

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Vorlesung: Systemdynamik und Regelungstechnik

Kapitel 2

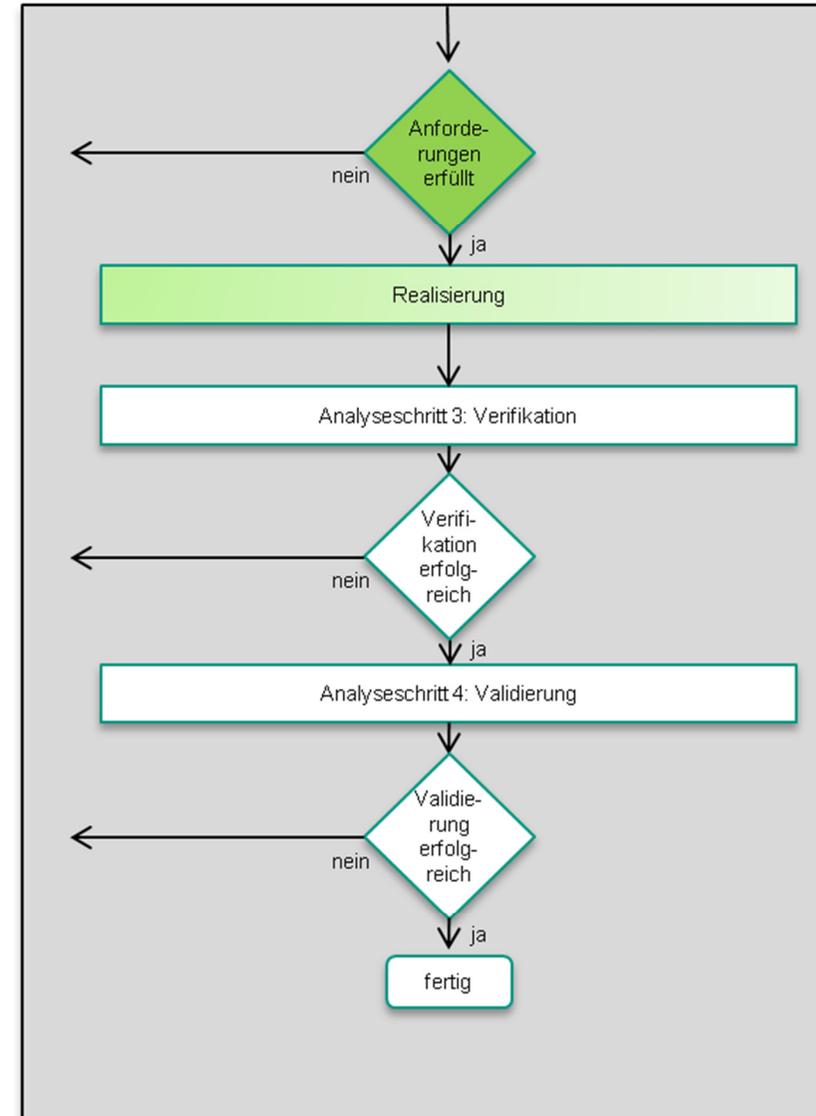
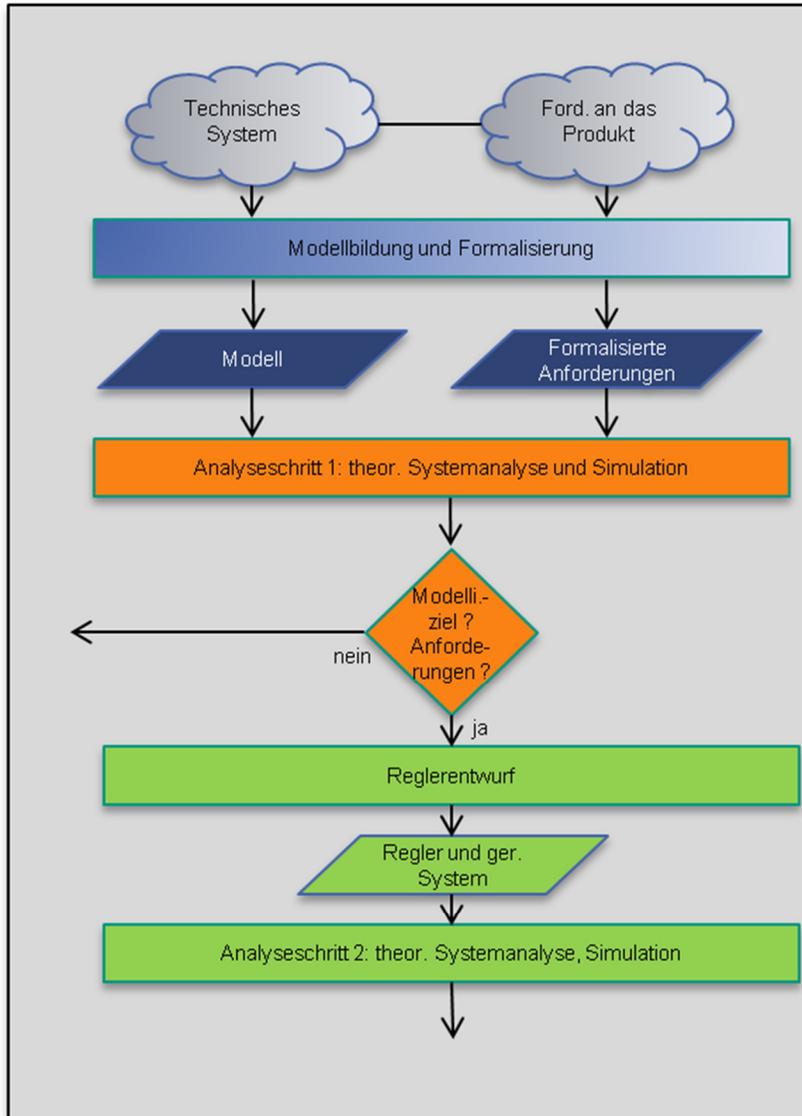
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann

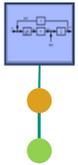




Einordnung in den Gesamtentwurf

Übersicht





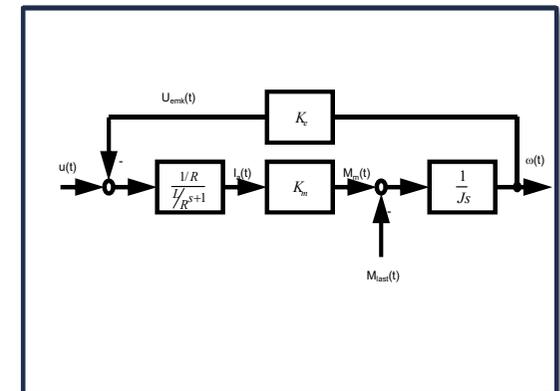
1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

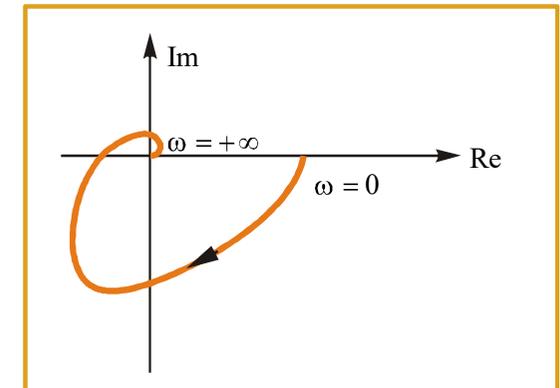
1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Analoge und digitale Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise





3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



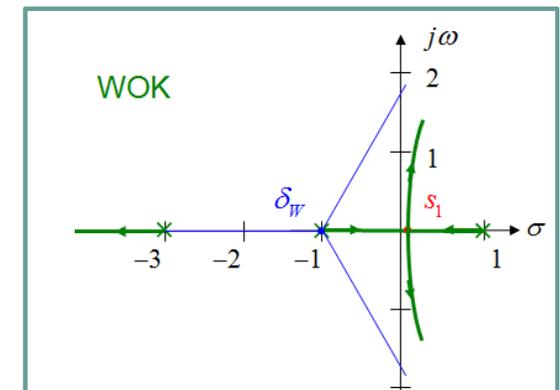
4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Forderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Entwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren
5. Entwurf mit dem Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.1 Charakterisierung des Systems nach Vorgängen

- Kontinuierliche Vorgänge in technischen Prozessen

| | |
|-----------------------|---|
| Kennzeichen | Vorgänge, bei denen zeitabhängige kontinuierliche Prozessgrößen auftreten |
| Prozessgrößen | physikalische Größen mit (zumindest stückweise) kontinuierlichem Wertebereich |
| Beispiele | Erzeugungsvorgänge, Umformungsvorgänge, Bewegungsabläufe usw. |
| mathematische Modelle | Differentialgleichungen (Zeit als unabhängige Variable), Übertragungsfunktionen |



2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.1 Charakterisierung des Systems nach Vorgängen (2)

- Sequentielle Vorgänge in technischen Prozessen

| | |
|-----------------------|--|
| Kennzeichen | Vorgänge, bei denen Folgen von verschiedenen, unterscheidbaren Prozesszuständen auftreten |
| Prozessgrößen | Binäre Prozessgrößen, die das Eintreten der diskreten Prozesszustände melden oder bewirken, sowie kontinuierliche physikalische Größen, die den Prozesszuständen zugeordnet sind |
| Beispiele | Folgen von Prozesszuständen beim An- oder Abfahren einer Turbine, Folgen von Zuständen bei der Fahrt eines Aufzugs, Folgen von Zuständen bei der Geräteprüfung in einem Prüffeld |
| mathematische Modelle | Flussdiagramme, Funktionspläne nach DIN 40719, Zustandsmodelle, Petri-Netze |



2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.1 Charakterisierung des Systems nach Vorgängen (3)

- Objektbezogene Vorgänge in technischen Prozessen

| | |
|-----------------------|---|
| Kennzeichen | Vorgänge, bei denen einzeln identifizierbare Objekte umgeformt, transportiert oder gespeichert werden |
| Prozessgrößen | Physikalische Größen mit kontinuierlichem Wertebereich oder nichtphysikalische Größen (wie z.B. Typ, Bauart, Verwendungszweck, Lager-Nr. usw.), die den Objekten zugeordnet sind, sowie binäre Prozesszustände, die die Zustandsänderungen von Objekten auslösen oder melden. |
| Beispiele | Vorgänge bei der Fertigung von Teilen, Verkehrsvorgänge, Lagervorgänge, Informationsvorgänge in Rechnern |
| mathematische Modelle | Simulationsmodelle, Warteschlangenmodelle, Graphen, Petri-Netze |

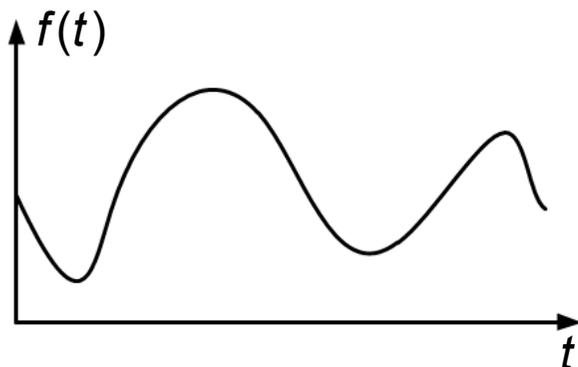


2.1 Einführung und Grundbegriffe

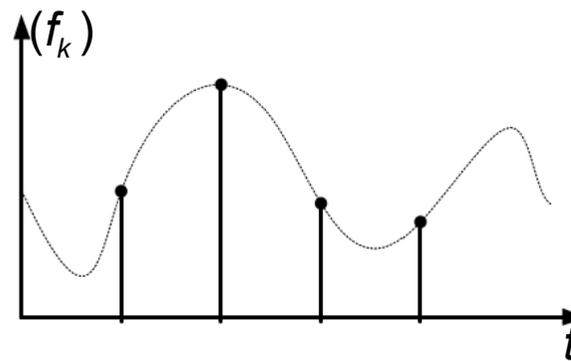
2.1.2 Charakterisierung des Systems nach M_t

- In dieser Vorlesung werden zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Signale betrachtet
- Also $M_t \in \mathbb{Z}$ bzw. $M_t \in \mathbb{R}$

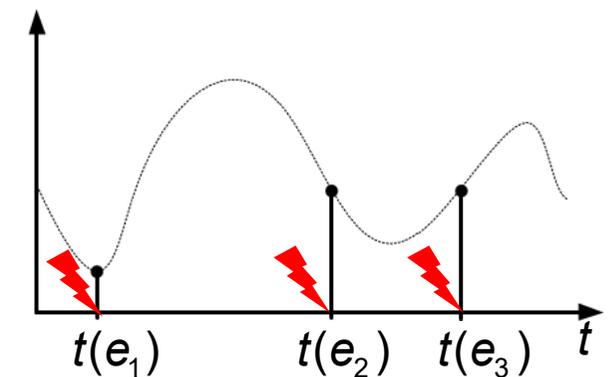
wert- und zeitkontinuierlich



wertkontinuierlich,
zeitdiskret



wertkontinuierlich,
ereignisdiskret





2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.3 Charakterisierung des Systems nach den Räumen D_u , D_y

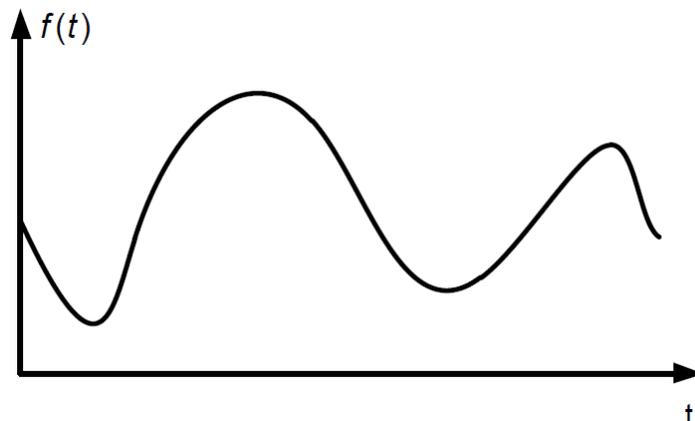
- In SRT: Systeme mit einer Eingangsgröße und unbeschränkter wertkontinuierlicher Steuergröße

$$D_u \in \mathbb{R}$$

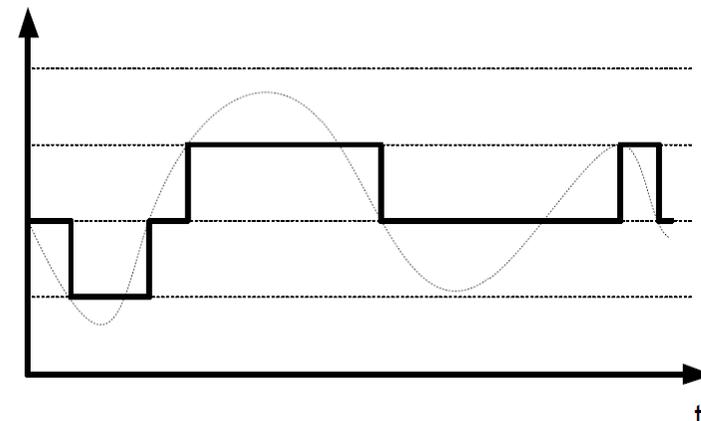
- Sowie Systeme mit einer Ausgangsgröße und unbeschränkter wertkontinuierlicher Ausgangsgröße

$$D_y \in \mathbb{R}$$

wert- und zeitkontinuierlich



wertdiskret, zeitkontinuierlich



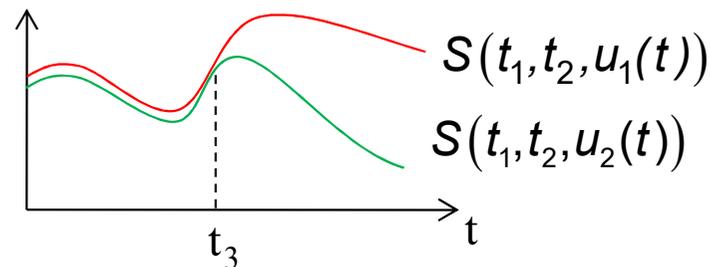
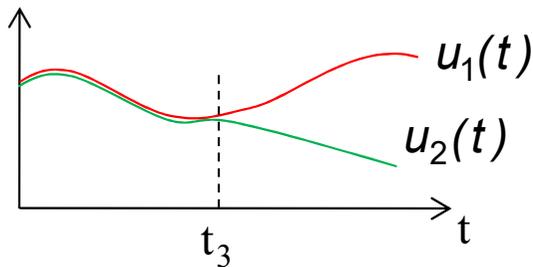


2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.4 Charakterisierung des Systems nach den

Eigenschaften der Abbildungsvorschrift $S : D_S \rightarrow D_y$

- **Kausal**, wenn $S(t_1, t_2, u_1(t)) = S(t_1, t_2, u_2(t))$ für $u_1(t) = u_2(t)$ mit $t \leq t_3$, u_1, u_2 beliebig



- **Zeitinvariant**, wenn $S|_{t-\tau} = S|_{u(t-\tau)}$ und $(t_1 + \tau, t_2 + \tau, u(t - \tau)) \in D_S$
- **Linear**, wenn für $u(t) = k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t) \Rightarrow S = k_1 S_1 + k_2 S_2$
- **Konzentriert (bzw. mit konzentrierten Parametern)**, wenn sich das System aus einer endlichen Anzahl, räumlich getrennten, punktkonzentrierten Elementen zusammensetzt. (Gegenteil: Systeme mit verteilten Parametern)

Tafelanschrieb 2.1 (1)

