) \leq Grad(N) = n\right)$$

dar, so ist das **System genau dann übertragungsstabil, wenn alle Pole einen negativen Realteil haben:**

$$\mathrm{Re}\left(s_k\right) = \sigma_k < 0 \quad \text{k=1,…,n}$$

- **Nun ist das System durch einen Regelkreis gegeben:**



Stabilität bzgl. der Führungsgröße als „Eingangsgröße“

$$\frac{Y(s)}{\tilde{W}(s)} = \frac{F_O(s)}{1+F_O(s)} = G_{sys,\tilde{w}}(s)$$

Stabilität bzgl. der Störgröße als „Eingangsgröße“

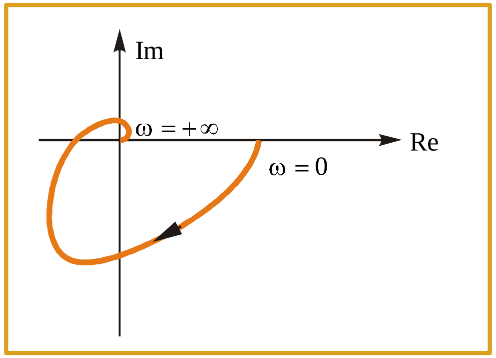
$$\frac{Y(s)}{\tilde{D}(s)} = \frac{1}{1+F_O(s)} = G_{sys,\tilde{d}}(s)$$

Stabil, wenn nach Bedingung II : Pole von $G_{sys,w}(s)$ bzw. $G_{sys,d}(s)$ einen negativen Realteil aufweisen, also **(in beiden Fällen !)** die Nullstellen von $1+F_O(s)$ einen negativen Realteil haben.

Übersicht
Vorlesungsinhalt

3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. **Algebraische Stabilitätskriterien**
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

3.5 Algebraische Stabilitätskriterien

Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895)

- Hierbei untersucht: Charakteristisches Polynom des **geschlossenen Kreises**

Def.: **Hurwitzpolynom**:

Ein Polynom

$$P_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_\nu \text{ reell}, \quad a_n > 0$$

heißt **Hurwitz-Polynom (HP),** wenn alle seine Wurzeln (= Nullstellen)

$$s_i\,,\ (i = 1, \ldots, n)$$

einen *negativen Realteil* haben.

⇒ Stabilitätskriterium: **Ein lineares dynamisches System ist genau dann stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz-Polynom ist.**

3.5 Algebraische Stabilitätskriterien
Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895) (2)

- Bedingungen an ***$P_n(s)$***:

  a) Notwendige Bedingung:

$$\boxed{a_i > 0 \quad ; \quad i = 0, \ldots, n}$$

  b) Notwendige und hinreichende Bedingung **(Hurwitz-Kriterium)**:

(• $a_n > 0$ Definition von $P_n(s)$)

• alle Hurwitz-Determinanten $D_k > 0$; $k = 1, \ldots, n$

⇒ **Dann folgt: *$P_n(s)$* ist Hurwitz-Polynom**

Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895) (3)

Def.: **Hurwitz-Determinante:**

Eine Hurwitz-Determinante ist eine der „nordwestlichen" Unter-determinanten $D_1,\ldots,D_n$ $(D_n = \det \underline{D})$ der Hurwitz-Matrix $\underline{D}$

$$\underline{D} = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}}_{n\,\text{Spalten}}\right\}\text{n Zeilen}$$

3.5 Algebraische Stabilitätskriterien
Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895) (4)

- Aus dem Koeffizientenschema der Hurwitz-Determinante sind Bedingungen für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ableitbar:
- **Hurwitz-Kriterium**:

  Notwendig und hinreichend dafür, dass das charakteristische Polynom ***$P_n(s)$*** (n = 1,…,4) eines Systems ein **Hurwitz-Polynom** ist, ist die Erfüllung von den folgenden **algebraischen Beziehungen zwischen Koeffizienten a_i:**

$n = 1:$	$a_0, a_1 > 0$
$n = 2:$	$a_0, a_1, a_2 > 0$
$n = 3:$	$a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
$n = 4:$	$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0$

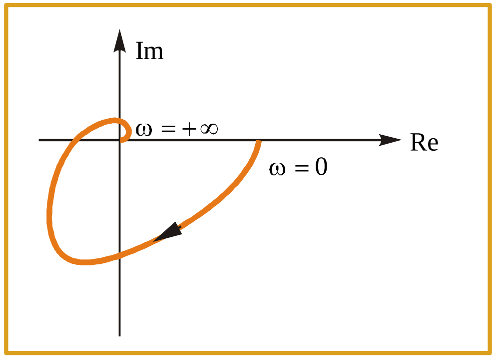
Tafelanschrieb 3.5 (1)
Algebraische Stabilitätskriterien

Film Stabilität in der Praxis

Übersicht
Vorlesungsinhalt

3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. **Graphische Stabilitätskriterien**



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

3.6 Graphische Stabilitätskriterien

- **Problem bei algebraischen Kriterien:**
  - Geschlossener Kreis muss explizit berechnet werden.
  - Auswirkung des Regelgesetzes auf Nullstellen von $1+F_O(s)$ nur in einfachen Fällen zu überblicken.

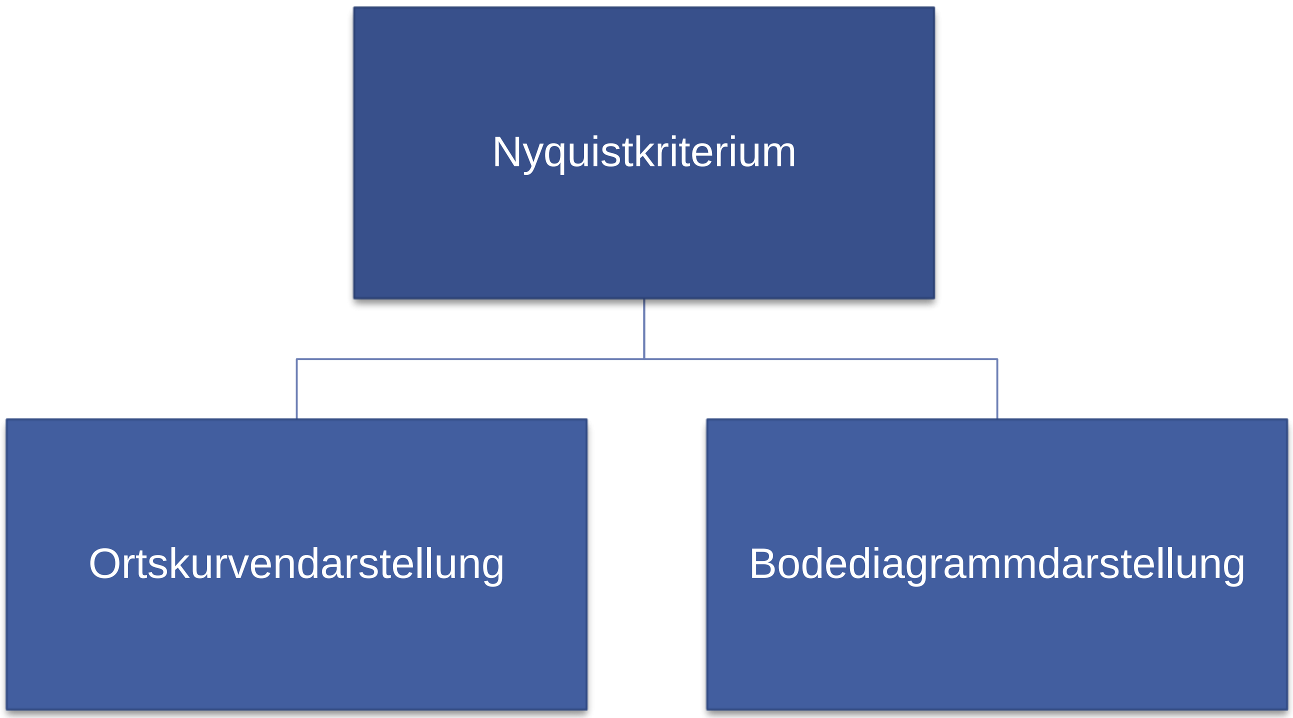
- **Nyquistkriterium**

  (nach Nyquist [nʏ:kvɪst], geb. in Schweden, später in die USA ausgewandert (1889-1976))

- Vom **offenen Kreis** kann auf die Stabilität des geschlossenen Kreises geschlossen werden