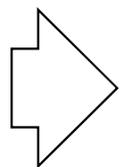
Lineare DGL



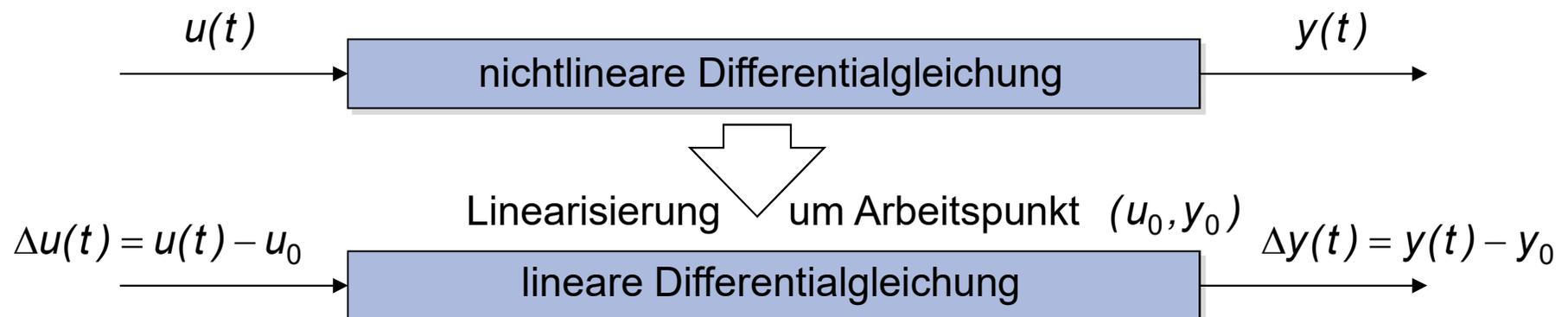
2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.5 Linearisierung nichtlinearer Differentialgleichungen

- Aufgrund der sehr häufig vorhandenen nichtlinearen Beziehungen (z.B. Kennlinien, Begrenzungen) Nichtlinearitäten fast immer in Modellen enthalten
- Probleme:
 - In der Regel schwer oder überhaupt nicht analytisch lösbar
 - Regelungsentwurf deutlich aufwändiger
- Abhilfe: Beschränkung auf Beschreibung des Kleinsignalverhaltens (= Verhalten in der Umgebung eines Betriebs- oder Arbeitspunktes)



Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung:





2.1 Einführung und Grundbegriffe

2.1.5 Linearisierung nichtlinearer Differentialgleichungen (2)

- 1) Ausgangspunkt: nichtlineare Differentialgleichung

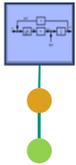
$$f(u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots) = 0$$

- 2) Wahl eines Arbeitspunkts (u_0, y_0) als stationärer Zustand des Systems (= Punkt, an dem alle Ableitungen im System verschwinden):

$$f(u_0(t), 0, 0, \dots, y_0(t), 0, 0, \dots) = 0$$

- 3) Berechnung der Taylorentwicklung der Differentialgleichung um (u_0, y_0) und Streichen aller Terme von quadratischer und höherer Potenz:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(u_0, y_0)} \Delta u(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \Big|_{(u_0, y_0)} \Delta \dot{u}(t) + \frac{\partial f}{\partial \ddot{u}} \Big|_{(u_0, y_0)} \Delta \ddot{u}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(u_0, y_0)} \Delta y(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Big|_{(u_0, y_0)} \Delta \dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \Big|_{(u_0, y_0)} \Delta \ddot{y}(t) + \dots = 0$$



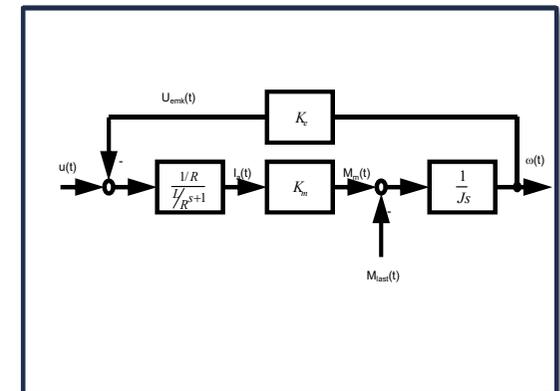
1. Einführung

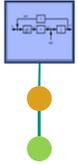
1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

1. Einführung und Grundbegriffe
- 2. Das Signalflussbild**
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Analoge und digitale Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise



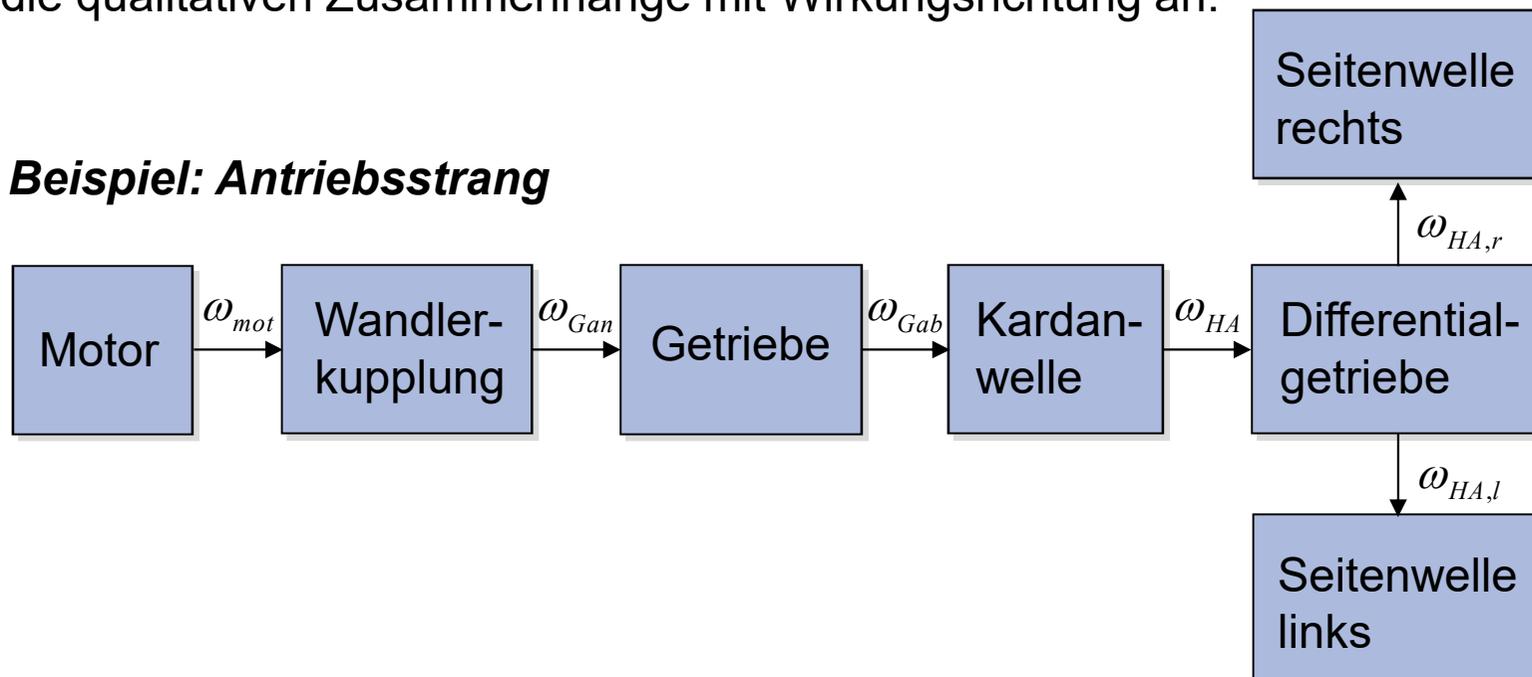


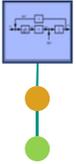
2.2 Das Signalflussbild

Definition:

- **Blockschaltbild:**
dient zur Kennzeichnung der kausalen Verknüpfungen der Signale in unterschiedlichen Abstraktionsebenen. (Strukturierung)
- **Geräteblockschaltbild:**
zeigt die qualitativen Zusammenhänge mit Wirkungsrichtung an.

Beispiel: Antriebsstrang



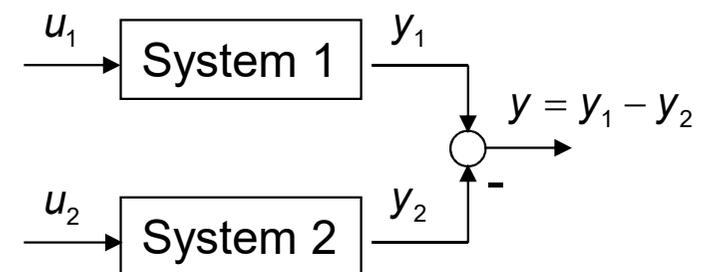
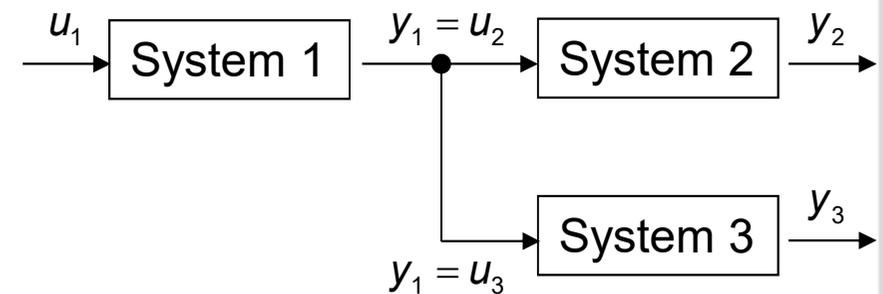


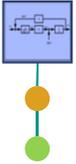
2.2 Das Signalflussbild

Signalflussbild: feinere Blockschaltbildauflösung bei der Systemverknüpfung

| Symbol | Bedeutung |
|--------|--|
| | Signal $x(t)$ mit gerichtetem Wirkungssinn (Argument t wird in der Regel nicht explizit angegeben) |
| | Verzweigungsstelle des Signals x_e $x_1 = x_2 = x_3 = x_e$ |
| | |
| | Signalumkehr $x_a = -x_e$ (Sonderfall der Additionsstelle) |

Beispiele:

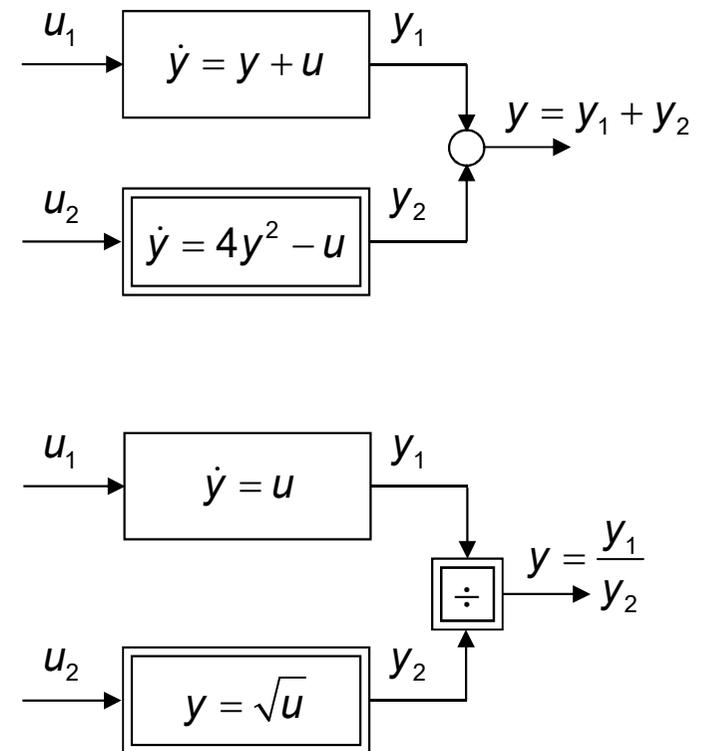


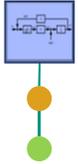


2.2 Das Signalflussbild

| Symbol | Bedeutung |
|--------|---|
| | Übertragungsglied, das X_e und X_a über eine lineare Funktion verknüpft |
| | Übertragungsglied, das X_e und X_a über eine nicht-lineare Funktion verknüpft |
| | Signalmultiplikation $X_a = X_{e1} \cdot X_{e2}$ |
| | Signaldivision $X_a = \frac{X_{e1}}{X_{e2}}$ |

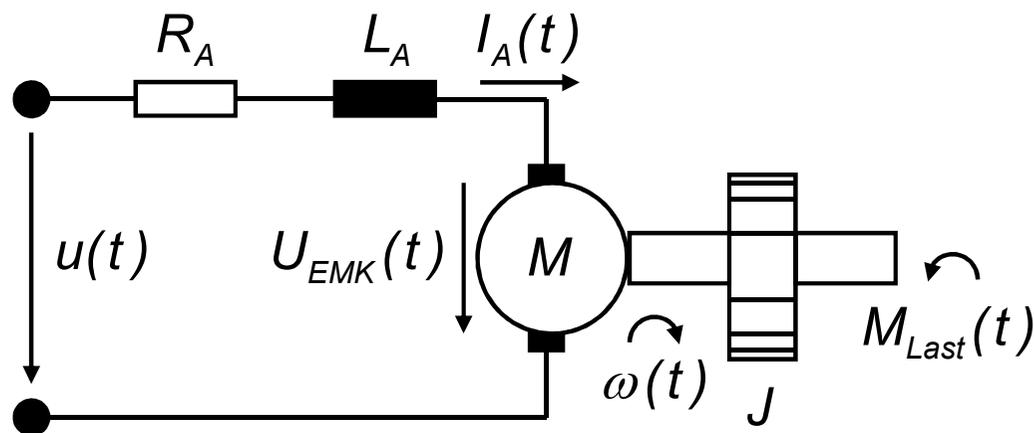
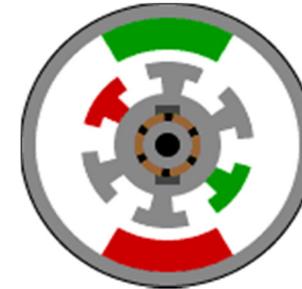
Beispiele:





2.2 Das Signalflossbild (Beispiel 1)

Bremsregelsystem mit mechanisch kommutierter Gleichstrommaschine



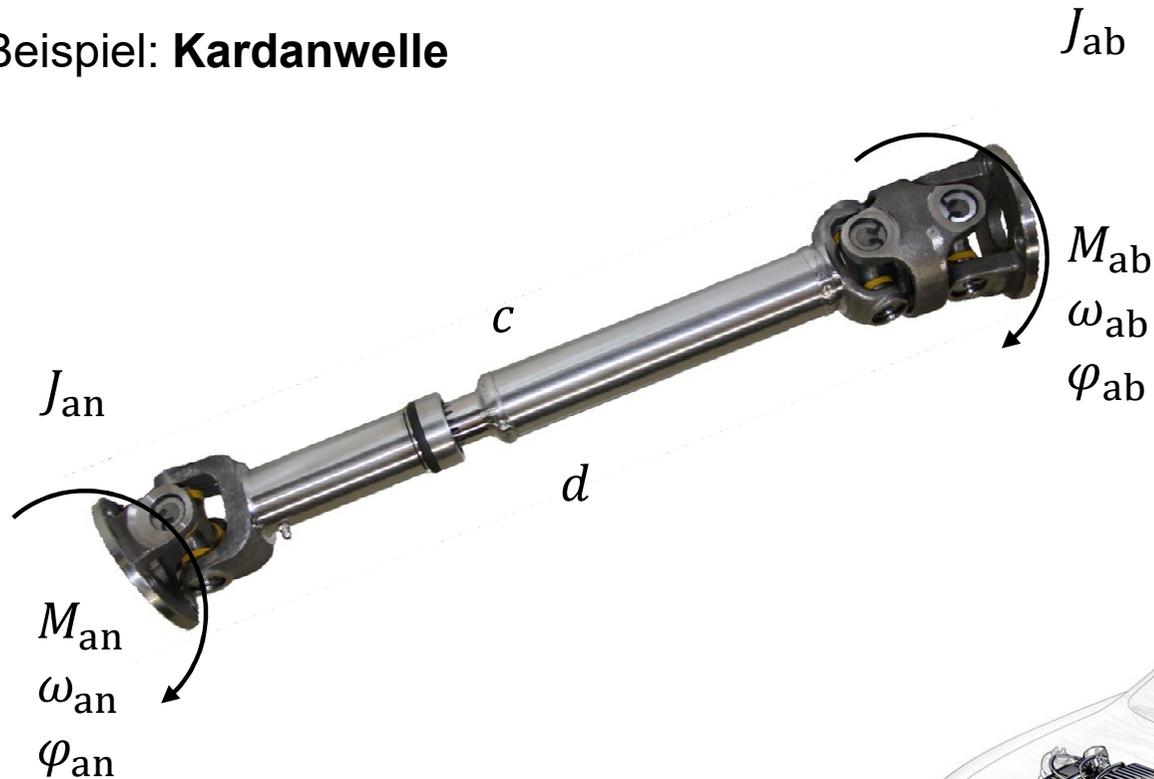
Tafelanschrieb 2.2 (1a)

Beispiel Gleichstrommaschine

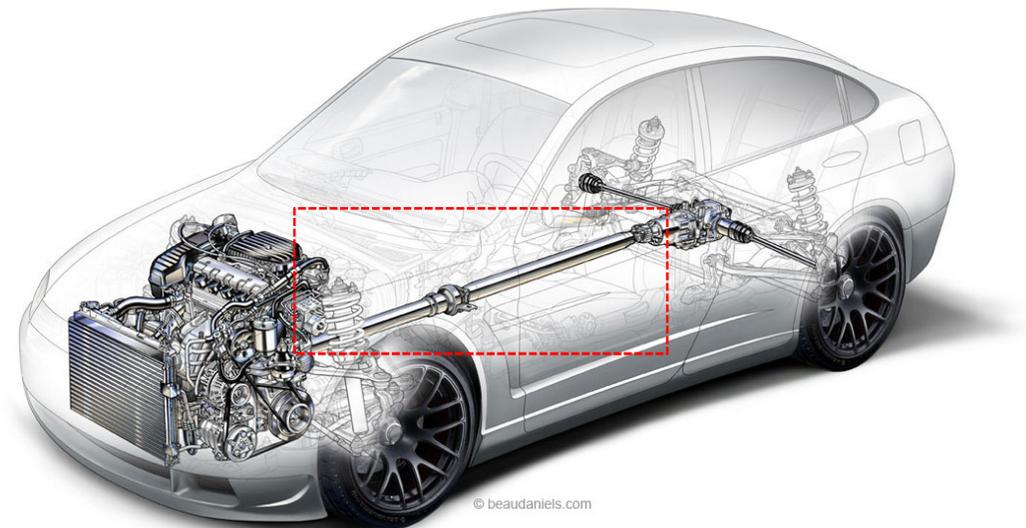


2.2 Das Signalflussbild (Beispiel 2)

Beispiel: Kardanwelle



c : (Torsions-)Federkonstante
 d : (Torsions-)Dämpfungskonstante



Fahrzeug mit Standard-/Hinterradantrieb



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.1 Allgemeine Lösung linearer Differentialgleichungen

ab jetzt: **Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

$$\begin{array}{c}
 u(t) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overset{(n)}{a_n} y(t) + \overset{(n-1)}{a_{n-1}} y'(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m \overset{(m)}{u^{(m)}}(t) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 y(t) \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

a_i, b_j ($i = 0 \dots n, j = 0 \dots m$) reelle Koeffizienten

($a_n \neq 0$, mindestens ein $b_j \neq 0$, n : Ordnung der Differentialgleichung)