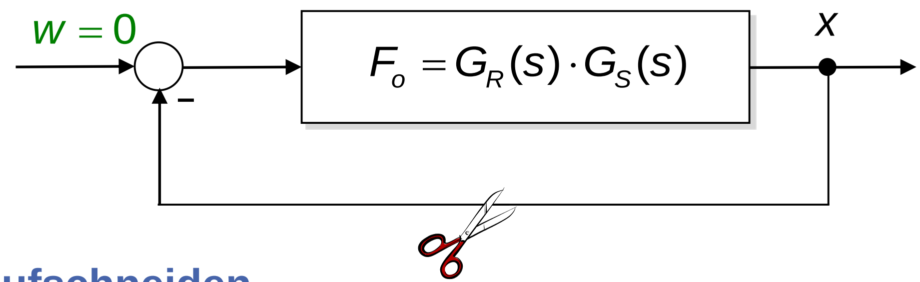
- Anwendung auch auf nichtrationale Übertragungsglieder (z.B. Totzeitglieder)

3.6 Graphische Stabilitätskriterien

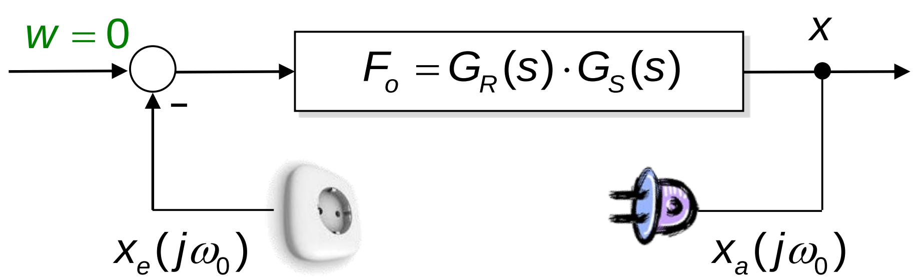


3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

- Bedingung für das Auftreten einer Schwingung:
  - Ausgangspunkt: geschlossener Regelkreis:



  - **Kreis aufschneiden**

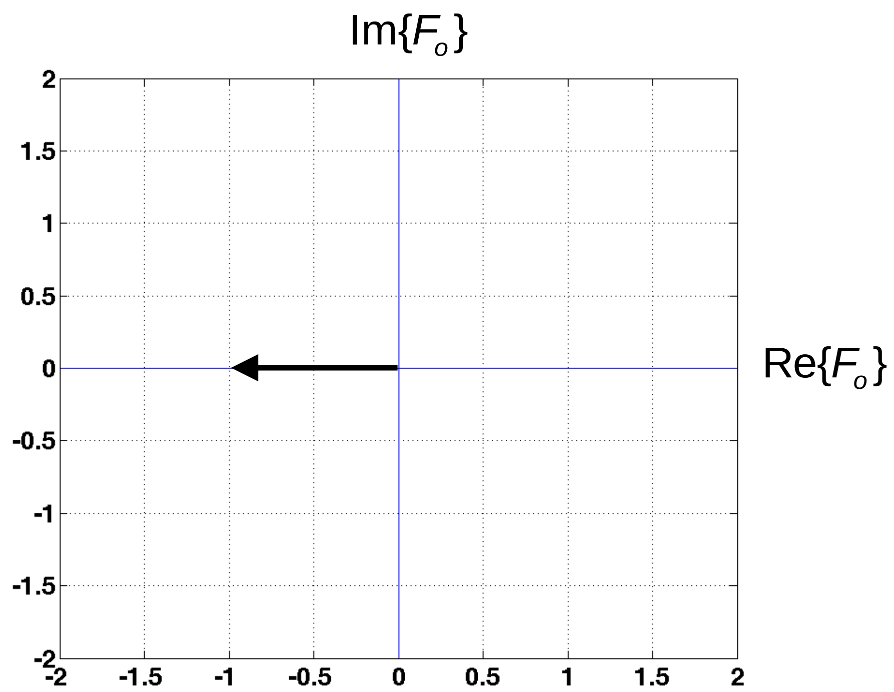


$$x_a(j\omega_0) = -F_o(j\omega_0)\,x_e(j\omega_0)$$

- Bedingung für das Auftreten einer Schwingung:

  Für Dauerschwingung muss offensichtlich gelten: $x_e(j\omega_0) \overset{!}{=} x_a(j\omega_0) = -F_o(j\omega_0)x_e(j\omega_0)$

  $$\Rightarrow F_o(j\omega_0) = -1$$



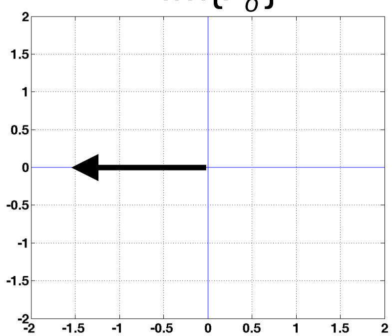
3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung (3)

- Bedingung für das Auftreten einer Schwingung:

Dauerschwingung klingt auf, falls

$$|x_e(j\omega_0)| < |x_a(j\omega_0)|$$

$\mathrm{Im}\{F_o\}$



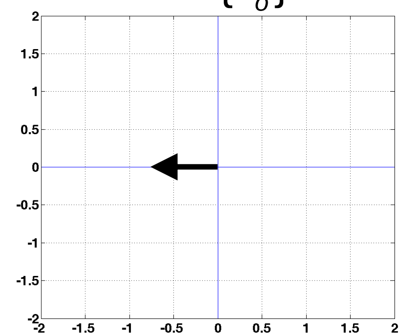
$\mathrm{Re}\{F_o\}$

„instabil“

Dauerschwingung klingt ab, falls

$$|x_e(j\omega_0)| > |x_a(j\omega_0)|$$

$\mathrm{Im}\{F_o\}$



$\mathrm{Re}\{F_o\}$

„stabil“

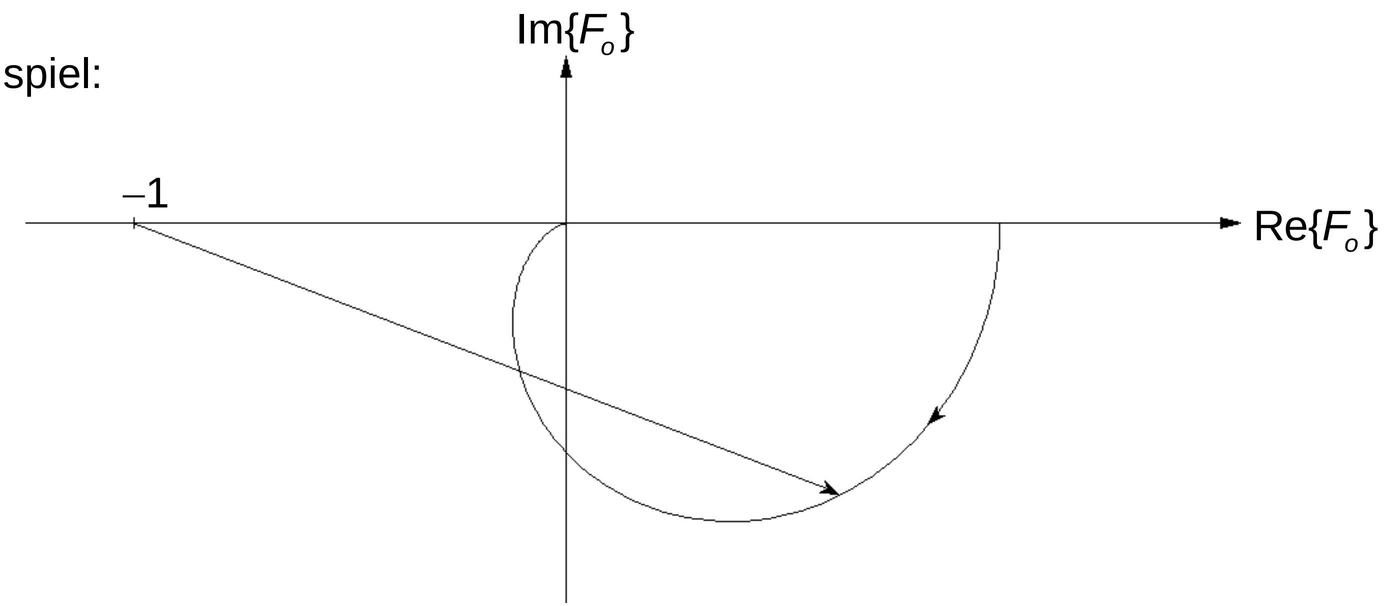
- Folgerung: Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn bei dem Phasenwinkel $\varphi = 0$ zwischen $\underline{x}_a$ und $\underline{x}_e$ gilt: $|x_a| < |x_e|$

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung (4)

- Wie verhält es sich bei anderen Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}^+$?

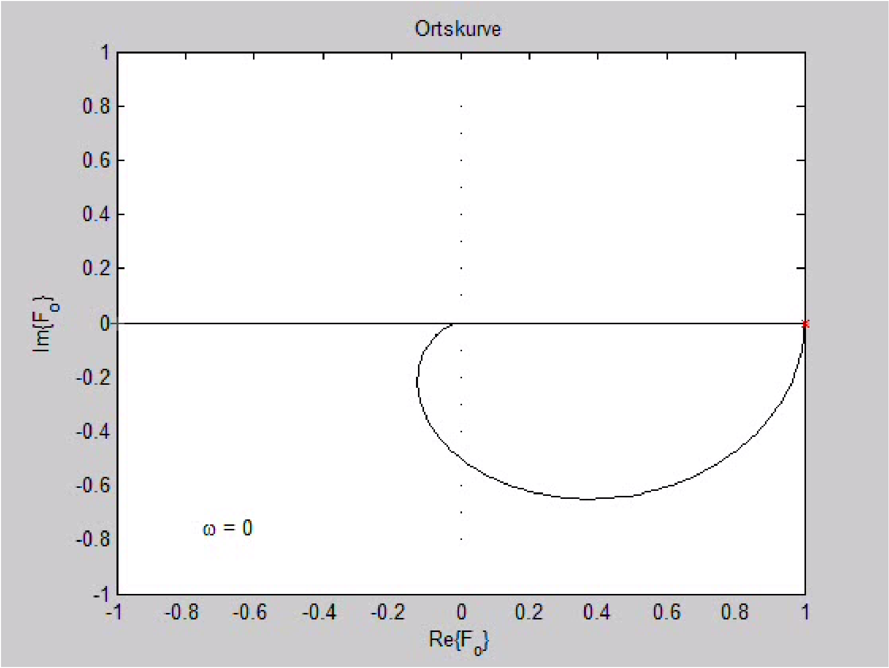
  → Betrachten der Frequenzgangs-Ortskurve:

- Beispiel:



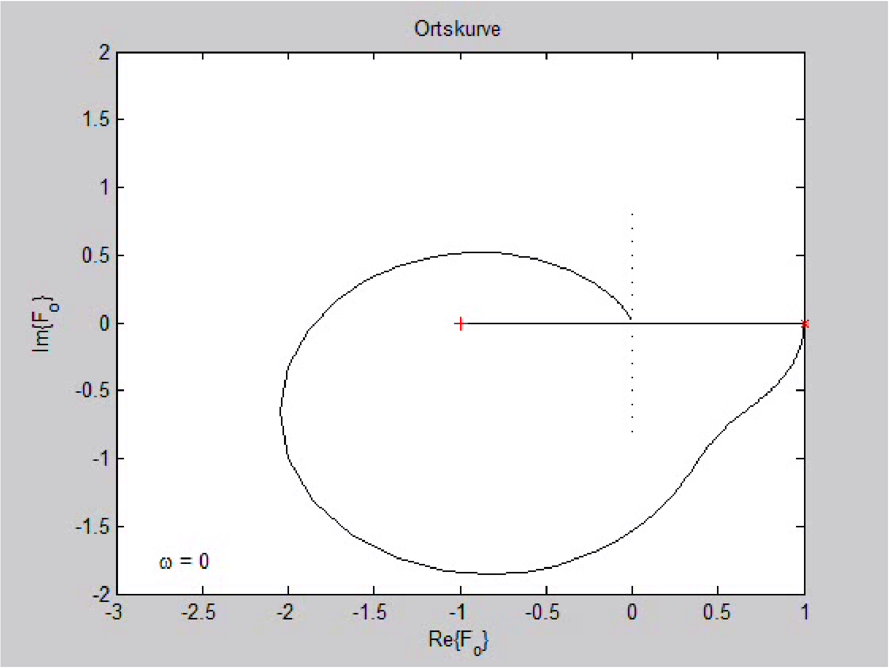
⇨ Vermutung: System stabil, wenn Punkt -1 links der Ortskurve liegt, bzw. wenn die Netto-Winkeländerung des Fahrstrahls vom Punkt -1 auf die Ortskurve Null beträgt.

Netto-Winkeländerung des Fahrstrahls von -1 auf die Ortskurve:



$$F_o(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Netto-Winkeländerung = 0

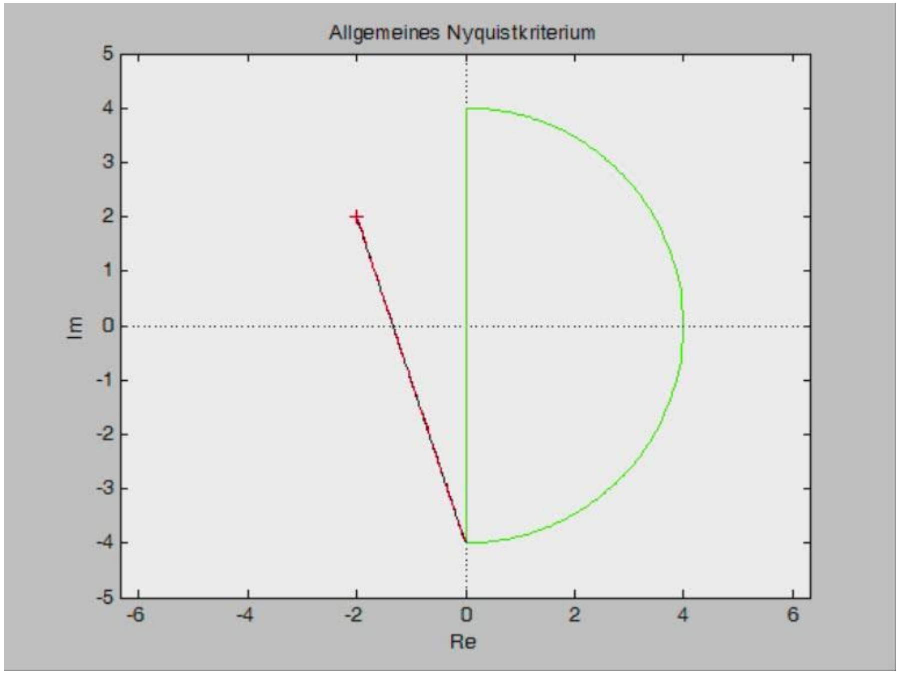


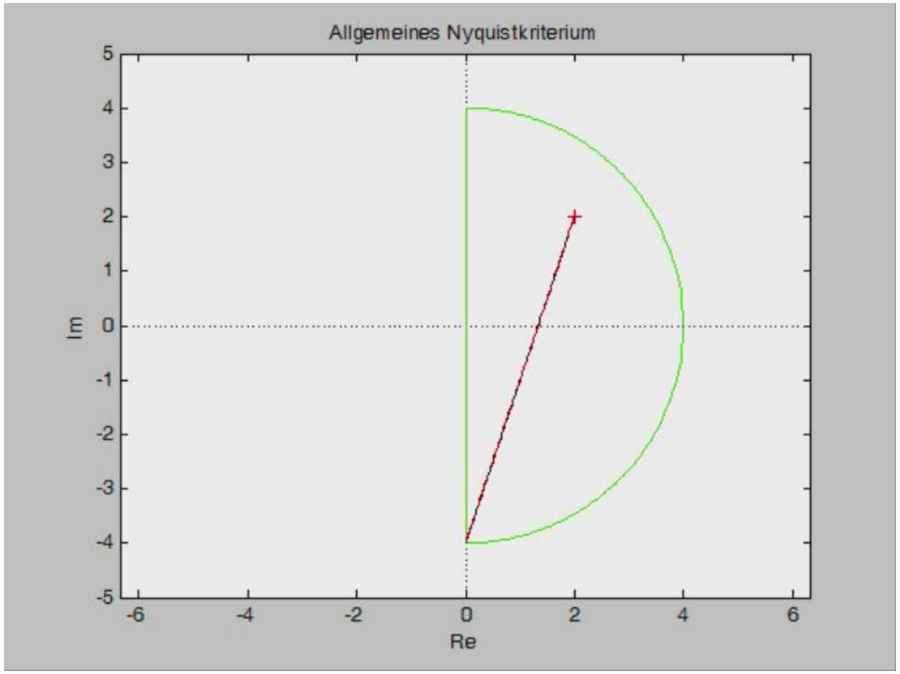
$$F_o(s) = \frac{5}{(2s+1)(5s^2+s+5)}$$

Netto-Winkeländerung = 2π

Tafelanschrieb 3.6 (1)