Beispiel: Kardanwelle

$$J_{an} \dot{\omega}_{an}(t) = M_{an} - c(\varphi_{an}(t) - \varphi_{ab}(t)) - d(\omega_{an}(t) - \omega_{ab}(t)) \quad (1)$$

$$J_{ab} \dot{\omega}_{ab}(t) = c(\varphi_{an}(t) - \varphi_{ab}(t)) + d(\omega_{an}(t) - \omega_{ab}(t)) - M_{ab} \quad (2)$$

\Downarrow Annahme: $J_{an} = J_{ab} = J$, Umbenennung: $\omega_{an}(t) - \omega_{ab}(t) = y(t)$, $M_{an} + M_{ab} = u(t)$
 $(1) - (2)$ und differenziert

$$J \ddot{y}(t) = \dot{u}(t) - 2cy(t) - 2d\dot{y}(t) \quad \text{bzw.} \quad J \ddot{y}(t) + 2d\dot{y}(t) + 2cy(t) = \dot{u}(t)$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.1 Allgemeine Lösung linearer Differentialgleichungen

gesucht: Ausgangsgröße $y(t)$ (=Lösung) der Differentialgleichung bei

- gegebenen Anfangswerten
- gegebener Eingangsgröße $u(t)$

Problem: komplizierter mathematischer Lösungsweg

1. Allgemeiner Exponential-Ansatz für $y(t)$
2. Bestimmung der allgemeinen Lösung $y_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung ($u(t) \equiv 0$), die noch unbestimmte Konstanten enthält
3. Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung ($u(t) \neq 0$)
4. Gesamtlösung ergibt sich als $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

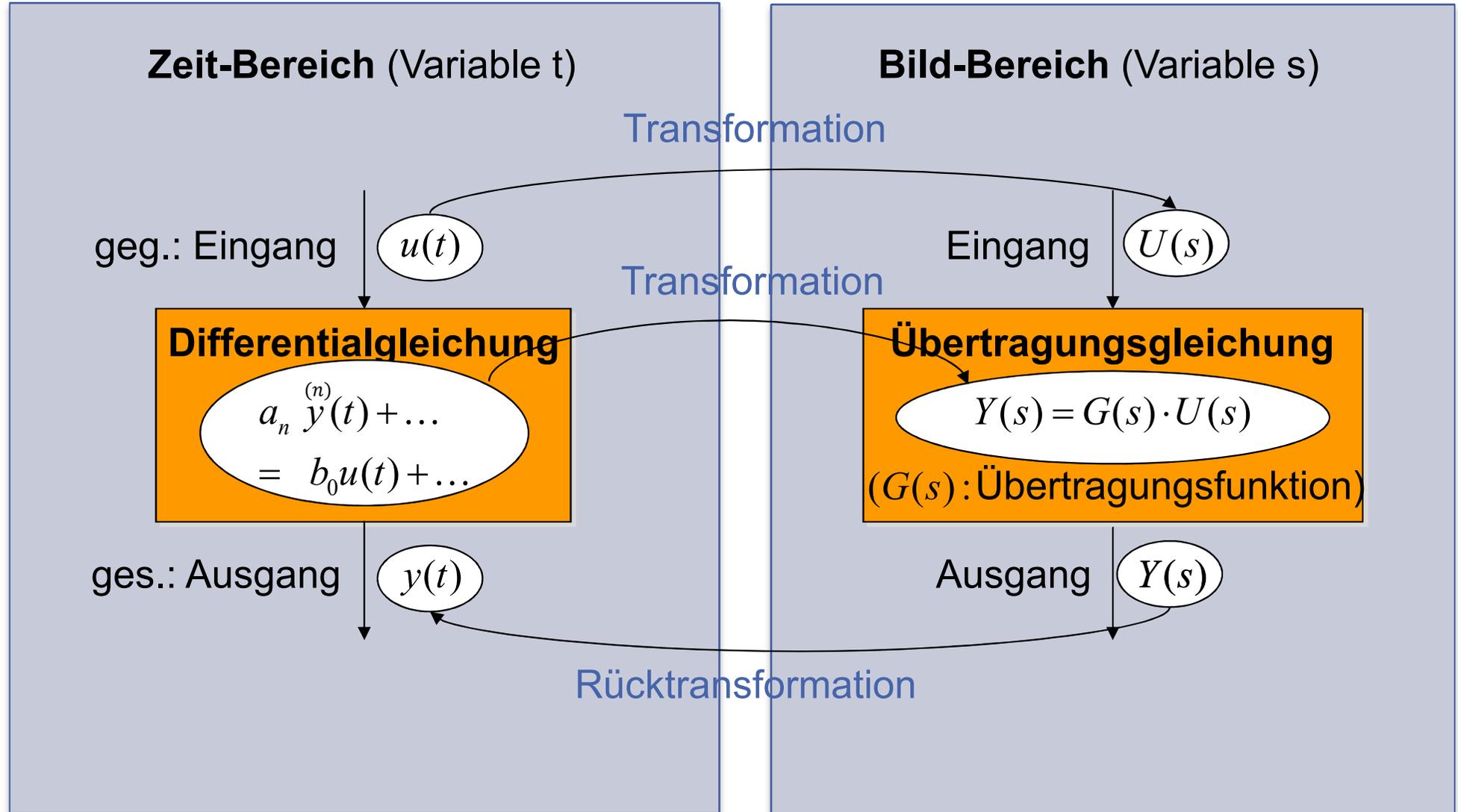
Abhilfe: **Laplace-Transformation**

= Integraltransformation, mit der eine Zeitfunktion $f(t)$ (= Originalfunktion) in eine Funktion $F(s)$ (= Bildfunktion) einer neuen komplexen Variablen $s = \eta + j\omega$ transformiert werden kann:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.2 Prinzip und Definition der L-Transformation





2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.2 Prinzip und Definition der L-Transformation

Def: **Laplace-Transformation**

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s)$$

s : komplexe Variable $s = \eta + j\omega$

Laplace-Integral **Laplace-Transformierte**

Symbolik:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Originalfunktion $f(t)$ $\circ \longrightarrow \bullet$ $F(s)$ Bildfunktion

Beispiel: $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{1}{(s-\alpha)} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{(s-\alpha)} \cdot 1 = \frac{1}{(s-\alpha)}$

also: $e^{\alpha t} \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{s-\alpha}$, falls $Re\{s - \alpha\} > 0$

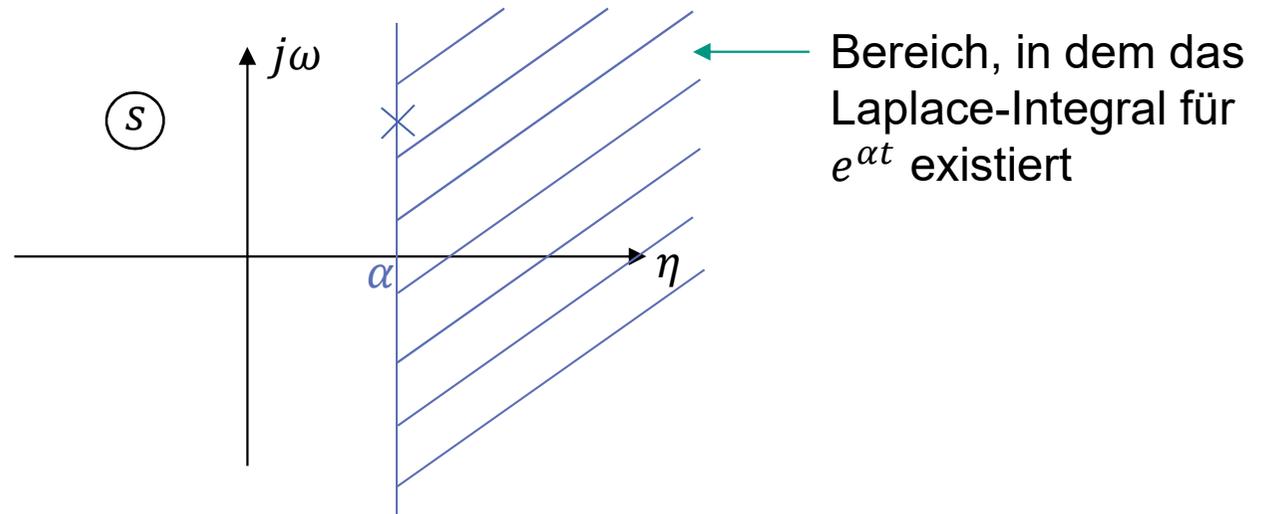


2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.2 Prinzip und Definition der L-Transformation

Konvergenz:

In dem Beispiel: Das Laplace-Integral ist konvergent in einer rechten Halbebene.



Es gilt nun allgemein:

Satz:

Das Laplace-Integral ist absolut konvergent in einer rechten Halbebene der s-Ebene; d.h.:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt \text{ existiert}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.2 Prinzip und Definition der L-Transformation

Konvergenz:

Weiterhin gilt:

Satz:

- $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ist im Bereich der absoluten Konvergenz holomorph.
- $F(s)$ kann daher in weitere Bereiche analytisch fortgesetzt werden.

Praktische Konsequenzen:

- In vielen technischen Anwendungen lässt sich $F(s)$ bis auf isolierte Singularitäten in die **gesamte** restliche Ebene fortsetzen.
- Man betrachtet die Konvergenzbereiche daher in der Regel nicht.
- Es sind Rückschlüsse von $F(s)$ auf $f(t)$ möglich.



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.2 Prinzip und Definition der L-Transformation

Beispiel:

■ $y(t) = \sin(t) * e^{-t} \cos(t) = \int_0^{\infty} e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) e^{-\tau} \cos(\tau) d\tau$



$$Y(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}$$

- hier:
unübersichtliche Zeitfunktion



Laplace-Funktion überschaubar

Zwischenfazit:

Analytisch „schwierige“ Zeitfunktionen lassen sich mit Hilfe der Laplace-Transformation in „einfache“ Funktionen verwandeln.



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.3 Einige Korrespondenzen der L-Transformation

| Funktion | Korrespondenz |
|--|--------------------------------|
| $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\frac{t^n}{n!}$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{s - \alpha}$ |
| $\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$ |
| $\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ | $\frac{1}{1 + Ts}$ |
| $\frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$ | $\frac{1}{(1 + Ts)^2}$ |

| Funktion | Korrespondenz |
|--|---|
| $\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)$ | $\frac{1}{s^2 + \alpha^2}$ |
| $\frac{t}{2\alpha} \sin(\alpha t)$ | $\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$ |
| $\frac{1}{\alpha} e^{-\beta t} \sin(\alpha t)$ | $\frac{1}{s^2 + 2\beta s + \beta^2 + \alpha^2}$ |
| $\cos(\alpha t)$ | $\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$ |
| $t \cos(\alpha t)$ | $\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$ |
| $e^{-\beta t} \cos(\alpha t)$ | $\frac{s + \beta}{s^2 + 2\beta s + \beta^2 + \alpha^2}$ |



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.4 Rechenregeln der Laplace-Transformation

- **Differentiationsregel**

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \longrightarrow \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - s^{(n-2)} f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

(dabei gilt: $f(0) = f(-0)$: linksseitiger Grenzwert)

Beispiel: $\ddot{y}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)$

Spezialfall: alle Anfangswerte verschwinden: $f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(0) = 0$

$$f^{(n)}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^n F(s)$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.4 Rechenregeln der Laplace-Transformation

- Integrationsregel

$$\int_0^t f(t) dt \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} F(s)$$

Beispiel: bekannte Korrespondenz (s. Tabelle): $\cos(\omega t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$\implies \sin(\omega t) = \omega \cdot \int_0^t \cos(\omega t) dt \quad \circ \text{---} \bullet \quad \omega \cdot \frac{1}{s} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{s. Tabelle})$$

- Dämpfungsregel

$$f(t) \cdot e^{\alpha t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s - \alpha)$$

Beispiel: bekannte Korrespondenz (s. Tabelle): $\cos(\omega t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$\implies \cos(\omega t) \cdot e^{-\alpha t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} = \frac{s + \alpha}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{s. Tabelle})$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.4 Rechenregeln der Laplace-Transformation

• Verschiebungsregel

a) nach rechts

$$f(t-t_0) \circ \bullet e^{-t_0 s} \left[F(s) + \int_{-t_0}^0 f(t) e^{-st} dt \right]$$

Beispiel: $f(t) = \begin{cases} 4, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = 4\sigma(t)$, bekannt (s. Tabelle): $4\sigma(t) \circ \bullet 4 \frac{1}{s}$

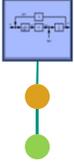
$$\implies f(t-2) \circ \bullet e^{-2s} \left[\frac{4}{s} + \int_{-2}^0 0 \cdot e^{-st} dt \right] = \frac{4}{s} e^{-2s}$$

b) nach links

$$f(t+t_0) \circ \bullet e^{t_0 s} \left[F(s) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-st} dt \right]$$

Beispiel: $f(t) = \begin{cases} 4, & t > 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases}$, bekannt (s. oben): $f(t) \circ \bullet \frac{4}{s} e^{-2s}$

$$\implies f(t+2) \circ \bullet e^{2s} \left[\frac{4}{s} e^{-2s} - \int_0^2 0 \cdot e^{-st} dt \right] = \frac{4}{s}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.5 Übertragungsverhalten im Bild- und Zeitbereich

$$a_n^{(n)} y(t) + a_{n-1}^{(n-1)} y(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m^{(m)} u(t)$$

$$\begin{aligned}
 a_n [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] &= b_0 U(s) \\
 + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - \dots - y^{(n-2)}(0)] &+ b_1 [sU(s) - u(0)] \\
 \vdots &\vdots \\
 + a_1 [sY(s) - y(0)] &+ b_{m-1} [s^{m-1} U(s) - \dots - u^{(m-2)}(0)] \\
 + a_0 Y(s) &+ b_m [s^m U(s) - s^{m-1} u(0) - \dots - u^{(m-1)}(0)]
 \end{aligned}$$

Beispiel: Kardanwelle $J \ddot{y}(t) + 2d\dot{y}(t) + 2cy(t) = \dot{u}(t)$

$$\begin{aligned}
 J[s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] &= sU(s) - u(0) \\
 + 2d[sY(s) - y(0)] & \\
 + 2cY(s) &
 \end{aligned}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.5 Übertragungsverhalten im Bild- und Zeitbereich

Umordnung:

$$Y(s)[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

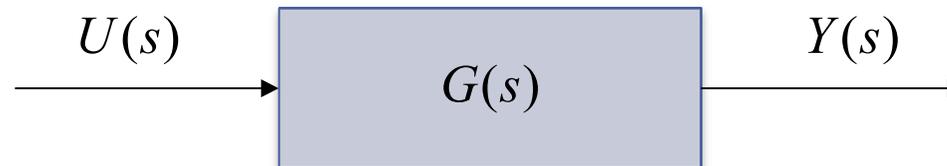
–... (Terme mit $y(0), \dot{y}(0), \dots$)... –... (Terme mit $u(0), \dot{u}(0), \dots$)...

alle Anfangswerte gleich Null: $\Downarrow y(0) = \dot{y}(0) = \dots = u(0) = \dot{u}(0) = \dots = 0$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

$G(s)$: Übertragungsfunktion

Strukturbild:



Beispiel: Kardanwelle

$$Y(s) = \frac{s}{\underbrace{Js^2 + 2ds + 2c}_{= G(s)}} \cdot U(s)$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.5 Übertragungsverhalten im Bild- und Zeitbereich

Faltung: zur Übertragungsgleichung gehörende Operation im Zeitbereich:

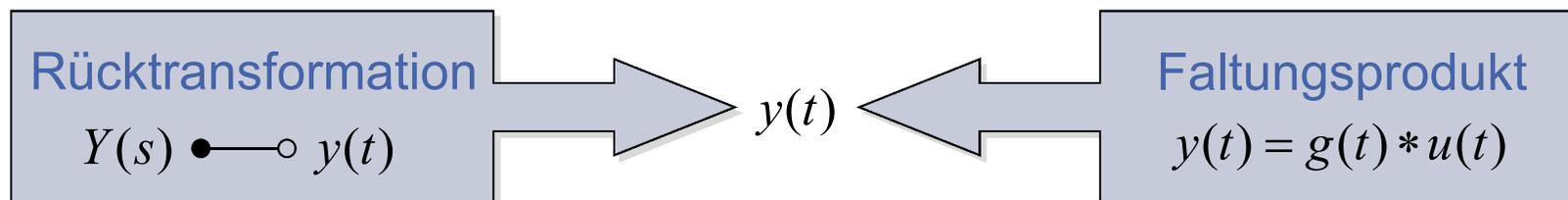
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$



Faltungsprodukt

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau = \int_0^t u(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = u(t) * g(t)$$

⇒ Alternative Wege zur Berechnung von $y(t)$:



(bei rationalen
Bildfunktionen)

(bei komplizierten
Bildfunktionen)



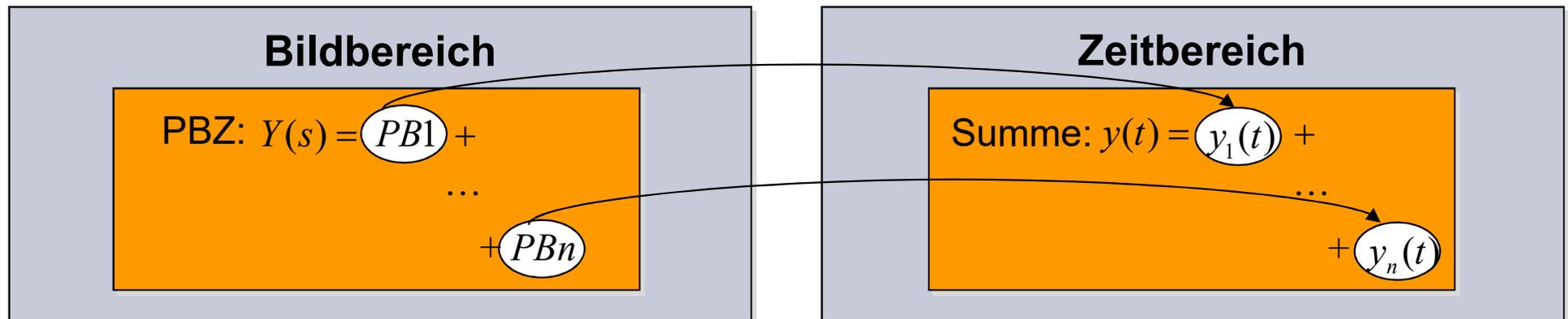
2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Voraussetzung: $Y(s)$ gebrochen rationale Funktion