3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung (6)

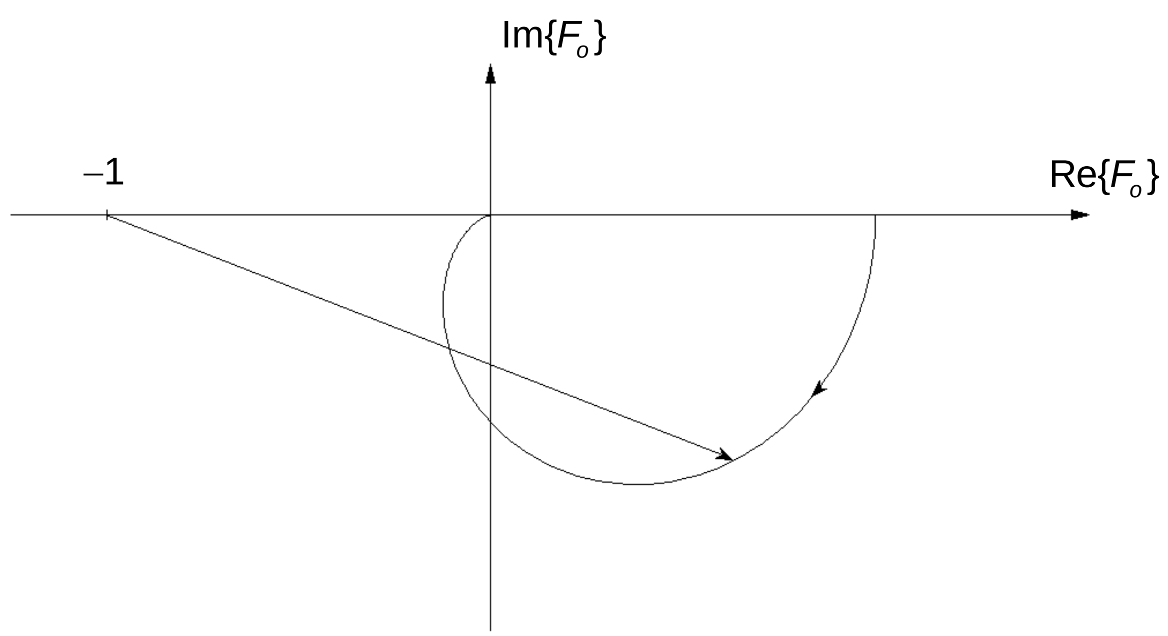




- Für ein stabiles offenes System gilt also tatsächlich:

  Die Netto-Winkeländerung des Fahrstrahls von -1 auf die Ortskurve ist Null

- Dies bedeutet offensichtlich, dass die Ortskurve den Punkt -1 nicht umwickelt:



3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung (8)

- Formalisierung:
  Für die Übertragungsfunktion $F_o(s)$ des offenen Kreises gelte:

$$F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} \cdot e^{-T_t s} \ , \ T_t \geq 0$$

$$\text{Grad}\{Z_o(s)\} = m, \ \text{Grad}\{N_o(s)\} = n \ , \ n > m$$

$$Z_o(s), \ N_o(s) \ \text{teilerfremd}$$

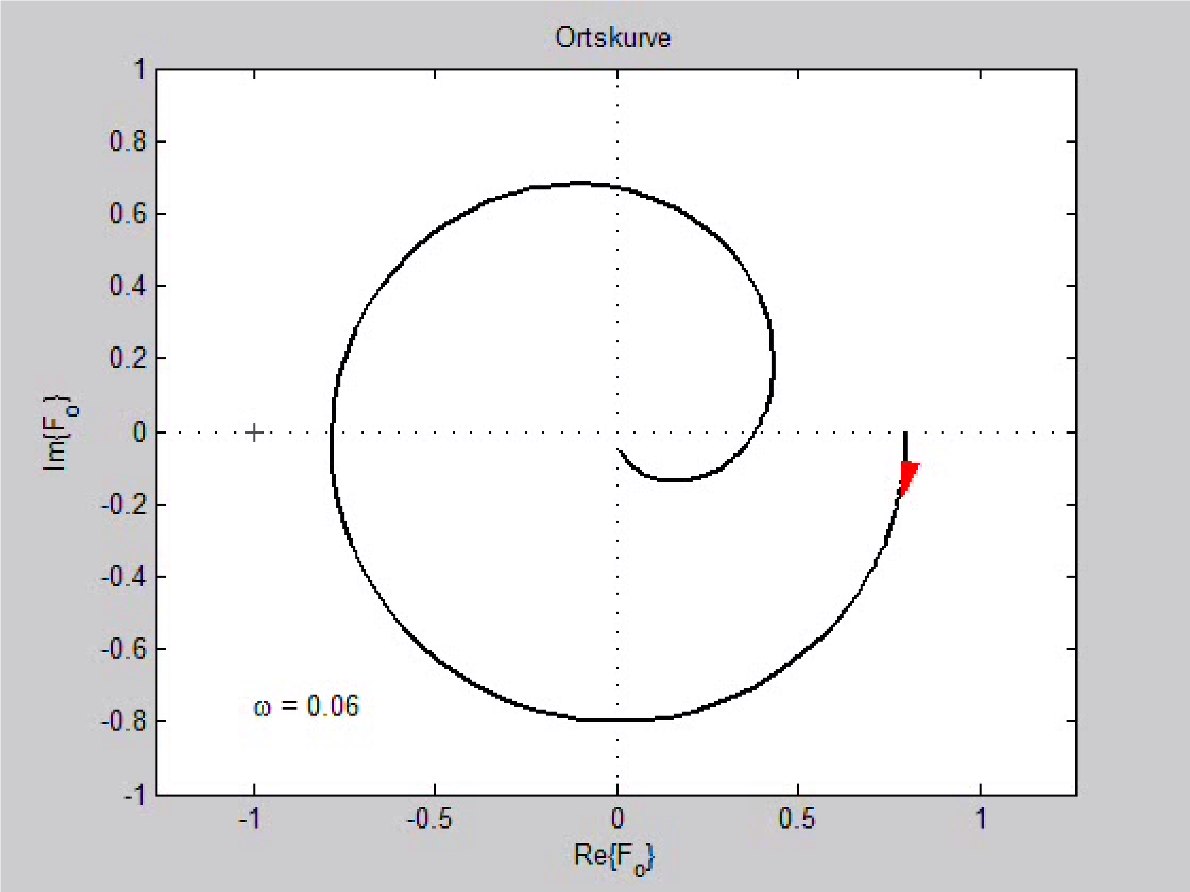
- Voraussetzung:
  Bis auf **maximal zwei Pole im Ursprung liegen alle Pole von $F_o(s)$ links von der imaginären Achse der komplexen Ebene**.

Nyquist-Kriterium für stabile offene Kette:

Der geschlossene Kreis ist genau dann **stabil, wenn** die Ortskurve $F_o(j\omega)$ (von $\omega = 0$ nach $\omega \to \infty$) **den kritischen Punkt $P_k = -1 + j0$ weder umkreist noch umschließt** („sie ihn links liegen lässt").

3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung (9)

- Beispiel: stabiles System $F_o(s) = \dfrac{2 \cdot (s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2+j)(s+2-j)}$



- Verhalten bei instabilem offenen System:
  Bsp. mit stabilem geschlossenen Kreis:

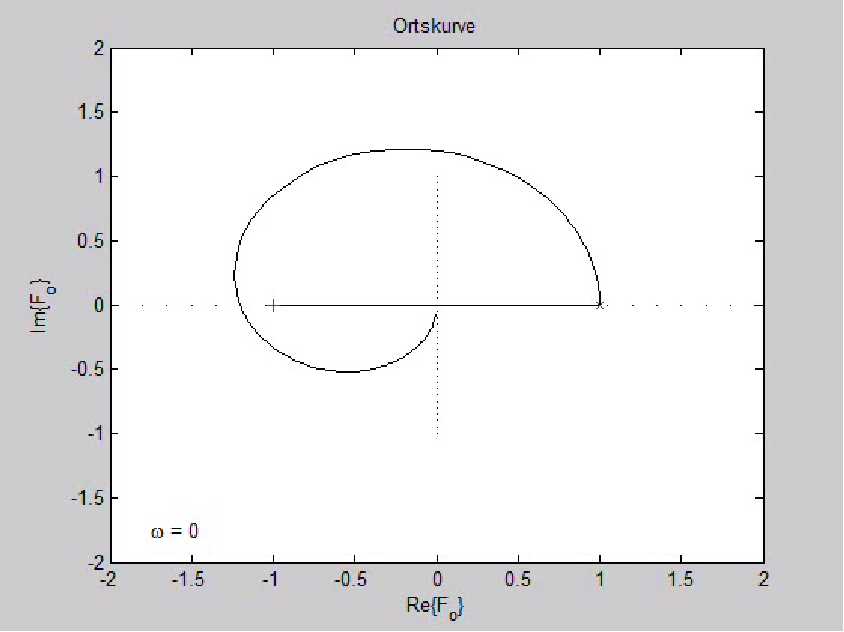
$$F_o(s) = \frac{6 \cdot (s+1)(s+2)}{(s-3)(s-2)(s+2)}$$

$\rightarrow$ 2 instabile Pole

Winkeländerung des Fahrstrahls $\Delta\Phi = 2\pi$

geschlossener Kreis:

$$G_W(s) = \frac{6 \cdot (s+1)(s+2)}{(s+2)(s^2+s+12)} \rightarrow \text{stabil}$$



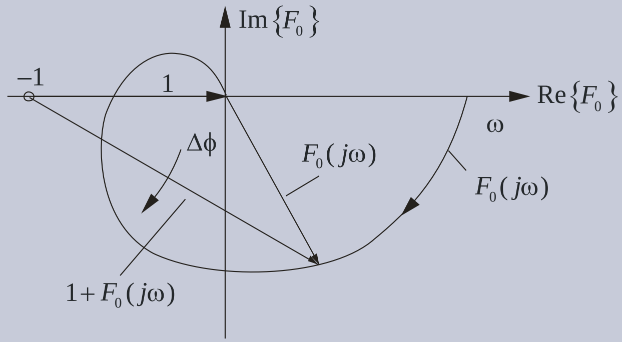
➔ Vermutung: Der geschlossene Kreis ist offensichtlich stabil, wenn die stetige Winkeländerung $\Delta\Phi$ des Fahrstrahls von -1 auf die Ortskurve π mal der Anzahl der instabilen Pole von F_O beträgt.

- Formalisierung:

Allgemeines Stabilitätskriterium nach Nyquist (auch für instabile offene Kette):

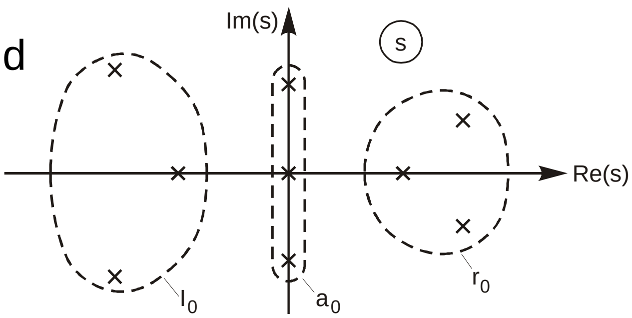
Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn die stetige Winkeländerung $\Delta\Phi$ des Fahrstrahls vom kritischen Punkt $P_k = -1 + j0$ zur $F_O(s)$-Ortskurve für $\omega = 0$ bis $\omega \to \infty$ den folgenden Wert annimmt:

$$\Delta\Phi_{stabil} = r_O \cdot \pi + a_O \cdot \frac{\pi}{2}$$

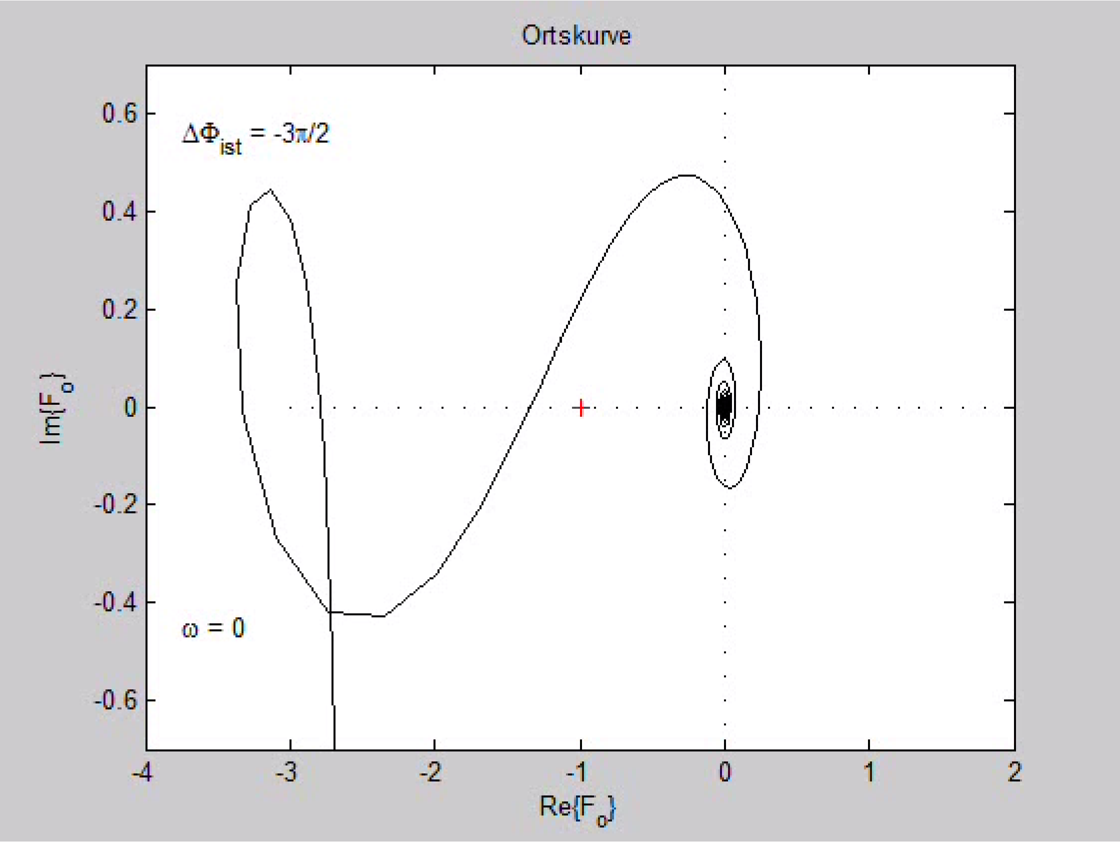


Dabei sind r_O und a_O die Anzahl der Pole von $F_O(s)$ auf und rechts der imaginären Achse, für die zusammen mit den l_O Polen links der imaginären Achse also gilt:

$$l_O + a_O + r_O = n$$



3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung (7)

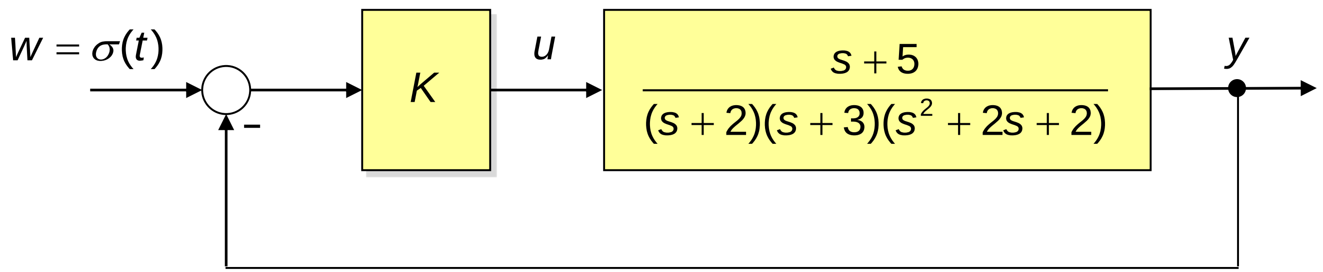


$$F_o(s) = \frac{-0.6375 \cdot (s-4)(s^2-2s+1.25)}{s(s+3)(s^2-0.5s+1.063)} \cdot e^{-1 \cdot s} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_{stabil} = \tfrac{5}{2}\pi \neq \Delta\Phi_{ist}$$