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}$$

- Vorgehen:**
1. **Partialbruchzerlegung (PBZ)** von $Y(s)$
 2. Bestimmung der zu den einzelnen Partialbrüchen gehörigen Zeitfunktionen durch gliedweise Rücktransformation
 3. Summation aller Zeitfunktionen zu $y(t)$





2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung gebrochen rationaler Funktionen:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} = K \cdot \frac{(s - \beta_1)^{m_1} \cdot (s - \beta_2)^{m_2} \dots}{(s - \alpha_1)^{n_1} \cdot (s - \alpha_2)^{n_2} \dots}$$

Beispiel: Kardanwelle

$$\begin{aligned} R(s) = G(s) &= \frac{s}{Js^2 + 2ds + 2c} \\ &\Downarrow J = 2, d = 4, c = 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s-0)}{(s - \underset{\uparrow \alpha_1}{-1})(s - \underset{\uparrow \alpha_2}{-3})} \end{aligned}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung gebrochen rationaler Funktionen:

falls $R(s)$ teilerfremd: PBZ abhängig von den Nullstellen von $N(s)$:

$$N(s) = 0$$

Charakteristische Gleichung,

Lösungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: **Polstellen** der Ordnungen n_1, \dots, n_n von $R(s)$

Beispiel: Kardanwelle

Polstellen $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -3$ einfache Pole



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Allgemeiner Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$R(s) = r_0 + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{r_{ij}}{(s - \alpha_i)^j} + \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{ik}s + b_{ik}}{((s - \alpha_i)(s - \bar{\alpha}_i))^k} \right), \quad \sum_{i=1}^p n_i = n$$

falls Zählergrad $R(s)$
gleich Nennergrad

falls α_i reeller Pol
der Ordnung n_i

falls $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$ konjugiert komplexe
Pole der Ordnung n_i

Beispiel: Kardanwelle

$$R(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{(s+1)(s+3)} \stackrel{!}{=} \frac{r_{11}}{s+1} + \frac{r_{21}}{s+3}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Allgemeiner Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

Nach Bestimmung der Koeffizienten der Partialbrüche:

Rücktransformation der einzelnen Partialbrüche mittels der Korrespondenztabelle und den Rechenregeln, z.B.

$$\frac{c}{(s - \alpha)^k} \longleftrightarrow \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Alternativen zur Bestimmung der Partialbruch-Koeffizienten:

1. Koeffizientenvergleich

Ausmultiplizieren des Ansatzes und Vergleich der Koeffizienten der entstehenden Polynome

Beispiel: Kardanwelle

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{(s+1)(s+3)} \stackrel{!}{=} \frac{r_{11}}{s+1} + \frac{r_{21}}{s+3} \\ &= \frac{r_{11}(s+3) + r_{21}(s+1)}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{(r_{11} + r_{21})s + 3r_{11} + r_{21}}{(s+1)(s+3)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} r_{11} + r_{21} = \frac{1}{2} \\ 3r_{11} + r_{21} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r_{11} = -\frac{1}{4}, r_{21} = \frac{3}{4} \Rightarrow R(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{4} \frac{1}{(s+3)}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.6 Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

Alternativen zur Bestimmung der Partialbruch-Koeffizienten:

2. **Koeffizientenberechnungsvorschrift** auf Basis der Residuenrechnung
direkte Berechnung des entsprechenden Partialbruch-Koeffizienten r_{ij}
zum n_i -fachen Pol α_i

$$r_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \left[\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}} \left(R(s) \cdot (s - \alpha_i)^{n_i} \right) \right] \Big|_{s=\alpha_i} \quad (j = 1, \dots, n_i)$$

Beispiel: Kardanwelle

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{(1-1)!} \left[\frac{d^0}{ds^0} \left(R(s) \cdot (s+1) \right) \right] \Big|_{s=-1} = R(s) \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{s}{s+3} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{(-1)}{(-1+3)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

analog:

$$r_{21} = R(s) \cdot (s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{2} \frac{s}{s+1} \Big|_{s=-3} = \frac{3}{4}$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

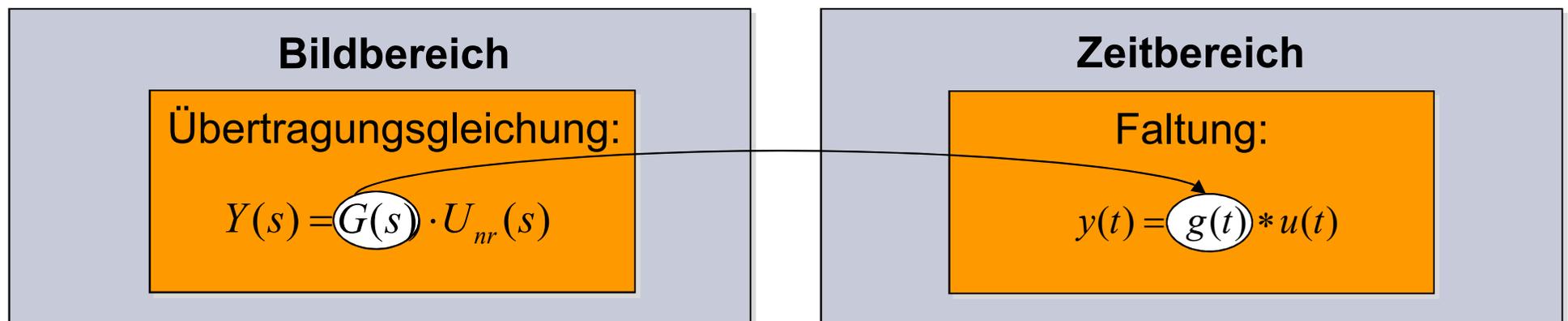
2.2.7 Lösung linearer Differentialgleichungen durch Faltung

Insbesondere erforderlich bei nichtrationalen Bildfunktionen $U(s) = U_{nr}(s) \bullet \text{---} \circ u(t)$

$\implies Y(s) = G(s) \cdot U_{nr}(s)$ ebenfalls nicht rational

$\implies y(t)$ nicht über Partialbruchzerlegung und Rücktransformation berechenbar!

- Vorgehen:**
1. Berechnung von $g(t) \circ \text{---} \bullet G(s)$ mittels Partialbruchzerlegung und Rücktransformation (s. früher)
 2. Berechnung von $y(t)$ mit dem **Faltungsprodukt** mit $u(t)$





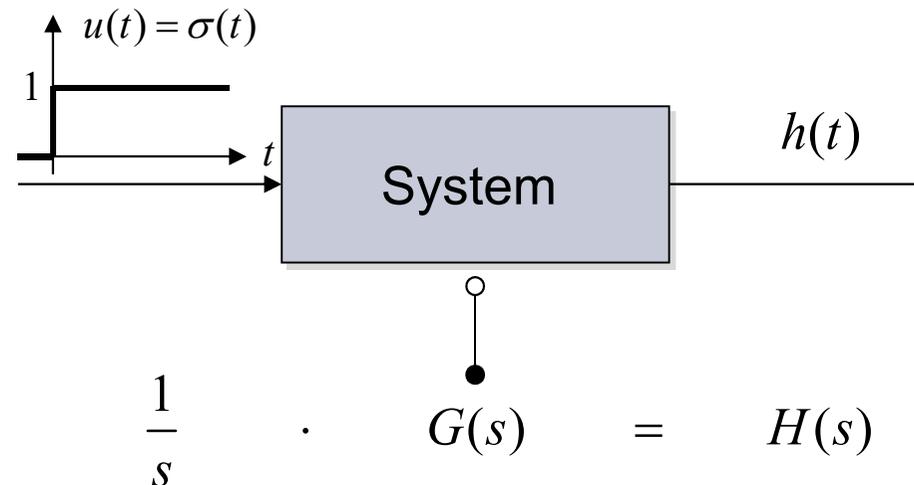
2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.8 Sprung- und Impulsantwort

Sprung- und Impulssignale: typische Testanregungen für Systeme

Def.: **Sprungantwort:**

Die **Sprungantwort** $h(t)$ ist die Ausgangsgröße $y(t)$ eines Systems, wenn als Eingangsgröße ein Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$ vorliegt und alle Anfangswerte im System Null sind.



Beispiel: Kardanwelle

$$Y(s) = H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \frac{s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

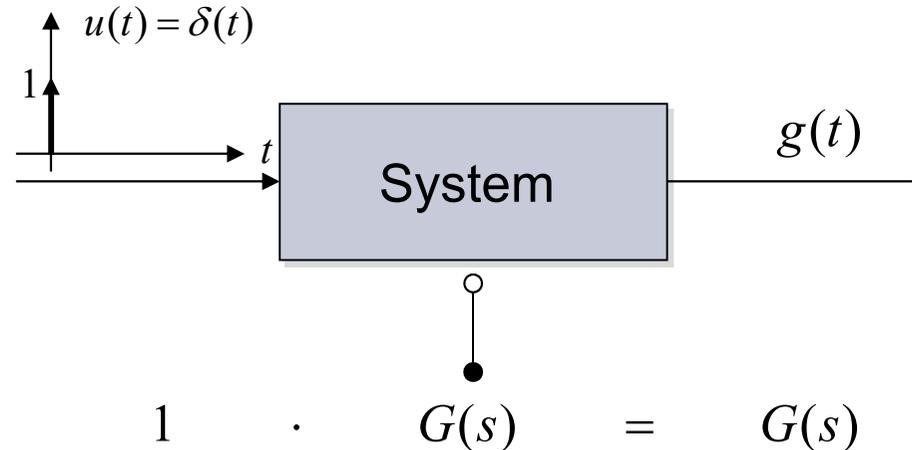


2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.8 Sprung- und Impulsantwort

Def.: **Impulsantwort:**

Die **Impulsantwort** $g(t)$ ist die Ausgangsgröße $y(t)$ eines Systems, wenn als Eingangsgröße ein so genannter Impuls $u(t) = \delta(t)$ $\circ \rightarrow \bullet$ 1 vorliegt und alle Anfangswerte im System Null sind.

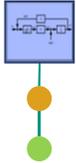


Beispiel: Kardanwelle

$$Y(s) = G(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{1}{2} \frac{s}{(s+1)(s+3)} \cdot 1 = \frac{1}{2} \frac{s}{(s+1)(s+3)}$$

Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort:

$$h(t) = \int_0^t g(t) dt \quad \circ \rightarrow \bullet \quad H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$$



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

Zweites Fazit:

- Mit Hilfe der Laplace-Transformation lässt sich die Lösung einer Differentialgleichung als Reaktion auf ein Anregungssignal leicht beschreiben.
- In der Regel müssen keine Faltungsintegrale gelöst werden.
- System-Eigenschaft und System-Reaktion auf ein Anregungssignal lassen sich sauber trennen.



2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

2.2.9 Rechenregeln: Grenzwertsätze

Grenzwertsätze:

Ermöglichen schnelle Übersicht über das Verhalten von $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow 0$ unmittelbar anhand der Laplace-Transformierten

- **Endwertsatz der Laplace-Transformation**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

sofern $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert und endlich ist!

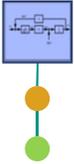
- **Anfangswertsatz der Laplace-Transformation**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

Beispiel: Kardanwelle

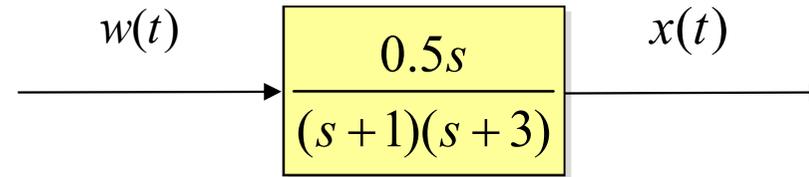
$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)(s+3)} = 0 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{2s^2} \frac{1}{(1+\frac{1}{s})(1+\frac{3}{s})} = 0 \cdot 1 = 0$$

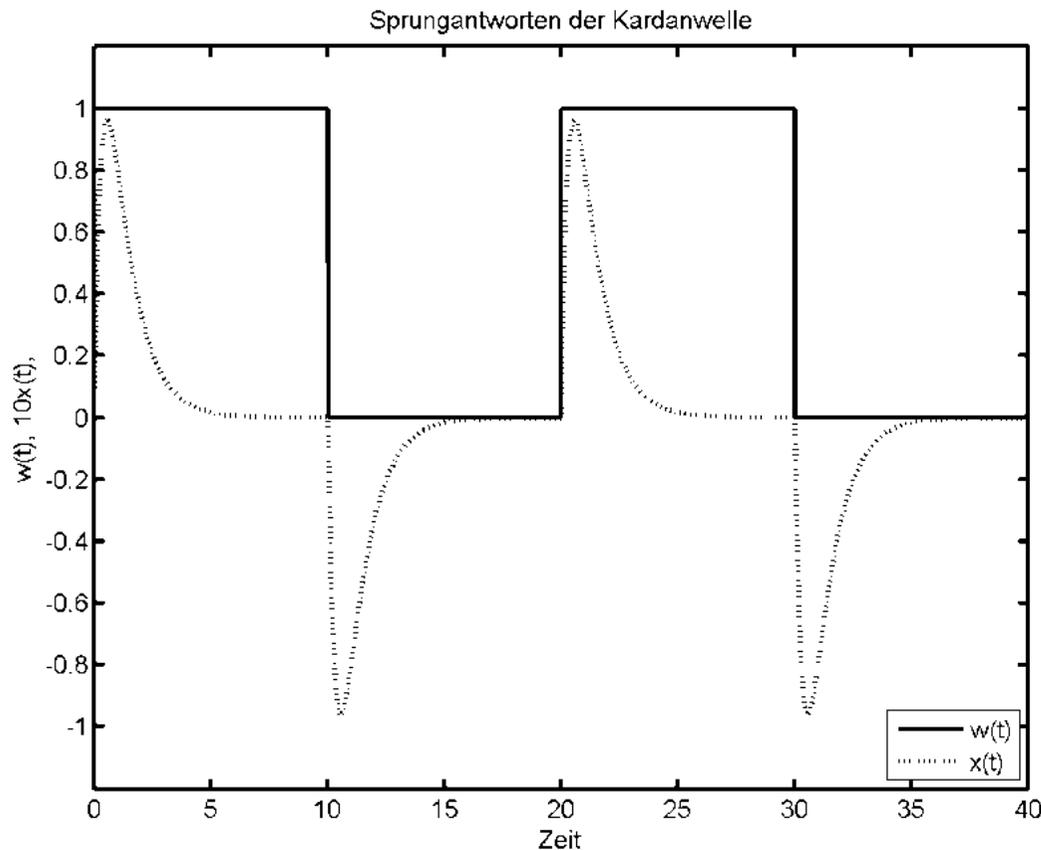


2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

Anregung einer Kardanwelle



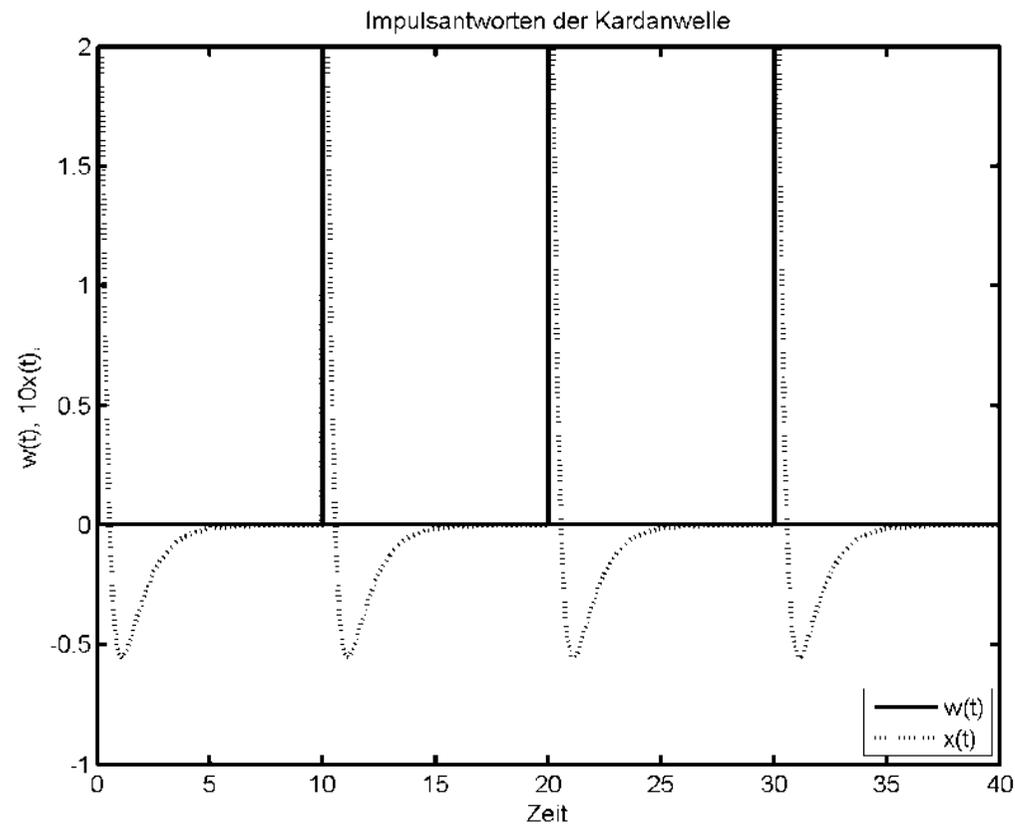
a) Sprunganregung $w(t) = \sum_{k=0}^1 (\sigma(t - 20k) - \sigma(t - (20k + 10)))$

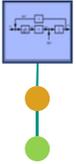




2.2 Laplace-Transformation linearer Systeme

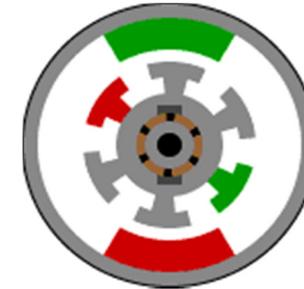
b) Impulsanregung $w(t) = \sum_{k=0}^3 \delta(t - 10k)$



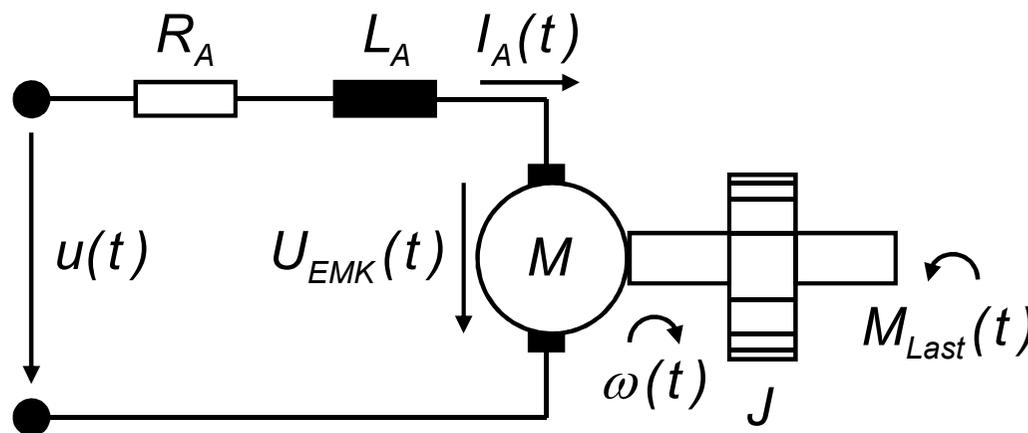


2.2 Das Signalfussbild (Beispiel 1)

Bremsregelsystem mit mechanisch kommutierter Gleichstrommaschine



$$M_m(t) = K_m I_A(t)$$
$$U_{EMK}(t) = K_e \omega(t)$$



Differentialgleichungen:

$$\frac{dI_A}{dt} = \frac{1}{L_A} (-R_A I_A(t) - K_e \omega(t) + u(t))$$

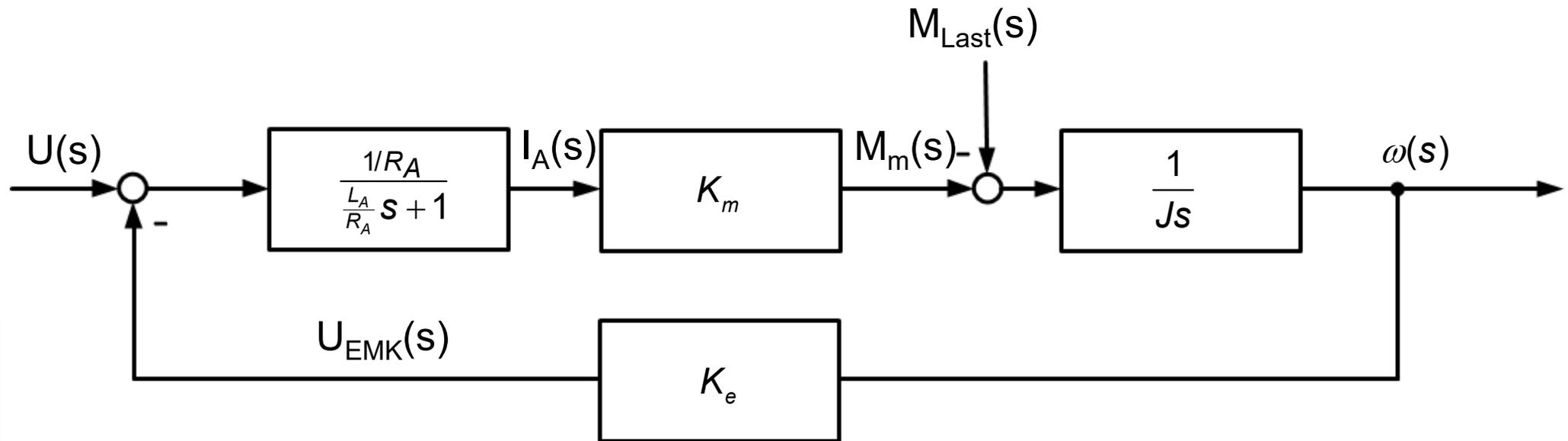
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} (K_m I_A(t) - M_{Last}(t))$$

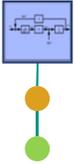
Tafelanschrieb 2.2 (1a)

Gleichstrommaschine im Laplace-Bereich



2.2 Blockschaltbild Gleichstrommaschine

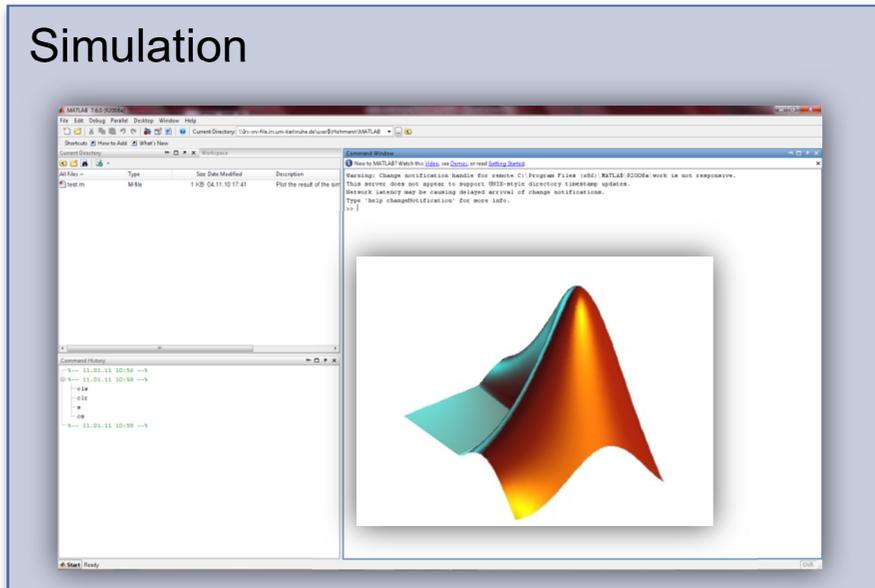




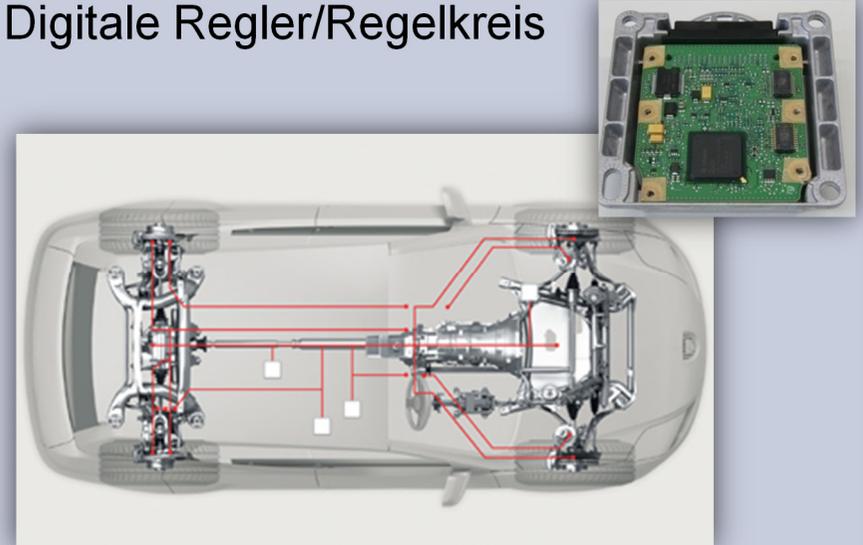
2.2 Das Signalflussbild

- **Ausgangsfrage:** Wie kann der zeitkontinuierliche Regelkreis im Rechner abgebildet werden?
- Zwei Fragestellungen:

Simulation



Digitale Regler/Regelkreis



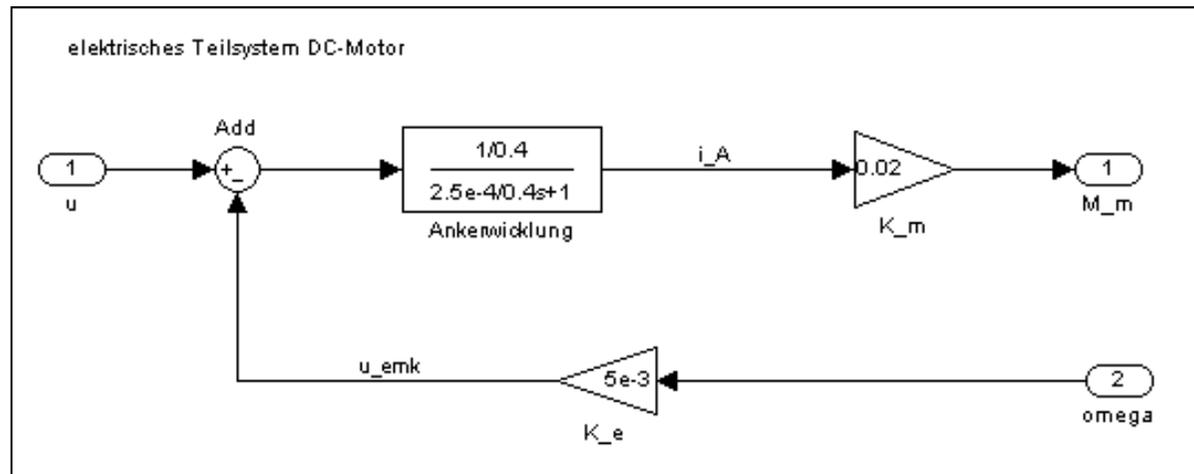


2.2 Das Signalfussbild

2.2.1 Beispiel: Simulation eines Gleichstrommotors in Simulink

Motorparameter:

- Wicklungswiderstand: $R = 0,4 \Omega$
- Induktivität: $L = 250 \mu\text{H}$
- Elektrische Motorkonstante: $K_e = 5 \text{ mVs}$
- Mechanische Motorkonstante: $K_m = 20 \text{ Nmm/A}$
- Trägheitsmoment: $J = 150 \text{ gcm}^2$



PC-Demo 1: Gleichstrommaschine in SIMULINK

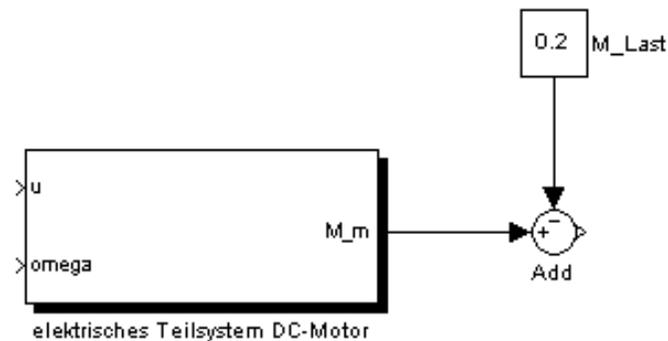


2.2 Das Signalflussbild

2.2.1 Beispiel: Simulation eines Gleichstrommotors in Simulink (2)

■ Motorparameter:

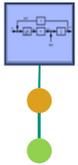
- Wicklungswiderstand: $R = 0,4 \Omega$
- Induktivität: $L = 250 \mu\text{H}$
- Elektrische Motorkonstante: $K_e = 5 \text{ mVs}$
- Mechanische Motorkonstante: $K_m = 20 \text{ Nmm/A}$
- Trägheitsmoment: $J = 150 \text{ gcm}^2$





2.2 Das Signalflossbild

2.2.1 Beispiel: Simulation eines Gleichstrommotors in Simulink



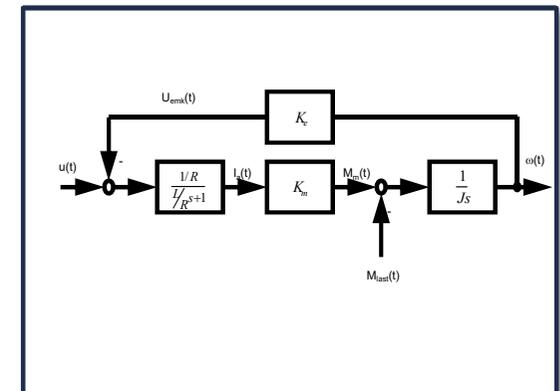
1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

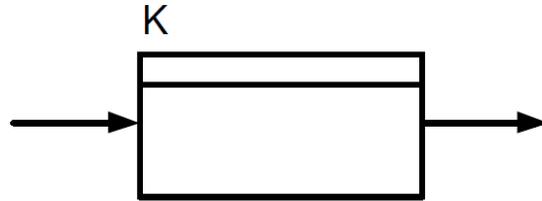
1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
- 3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder**
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Analoge und digitale Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise





2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.1 Proportionalitätsglied (P-Glied)



Zeitbereichs-Sicht

$$y(t) = K u(t), \quad K > 0$$



Übertragungsfunktion („Algebraische Sicht“, „Frequenzbereichs-Sicht“)

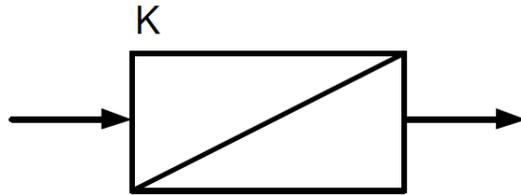
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = KU(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = K$$

$$h(t) = K\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$



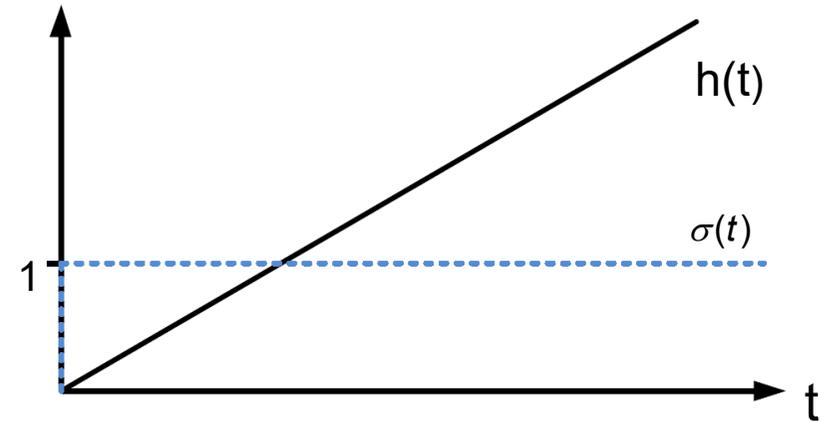
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.2 Integrierglied (I-Glied)



Zeitbereichs-Sicht

$$y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad K > 0$$



Übertragungsfunktion („Algebraische Sicht“, „Frequenzbereichs-Sicht“)

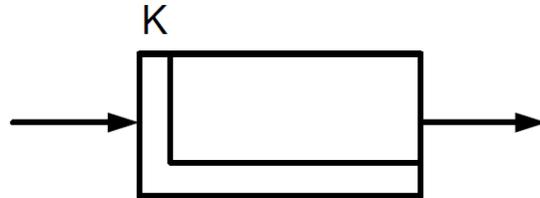
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{K}{s} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{K}{s}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Kt & t \geq 0 \end{cases}$$



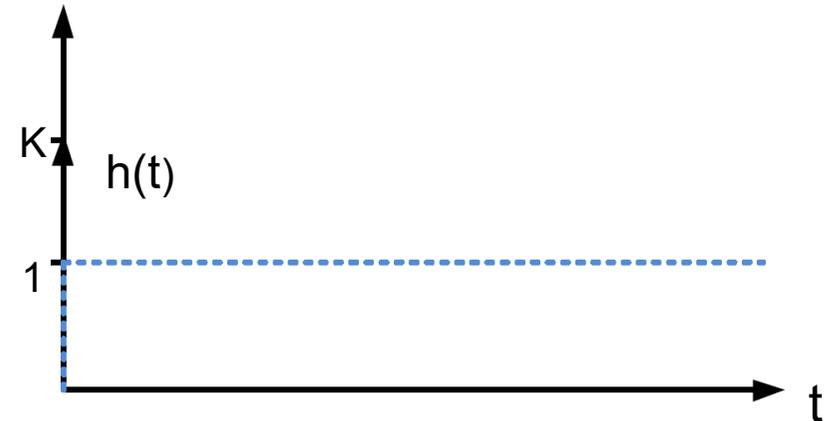
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.3 Differenzierglied (D-Glied)



Zeitbereichs-Sicht

$$y(t) = K \dot{u}(t), \quad K > 0$$



Übertragungsfunktion („Algebraische Sicht“, „Frequenzbereichs-Sicht“)

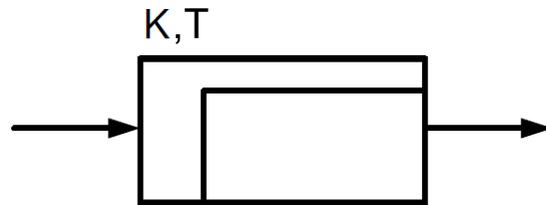
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = K s U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = K s$$

$$h(t) = K \delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K \delta(t) & t \geq 0 \end{cases}$$



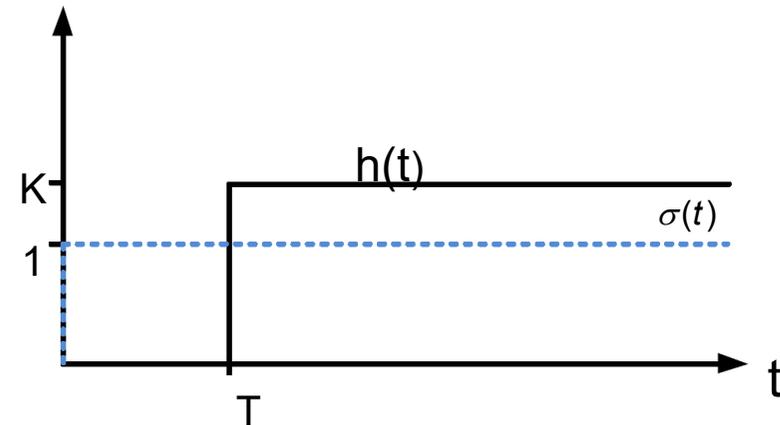
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.4 Totzeitglied



Zeitbereichs-Sicht

$$y(t) = K u(t - T), \quad K > 0$$



Übertragungsfunktion („Algebraische Sicht“, „Frequenzbereichs-Sicht“)