$\Rightarrow$ geschlossener Kreis instabil

3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.1 PC-Demo: Nyquistkriterium

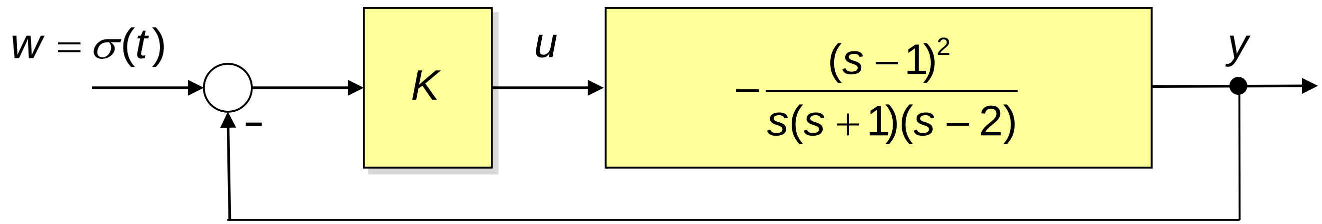
- Beispiel 1: spezielles Nyquist-Kriterium:



PC-Demo 3: Nyquistkriterium

3.6.1 PC-Demo: Nyquistkriterium (2)

- Beispiel 2: allgemeines Nyquist-Kriterium (spezielles Nyquist-Kriterium nicht anwendbar):



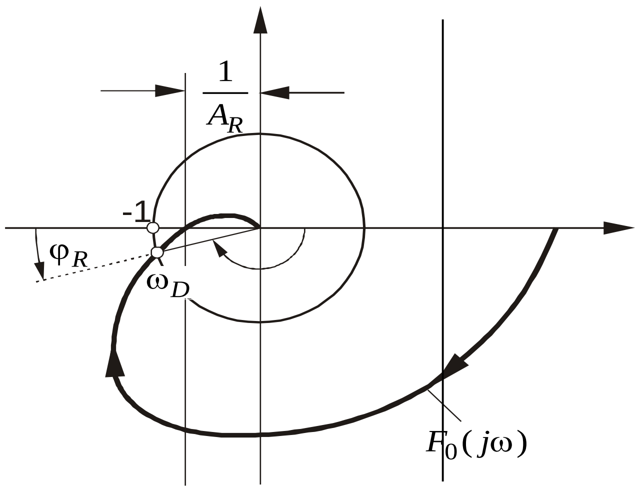
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

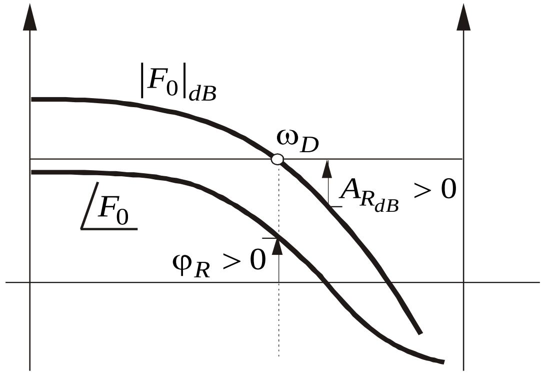
Karlsruher Institut für Technologie

- Nyquistkriterium
  - Ortskurvendarstellung
  - Bodediagrammdarstellung

3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.2 Spezielles Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung





3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.2 Spezielles Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (2)

- **Voraussetzungen für das spezielle Nyquistkriterium in Frequenzkennlinienform:**

  - $$F_O(s) = \frac{K}{s^q}\frac{1+\cdots}{1+\cdots}e^{-T_t s} = \frac{Z_O(s)}{N_O(s)}e^{-T_t s} \quad , T_t \geq 0$$

    sei die Übertragungsfunktion des offenen Kreises mit $K > 0$;
    $q = 0,1,2$ und $Grad\left(Z_O(s)\right) < Grad\left(N_O(s)\right)$
    $Z_O(s)$, $N_O(s)$ teilerfremd

  - Bis auf **maximal zwei Pole im Ursprung** liegen **alle Pole von** $F_O(s)$ **links** der imaginären Achse der komplexen Ebene und die Betragskennlinie $\left|F_O(j\omega)\right|_{dB}$ gehe **genau einmal** durch 0 dB.

  - Für $\left|F_O(j\omega)\right|_{dB} \geq 0$ gelte $-540° < \angle F_O(j\omega) < 180°$.

3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.2 Spezielles Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (3)

Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung für eine stabile offene Kette:

Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn $F_O(j\omega)$ für die Durchtrittsfrequenz ω_D d.h. bei $\left|F_o(j\omega)\right|\Big|_{dB} = 0$, den Phasenwinkel $\varphi_D(\omega_D) = \arg\left\{F_o(j\omega_D)\right\} > -180°$ hat.

Das ist gleichbedeutend damit, dass der **Phasenrand $\varphi_R > 0$** bzw.

der **Amplitudenrand $A_R > 1$** ist.

- Dabei gelten folgende Definitionen:

Def.: **Phasenrand (Phasenreserve):**

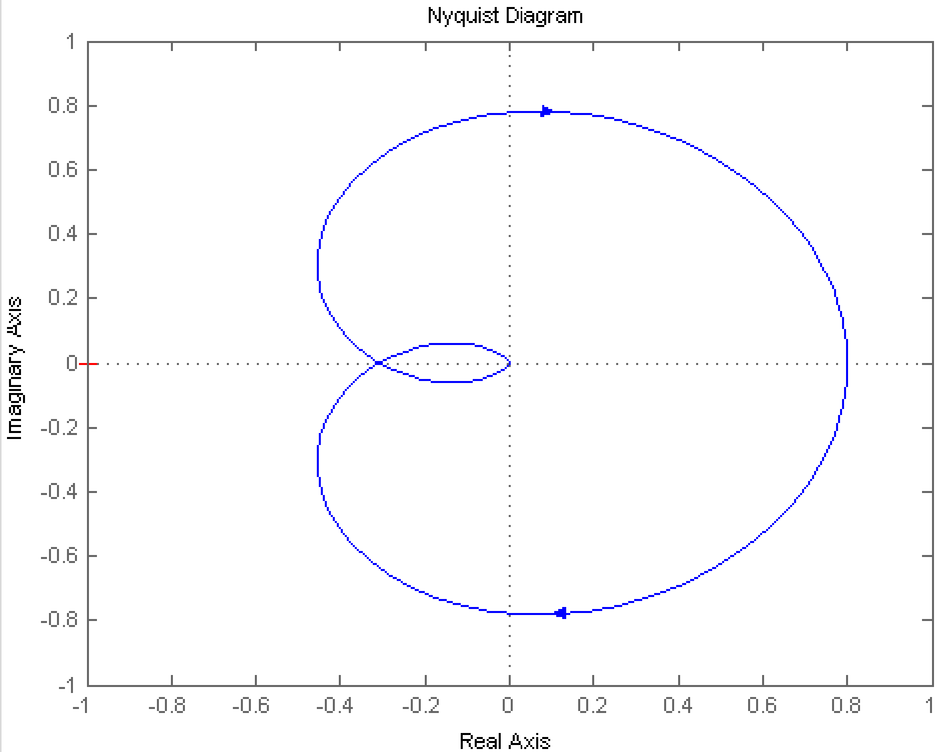
Der Phasenrand $\boldsymbol{\varphi_R}$ ist der auf -180° bezogene Phasenwinkel von $F_O(j\omega)$ für die Durchtrittsfrqeuenz ω_D.