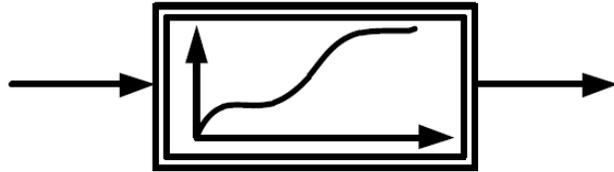
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = K e^{-T \cdot s} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = K e^{-T \cdot s}$$

$$h(t) = K \sigma(t - T) = \begin{cases} 0 & t < T \\ K & t \geq T \end{cases}$$



2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.5 Kennlinienglied



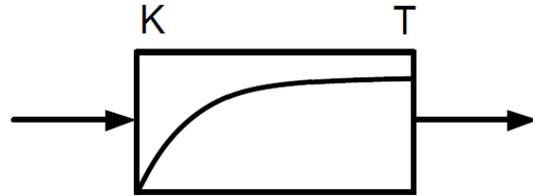
Zeitbereichs-Sicht

$$y(t) = F(u(t))$$



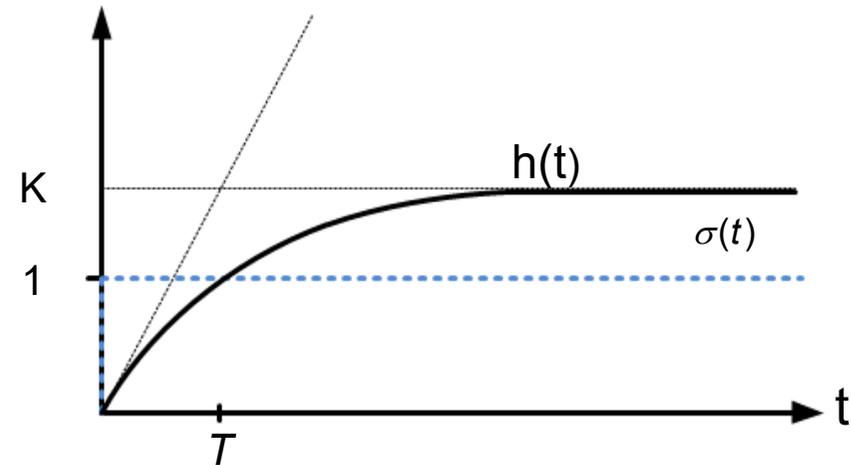
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.6 Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT₁-Glied)



Zeitbereichs-Sicht

$$T\dot{y}(t) + y(t) = K u(t), \quad K > 0$$



Übertragungsfunktion („Algebraische Sicht“, „Frequenzbereichs-Sicht“)

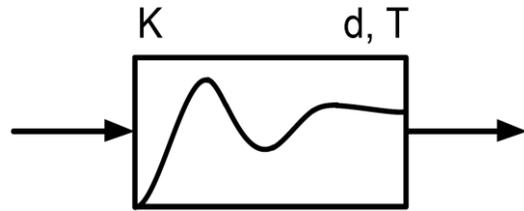
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{K}{1+Ts} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K(1 - e^{-t/T}) & t \geq 0 \end{cases}$$



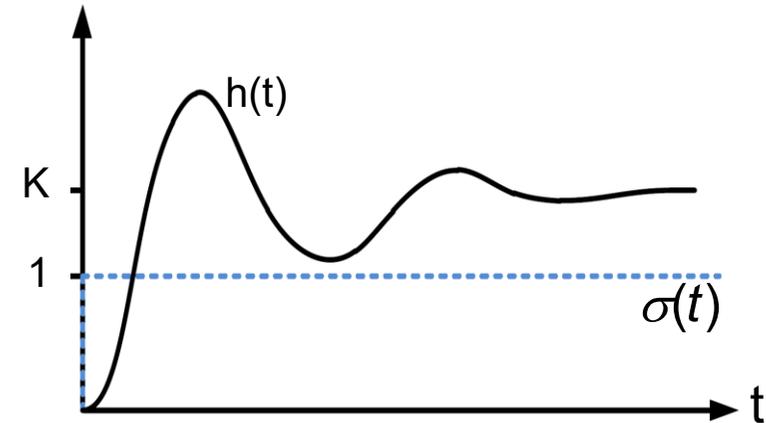
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.7 Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT₂-Glied)



Zeitbereichs-Sicht

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2dT\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t), \quad K > 0$$



a) Übertragungsfunktion (periodischer Fall: $d < 1$)

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + T^2 s^2} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + T^2 s^2}$$

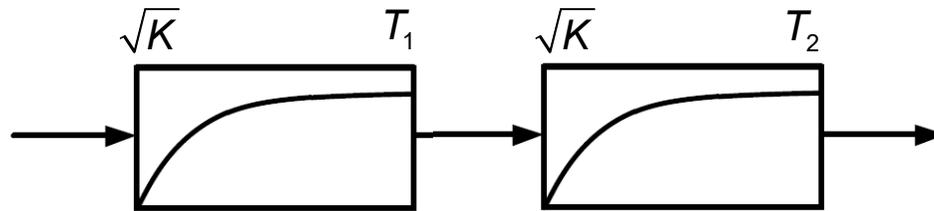
$$h(t) = K \left[1 - \frac{e^{-(d/T)t}}{\sqrt{1-d^2}} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T} t - \varphi \right) \right] \quad \text{für } t > 0, \text{ sonst } 0$$

$$\text{mit } \tan \varphi = \frac{-\sqrt{1-d^2}}{d} \quad \text{und } 90^\circ < \varphi < 180^\circ$$



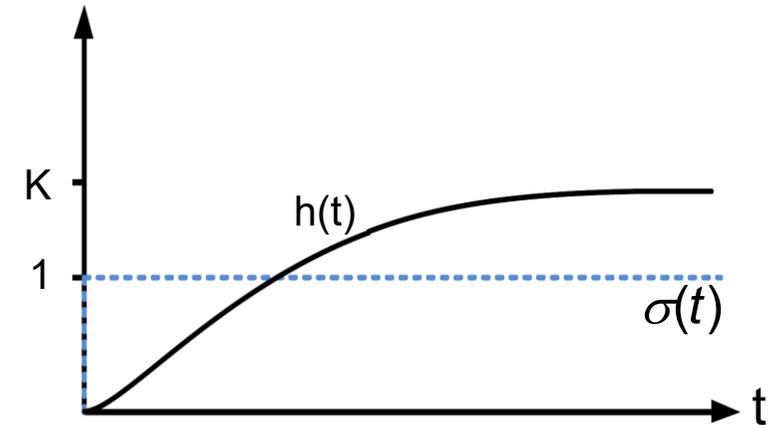
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.7 Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT₂-Glied) (2)



Zeitbereichs-Sicht

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2dT\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t), \quad K > 0$$



b) Übertragungsfunktion (nicht periodischer Fall: $d \geq 1$)

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

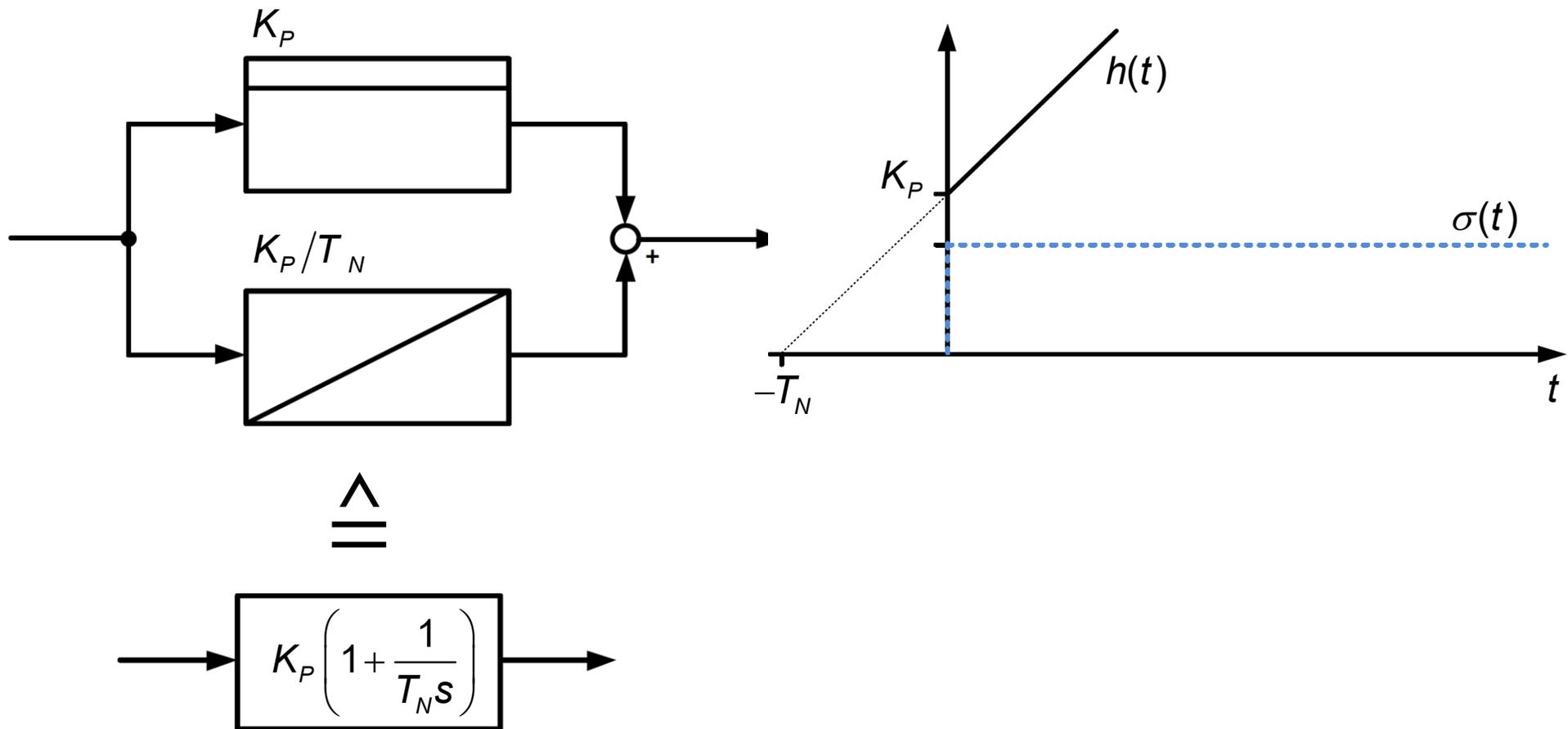
$$h(t) = K \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-t/T_1} + 1 - \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-t/T_2} \right] \quad \text{für } t > 0, \text{ sonst } 0$$

$$\text{mit } T_{1,2} = T(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$$



2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

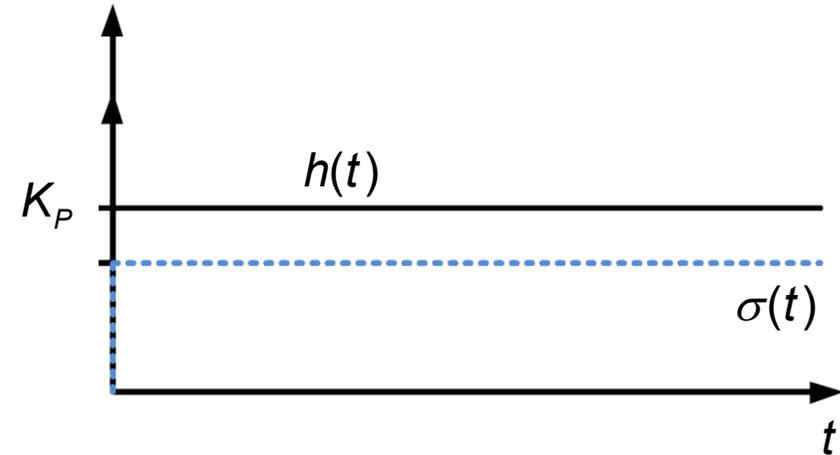
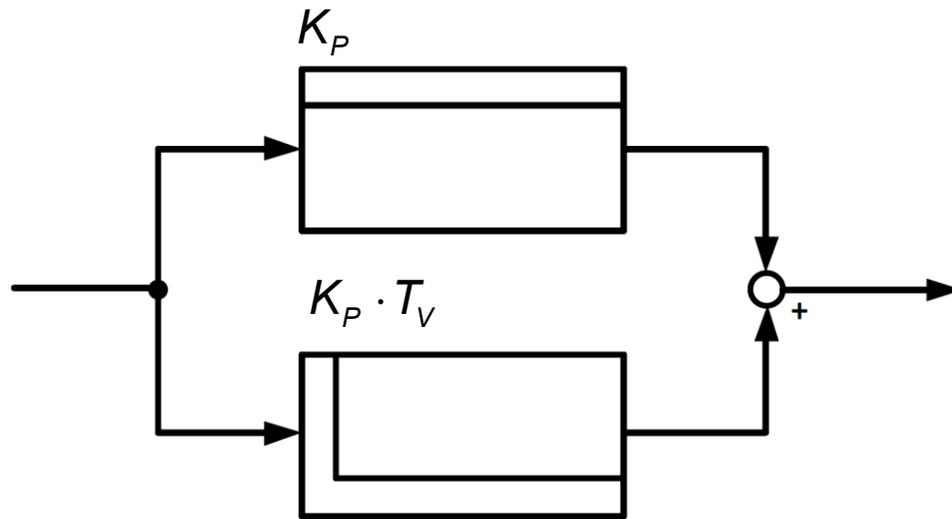
2.3.8 PI-Glied



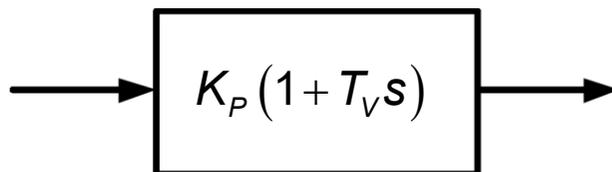


2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.9 (ideales) PD-Glied



$\hat{=}$

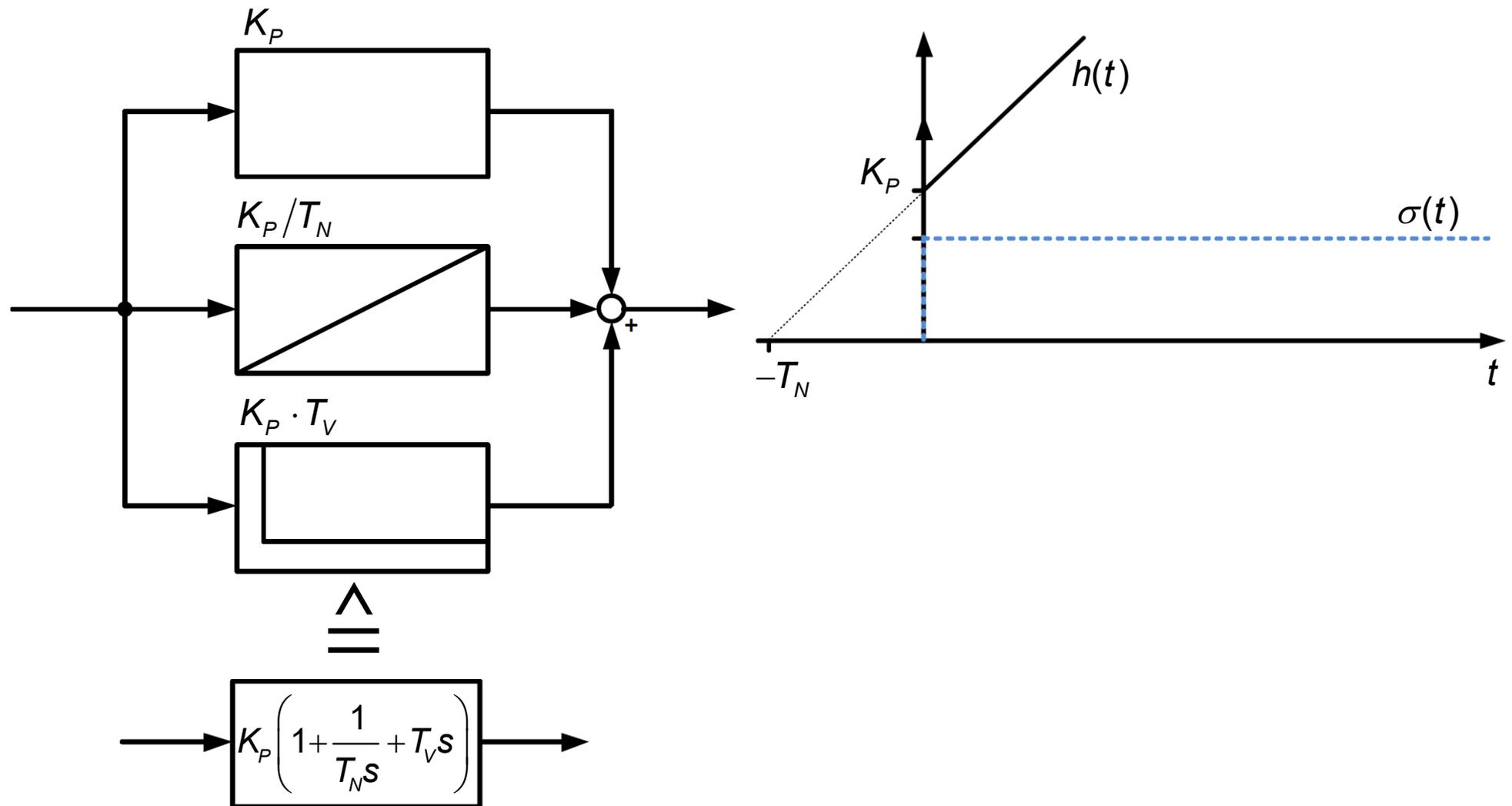




2.3

Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.10 PID-Glied





2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.11 Allgemeine rationale Übertragungsglieder

Allgemeine Übertragungsfunktion einer rationalen Funktion:

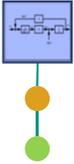
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad \text{mit } a_v \text{ und } b_v \text{ reell, } a_n \neq 0 \text{ und } b_n \neq 0 \text{ sowie } m \leq n$$

$$\Leftrightarrow (a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n) \cdot Y(s) = (b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m) \cdot U(s) \quad \left| \div a_ns^n \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{s} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{s^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{s^n} \right] \cdot Y(s) = \left[\frac{b_0}{a_n} \cdot \frac{1}{s^n} + \frac{b_1}{a_n} \cdot \frac{1}{s^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{s} + \frac{b_n}{a_n} \right] \cdot U(s)$$

Durch Ausmultiplizieren und Ordnen folgt:

$$Y(s) = \frac{b_n}{a_n} \cdot U(s) + \frac{1}{s} \left[\frac{b_{n-1}}{a_n} \cdot U(s) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot Y(s) \right] + \frac{1}{s^2} \left[\frac{b_{n-2}}{a_n} \cdot U(s) - \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot Y(s) \right] + \dots + \frac{1}{s^n} \left[\frac{b_0}{a_n} \cdot U(s) - \frac{a_0}{a_n} \cdot Y(s) \right]$$



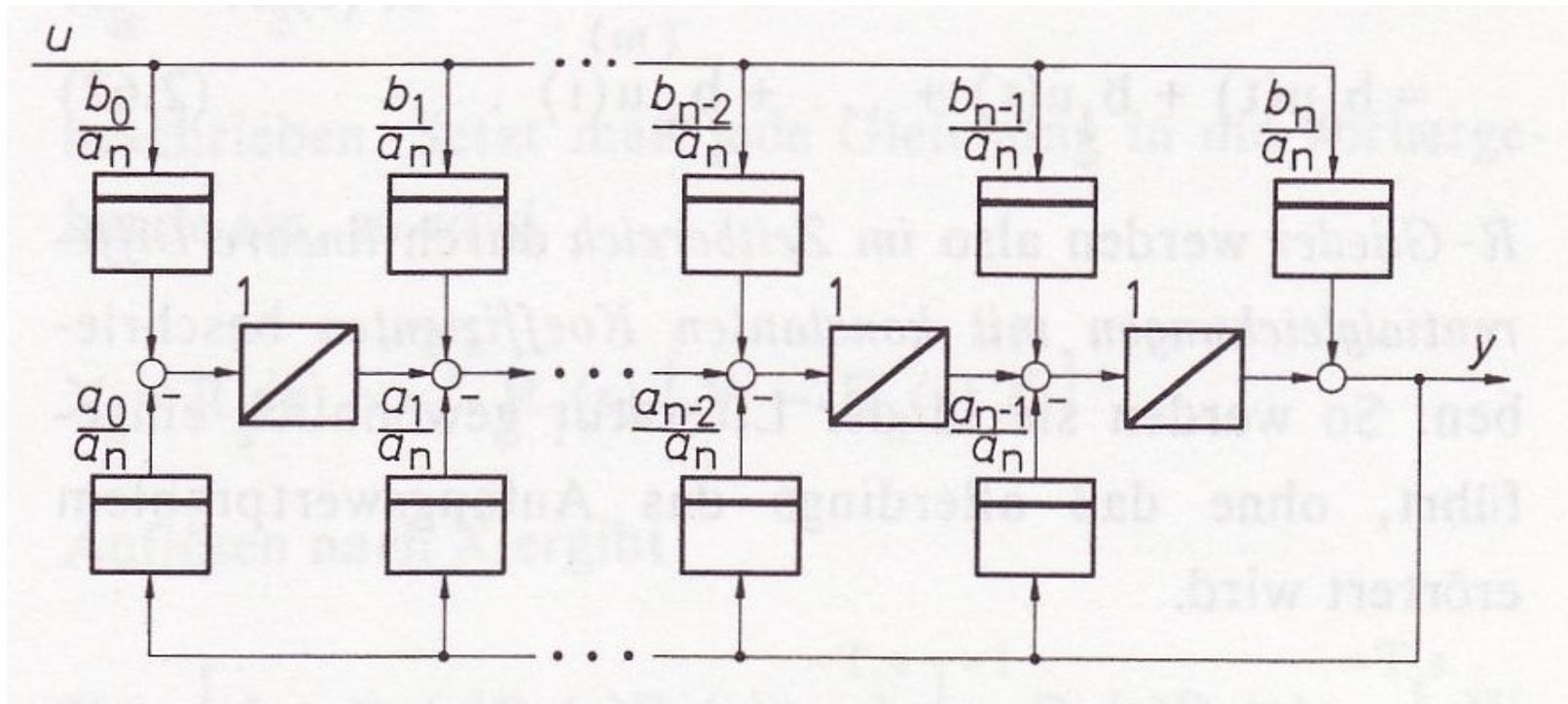
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

2.3.11 Allgemeine rationale Übertragungsglieder (2)

Durch Ausmultiplizieren und Ordnen folgt:

$$Y(s) = \frac{b_n}{a_n} \cdot U(s) + \frac{1}{s} \left[\frac{b_{n-1}}{a_n} \cdot U(s) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot Y(s) \right] + \frac{1}{s^2} \left[\frac{b_{n-2}}{a_n} \cdot U(s) - \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot Y(s) \right] + \dots + \frac{1}{s^n} \left[\frac{b_0}{a_n} \cdot U(s) - \frac{a_0}{a_n} \cdot Y(s) \right]$$

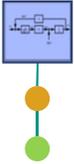
Zugehöriges Strukturbild:





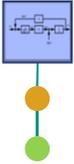
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

| Benennung | Funktionalbeziehung | Übertragungsfunktion | Sprungantwort (Null für $t < 0$) | Verlauf der Sprungantwort | Symbol |
|--|--------------------------------------|----------------------|-----------------------------------|---------------------------|--------|
| P-Glied (Proportionalglied) | $y(t) = K \cdot u(t)$ | K | K | | |
| I-Glied (Integrierglied) | $y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau$ | $\frac{K}{s}$ | $K \cdot t$ | | |
| D-Glied (Differenzierglied) | $y(t) = K \cdot \dot{u}(t)$ | Ks | $K \cdot \delta(t)$ | | |
| TZ-Glied, T_t -Glied (Totzeitglied) | $y(t) = K \cdot u(t - T_t)$ | $Ke^{-T_t s}$ | $K \cdot \sigma(t - T_t)$ | | |
| S-Glied (Summierglied) | $y(t) = u_1(t) \pm u_2(t) \pm \dots$ | | | | |
| KL-Glied (Kennlinienglied) | $y(t) = F(u(t))$ | | nichtlinear | | |
| M-Glied (Multiplizierglied) | $y(t) = u_1(t) \cdot u_2(t)$ | | nichtlinear | | |



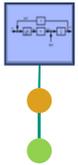
2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

| Benennung | Funktionalbeziehung | Übertragungsfunktion | Sprungantwort (Null für $t < 0$) | Verlauf der Sprungantwort | Symbol |
|---|-------------------------------------|------------------------------|---|---------------------------|--------|
| VZ ₁ - bzw. PT ₁ -Glied (Verzögerungsglied 1. Ordnung) | $T\dot{y} + y = Ku$ | $\frac{K}{1+Ts}$ | $K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$ | | |
| VZ ₂ - bzw. PT ₂ -Glied (Verzögerungsglied 2. Ordnung) a) Periodischer Fall: $d < 1$ b) Aperiodischer Grenzfall: $d = 1$ c) Aperiodischer Fall: $d > 1$ | $T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = Ku$ | $\frac{K}{1+2dT_s + T^2s^2}$ | $K \left[1 + \frac{e^{-(d/T)t}}{\sqrt{1-d^2}} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T} t - \varphi \right) \right]$ $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ $\tan \varphi = \frac{-\sqrt{1-d^2}}{d}$ $K \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T} \right]$ $K \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right]$ $T_{1,2} = T \left(d \pm \sqrt{d^2 - 1} \right)$ | | |



2.3 Verhalten elementarer zeitkontinuierlicher Übertragungsglieder

| Regelkreisglied | Summenform | Quotientenform | Umrechnung der Parameter |
|-----------------|--|--|--|
| PI | $K_P \left(1 + \frac{1}{T_N s}\right)$ | $K_R \frac{1 + T_R s}{s}$ | $K_P = K_R \cdot T_R, \quad T_N = T_R$ |
| PD | $K_P (1 + T_V s)$ | $K_R (1 + T_R s)$ | $K_P = K_R, \quad T_V = T_R$ |
| PID | $K_P \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s\right)$ | $K_R \frac{(1 + T_{R1} s)(1 + T_{R2} s)}{s}$ | $K_P = K_R (T_{R1} + T_{R2}),$ $T_N = T_{R1} + T_{R2}, \quad T_V = \frac{T_{R1} \cdot T_{R2}}{T_{R1} + T_{R2}}$ |



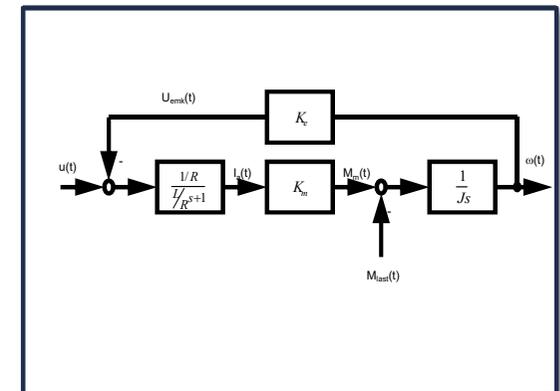
1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
- 4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen**
5. Analoge und digitale Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise



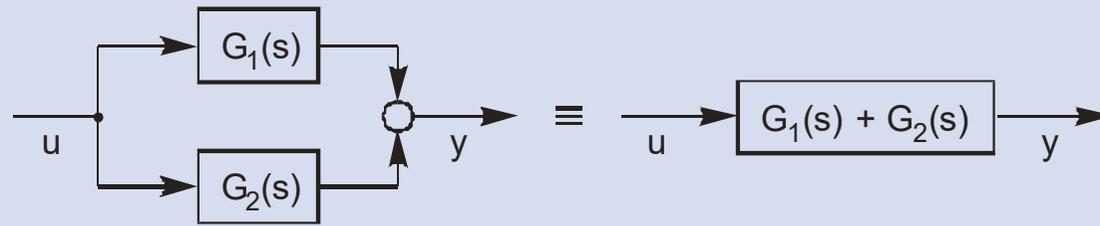


2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.1 Signalflussbildumformungen

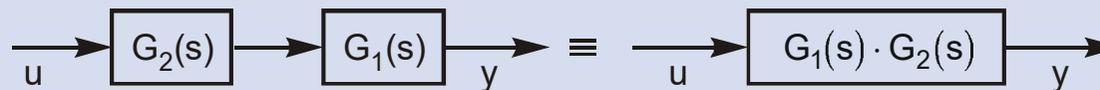
(möglich, da die Laplace-Transformation aus Dgl'n algebraische Gleichungen erzeugt)

Parallelschaltung

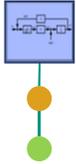


$$Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = [G_1(s) + G_2(s)] \cdot U(s)$$

Reihenschaltung



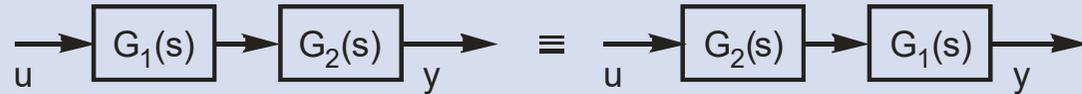
$$Y(s) = G_1(s) \cdot [G_2(s)U(s)] = G_1(s)G_2(s)U(s)$$



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

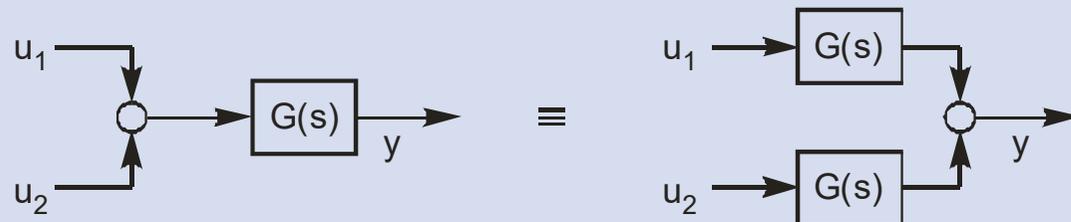
2.4.1 Signalflussbildumformungen (2)

Vertauschung zweier Blöcke
(gilt nur für lineare und zeitinvariante Blöcke)



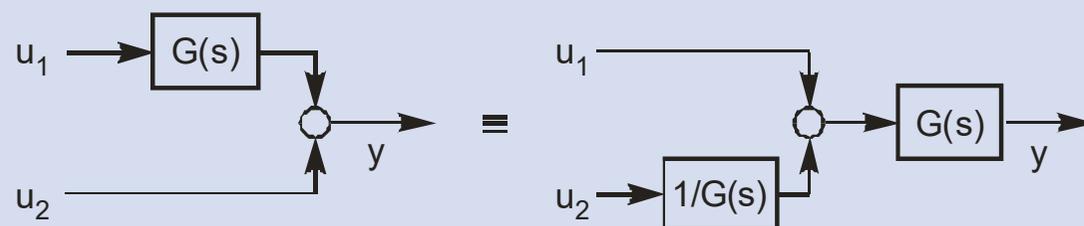
$$Y(s) = G_2(s) G_1(s) U(s) = G_1(s) G_2(s) U(s)$$

Verlegung eines Blocks vor ein Summierglied
(gilt auch für zeitvariante lineare Blöcke)



$$Y = G(U_1 + U_2) = GU_1 + GU_2$$

Verlegung eines Blocks hinter ein Summierglied
(gilt auch für zeitvariante lineare Blöcke)

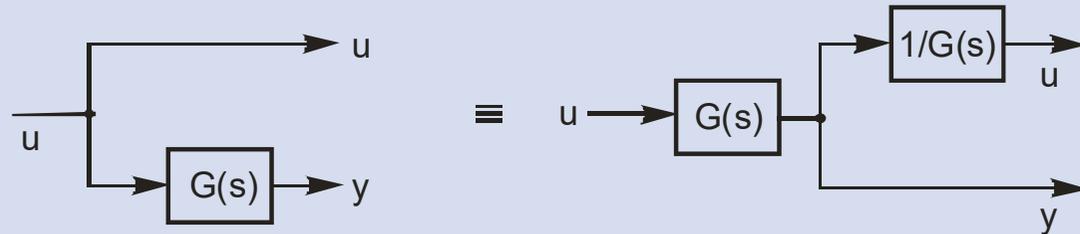




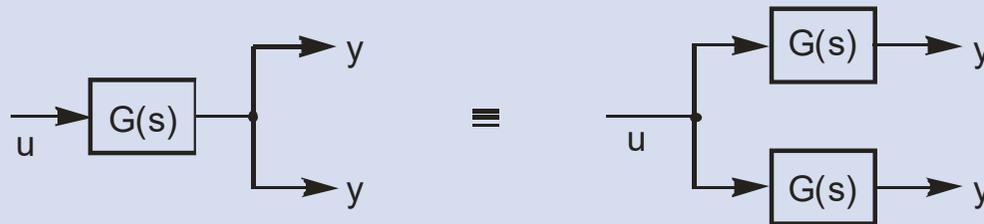
2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.1 Signalflussbildumformungen (3)

Verlegung eines Blocks vor eine Verzweigungsstelle
(gilt für alle Blöcke)



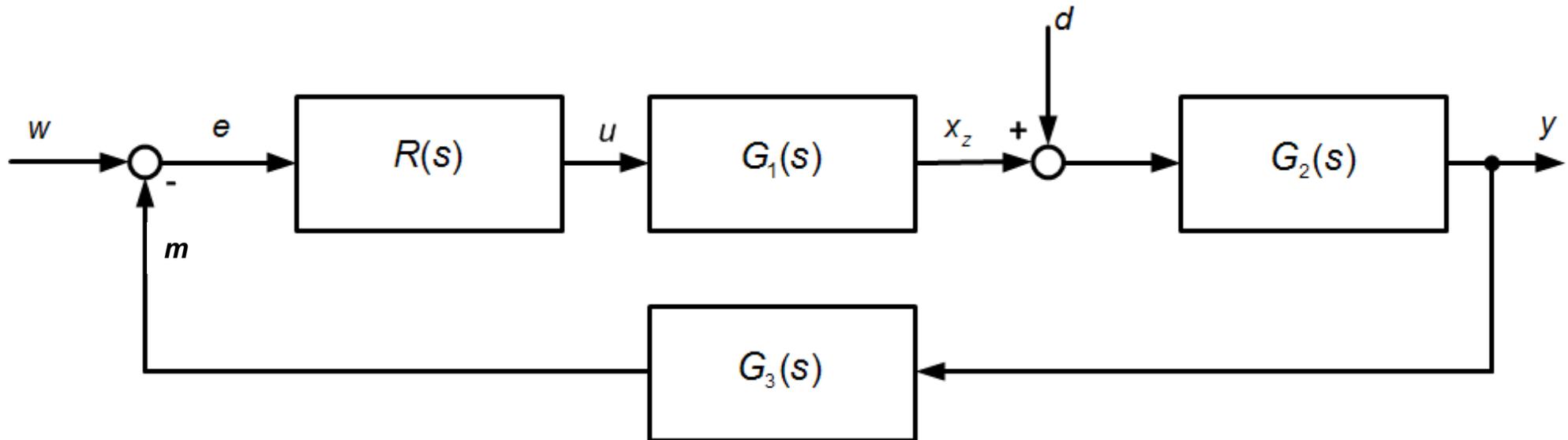
Verlegung eines Blocks hinter eine Verzweigungsstelle
(gilt für alle Blöcke)





2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.2 Allgemeine Struktur einer linearen zeitinvarianten Regelung



Tafelanschrieb 2.4 (1)

**Allgemeine Struktur einer linearen
zeitinvarianten Regelung**



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.2 Allgemeine Struktur einer linearen zeitinvarianten Regelung (2)

$$Y(s) = \underbrace{\frac{R(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + R(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)}}_{\text{Führungs-
übertragungsfunktion}} W(s) + \underbrace{\frac{G_2(s)}{1 + R(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)}}_{\text{Stör-
übertragungsfunktion}} D(s)$$