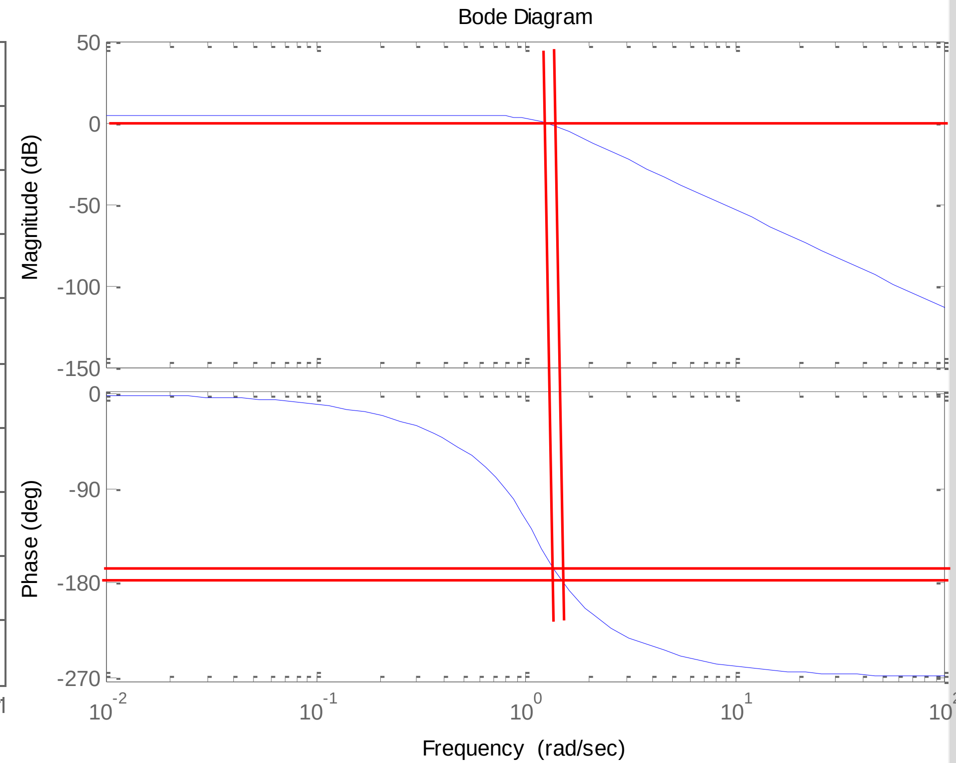
Def.: **Amplitudenrand (Amplitudenreserve):**

Der Amplitudenrand $\boldsymbol{A_R}$ ist die zusätzliche Verstärkung des offenen Kreises, die den geschlossenen Kreis an die Stabilitätsgrenze bringt, d.h. $\left|F_o(j\omega)\right|_{\varphi=-180°} \cdot A_R = 1$.

- **Beispiel für ein stabiles System**

$$F_O(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0{,}5-j)(s+0{,}5+j)}$$

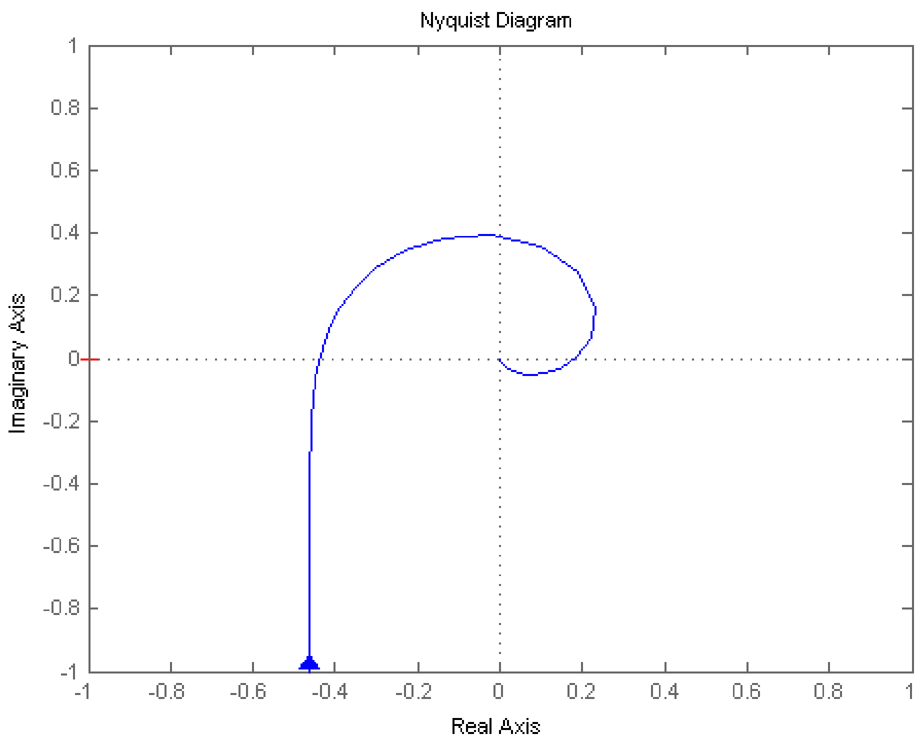


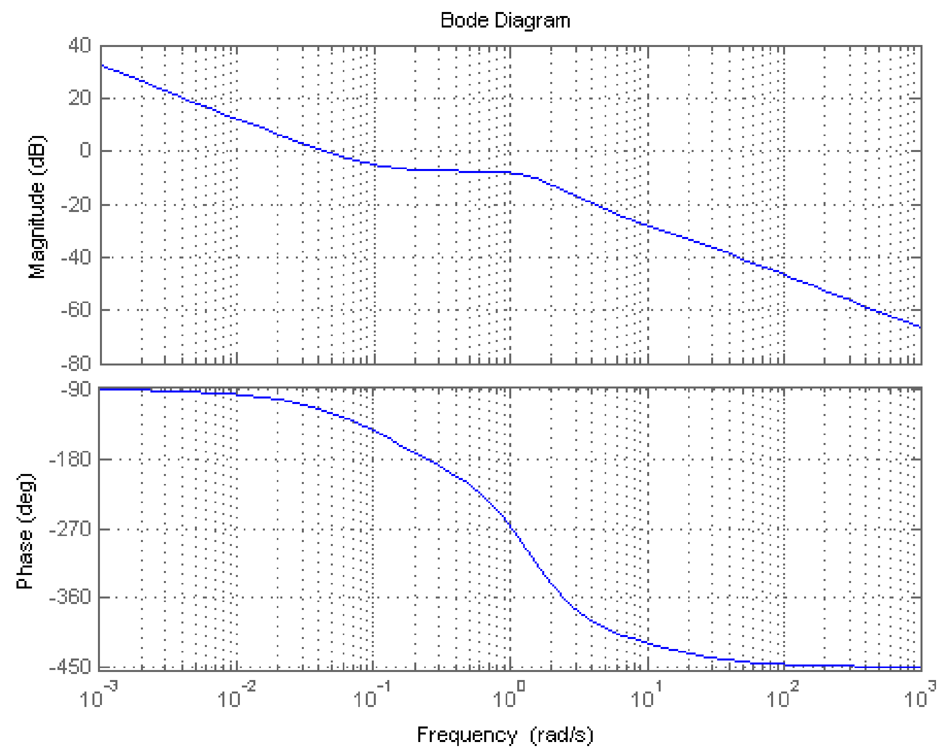


3.6.3 Bsp: Anwendung des Nyquist-Kriteriums (2)

- **Beispiel für ein kompliziertes, nichtminimalphasiges System**

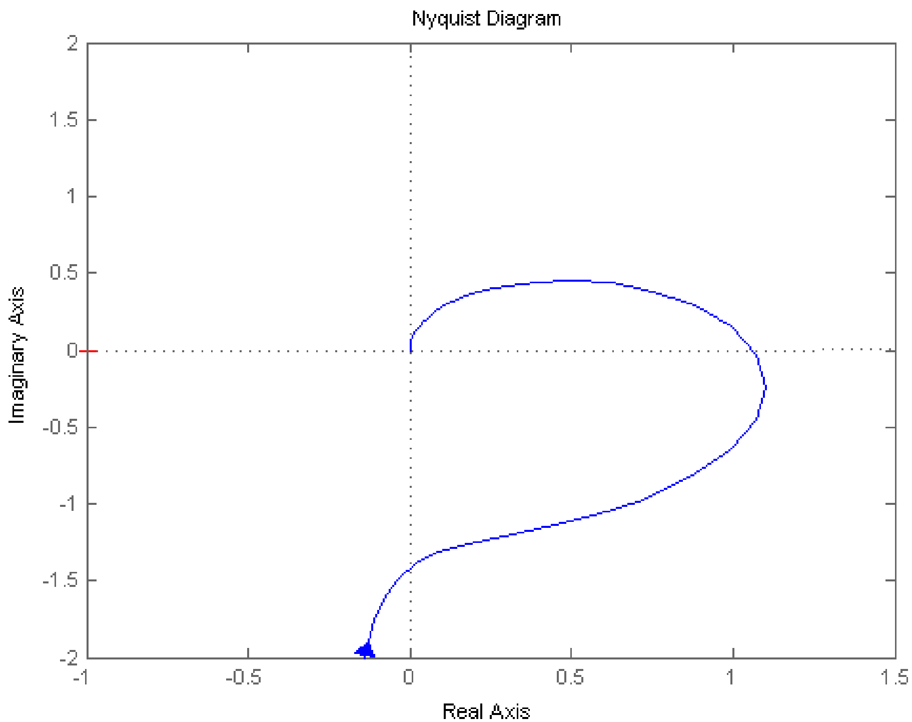
$$F_O(s) = 0.5\frac{(s-0.1)(s-2)(s+5-j)(s+5+j)}{s(s+10)(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

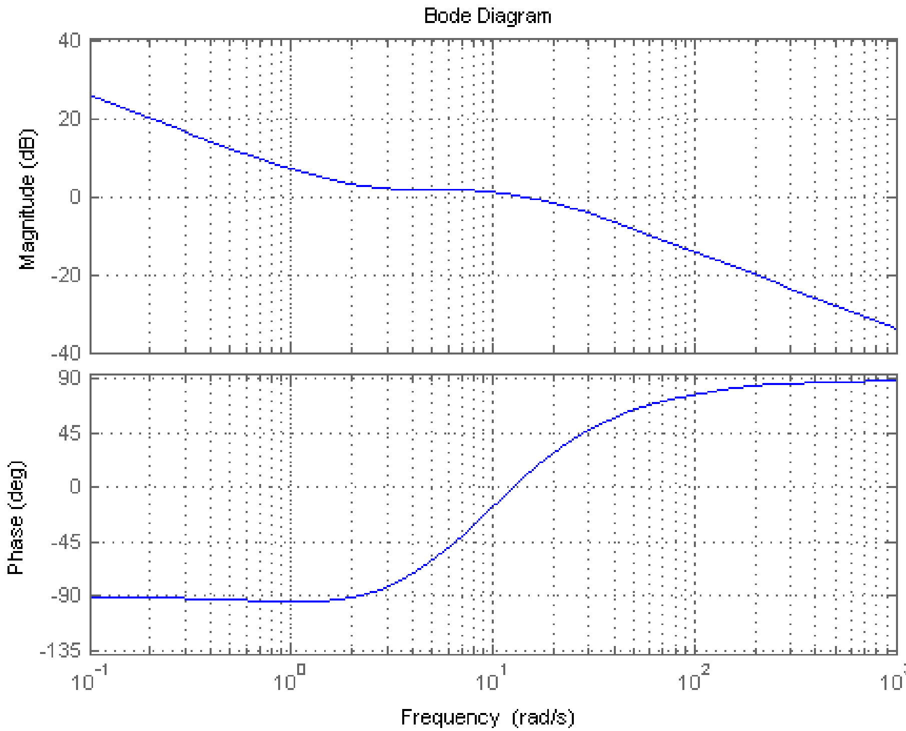




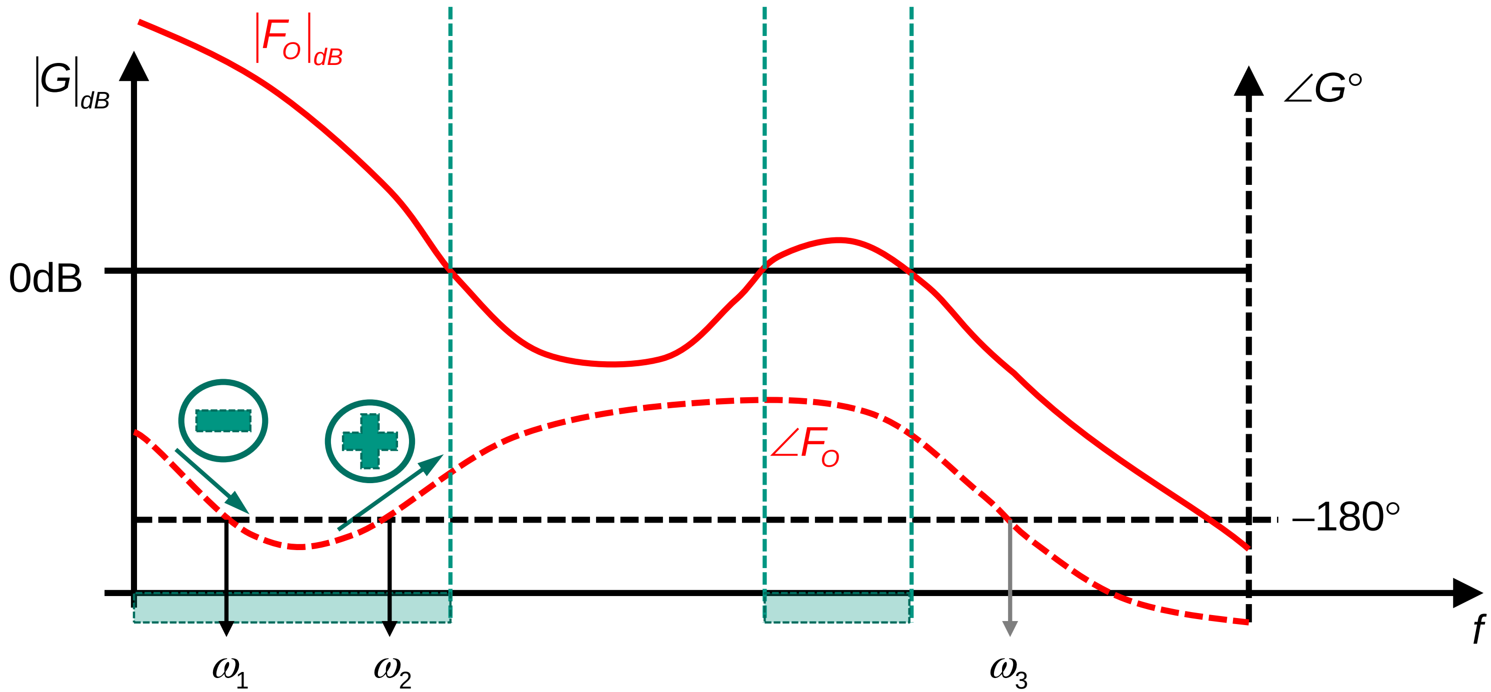
- **Beispiel für ein instabiles System**

$$F_O(s) = \frac{-20(s+5)(s-2)}{s(s-10-j)(s-10+j)}$$





3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.4 Allgemeines Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung



Def.: **positive (negative) Schnitte:**

Ein positiver (negativer) Schnitt liegt vor, wenn $|F_O|_{dB}>0$ und die Phase $\angle F_O$ die -180°-Linie mit steigender (fallender) Tangente schneidet.

Bei Systemen mit I²-Verhalten (beginnen bei -180°) zählt der Startpunkt als halber Schnitt

3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.4 Allgemeines Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (2)

- **Voraussetzung für das allgemeine Nyquistkriterium in Frequenzkennlinienform:**

$$F_O(s) = \frac{K}{s^q}\frac{1+\cdots}{1+\cdots}e^{-T_t s} = \frac{Z_O(s)}{N_O(s)}e^{-T_t s}$$

sei die Übertragungsfunktion des offenen Kreises mit

$K > 0; \qquad q = 0,1,2$ und $Grad\left(Z_O(s)\right) < Grad\left(N_O(s)\right)$

Bis auf maximal zwei Pole im Ursprung liegen alle Pole von $F_O(s)$ links oder rechts der imaginären Achse (jedoch nicht auf ihr)

3.6 Graphische Stabilitätskriterien
3.6.4 Allgemeines Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (3)

Das allgemeine Nyquistkriterium in Frequenzkennlinienform:

Der Regelkreis unter den Voraussetzungen ist stabil, wenn:

1. Für $\left|F_O(j\omega)\right|_{dB} = 0$ niemals $\angle F_O(j\omega) = (2\nu + 1)180°$ mit ν ganzzahlig

2. Die Differenz der Anzahl positiver und negativer Schnittpunkte

   $\dfrac{r_O}{2}$ falls $q = 0{,}1$,

   $\dfrac{r_O + 1}{2}$ falls $q = 2$,

   wobei r_O die Anzahl der Pole der offenen Kette rechts der imaginären Achse bezeichnet.

Andernfalls ist er instabil !

⇒ Der Regelkreis ist sicher instabil, wenn die Anzahl der instabilen Pole des offenen Kreises eine ungerade Zahl ist.