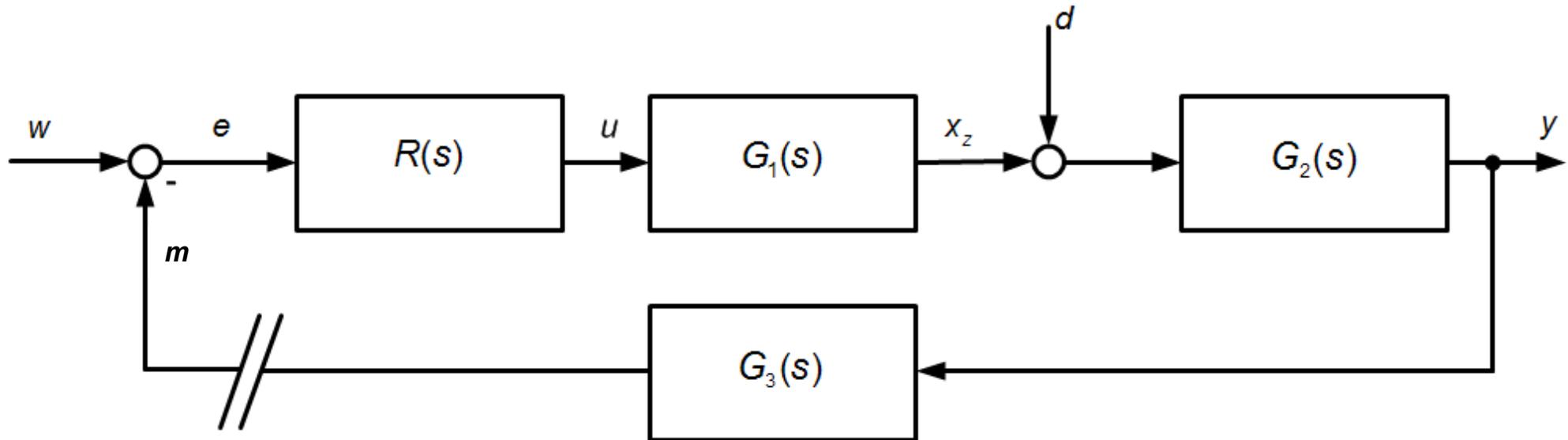
$$F_W(s) = \frac{R(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + R(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

$$F_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + R(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.3 Schleifenverstärkung



$$M(s) = \underbrace{[R(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)]}_{\text{Schleifenverstärkung}} W(s)$$

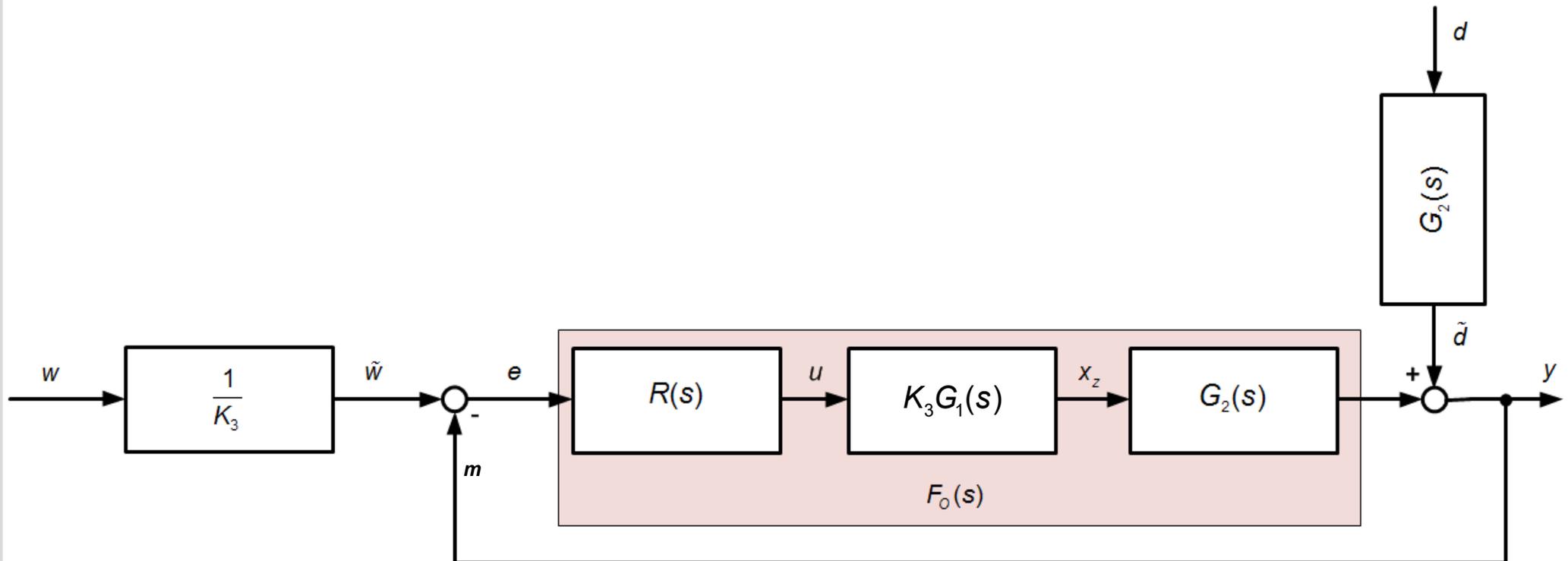
$$F_O(s) = R(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.4 Standardregelkreis

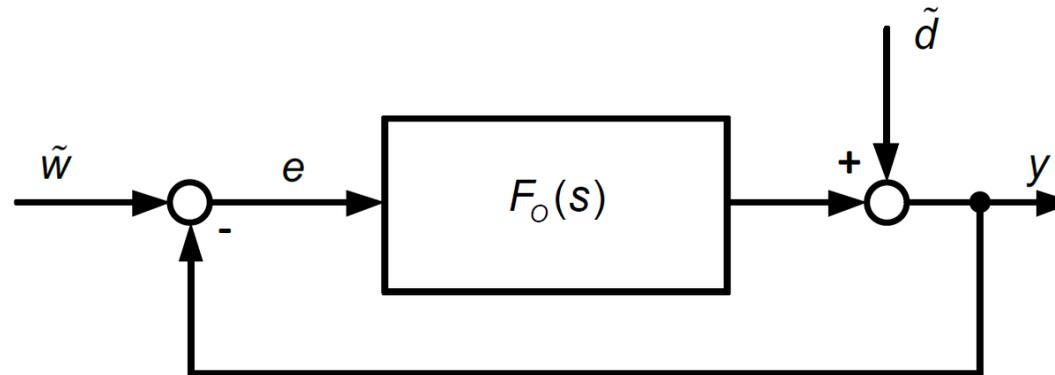
Häufig weitere Vereinfachung möglich:





2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.4 Standardregelkreis (2)



$$Y(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} \tilde{W}(s) + \frac{1}{1 + F_o(s)} \tilde{D}(s)$$

$$\tilde{W}(s) = \frac{W(s)}{K_3} \quad \tilde{D}(s) = G_2(s)D(s)$$



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.5 Störgrößenregelung und Folgeregelung

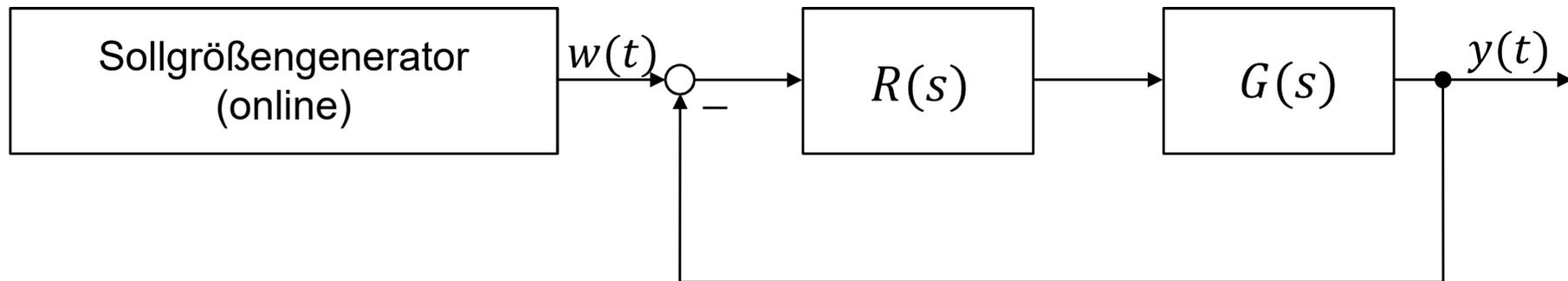
- In der Regel gibt es ein primäres Ziel für die Regelungsaufgabe:
 1. Bei der **Störgrößenregelung (Festwertregelung)** steht die Störkompensation im Vordergrund: Die Regelgröße $y(t)$ soll auf einem festen Wert $w(t) = \text{const.}$ verbleiben, unabhängig von Störungsanregungen
 2. Bei der **Folgeregelung** ist das Nachführen von $y(t)$ an eine zeitveränderliche Sollgröße $w(t)$ die primäre Aufgabe. Handelt es sich um eine gegebene Trajektorie, also eine gegebene Zeitfunktion $w(t)$, $t \in [t_0, t_e]$, dann spricht man auch von einer **Trajektorienfolgeregelung**



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.5 Trajektorienplanung und Servoregelung

- Bisher noch unbekannt: Sollgröße/Führungsgröße $w(t)$
- Grundsätzlich zwei Typen von Systemstrukturen:
 1. **Servoregelung:** Die Führungsgröße $w(t)$ ist im Voraus unbekannt und wird (online) von einer übergeordneten Ebene erzeugt und vorgegeben.





2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.5 Trajektorienplanung und Servoregelung

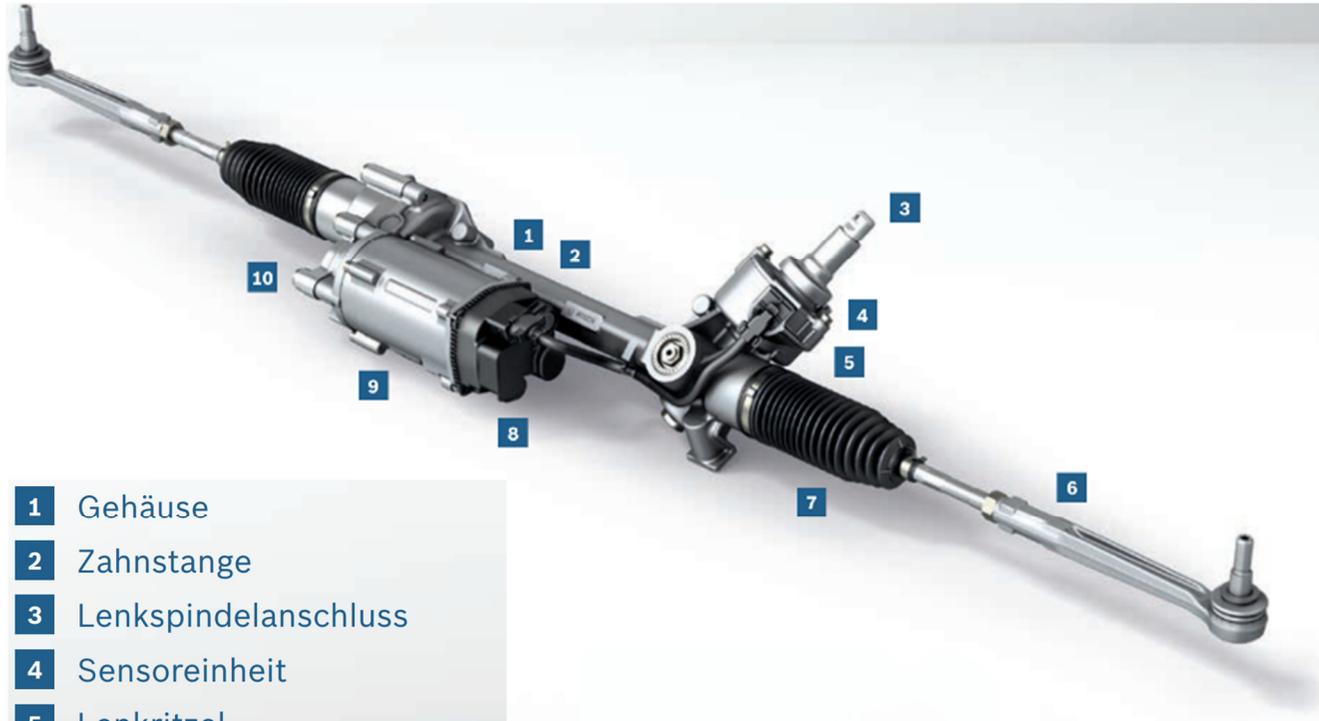
- Bisher noch unbekannt: Sollgröße/Führungsgröße $w(t)$
- Grundsätzlich zwei Typen von Systemstrukturen:
 1. **Servoregelung:** Die Führungsgröße $w(t)$ ist im Voraus unbekannt und wird (*online*) von einer übergeordneten Ebene erzeugt und vorgegeben.
 2. **Trajektorienplanung:** Der Verlauf der Sollgröße $w(t)$ wird unter Berücksichtigung des Regelkreises und dessen Eigenschaften im Voraus (*offline*) geplant.



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.5 Trajektorienplanung und Servoregelung

■ Beispiel zu 1.): Servoregelung



- 1 Gehäuse
- 2 Zahnstange
- 3 Lenkspindelanschluss
- 4 Sensoreinheit
- 5 Lenkritzeln
- 6 Spurstange
- 7 Faltenbalg
- 8 Elektronisches Steuergerät
- 9 Elektromotor
- 10 Kugelumlaufgetriebe

EPSapa / Servoelectric
(Electrical power steering gear, axial-parallel)
Quelle: Bosch Automotive Steering

Warum handelt es
sich um eine
Servoregelung?



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.5 Trajektorienplanung und Servoregelung

■ Beispiel 2: Positionsregelung eines Industrieroboters





2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.6 Trajektorienplanung für Arbeitspunktwechsel

- **Ziel:** Überführung der Regelstrecke vom aktuellen Arbeitspunkt \bar{w}_0 in einen neuen Arbeitspunkt \bar{w}_e :

$$y(t = 0) = \bar{w}_0 \rightarrow y(t \geq t_e) = \bar{w}_e$$

t_e heißt Transitionszeit.

- Somit muss gelten:

$$y(t_e) = \bar{w}_e \text{ und } y^{(i)}(t \geq t_e) = 0, i = 1, \dots, n \quad (*)$$

$y^{(i)}$: i-te Ableitung von $y(t)$

- Häufig wird für die Trajektorie $w(t)$ ein Polynom $w(t) = a_{w_p} t^p + \dots + a_{w_1} t + a_{w_0}$ mit den noch unbekanntenen Koeffizienten $a_{w_i}, i = 1, \dots, p$ angesetzt. Die Koeffizienten a_{w_i} werden dann mithilfe von (*) bestimmt.



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.7 Fazit zum Standardregelkreis

- Ein **einschleifiger** Regelkreis besteht somit aus
 1. einem Sollgrößengenerator für **eine** Sollgröße,
 2. einer Rückkopplung **einer** Messgröße/Ausgangsgröße.
- Die Sollgröße ist ggf. a priori bekannt und entstammt einem Trajektorienplanungsprozess.
- Ziel ist die Störgrößenausregelung oder die Folgeregelung
- Der Regler $R(s)$ ist Teil des offenen Kreises $F_o(s)$.
- Die Berechnung von $R(s)$ ist Gegenstand der folgenden Kapitel.

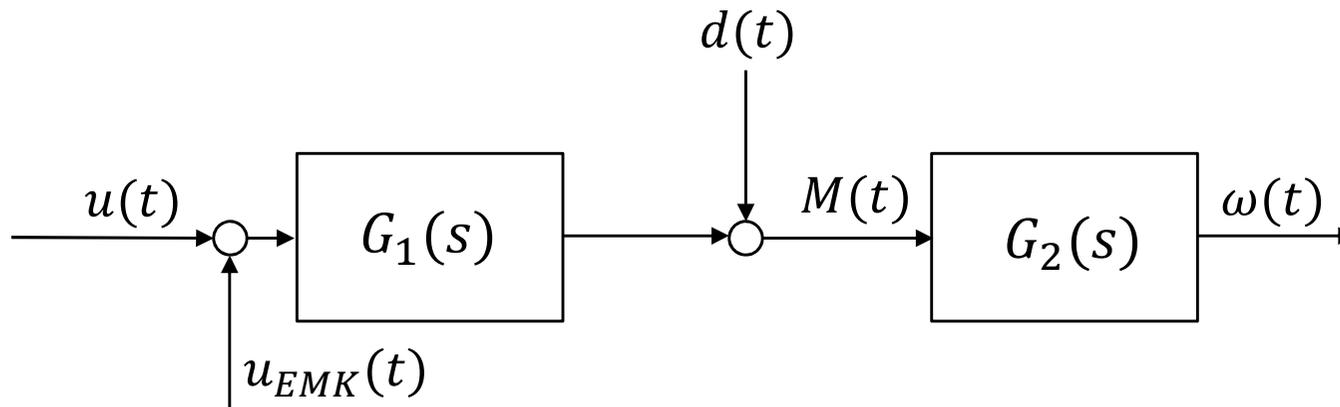
Im Folgenden nun Erweiterungen.



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.8 Kaskadenregelung

- Struktur einer Linearachse



$u(t)$: Eingangsspannung
 $d(t)$: Lastmoment
 $\omega(t)$: Drehzahl

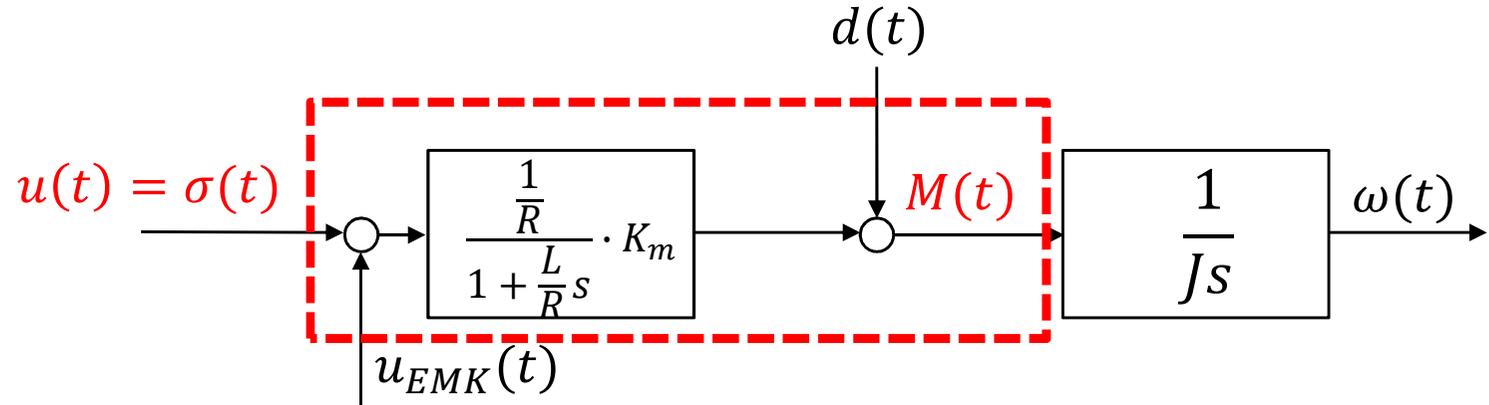
- **Frage:**
Welches Zeitverhalten besitzt die gezeigte Linearachse?



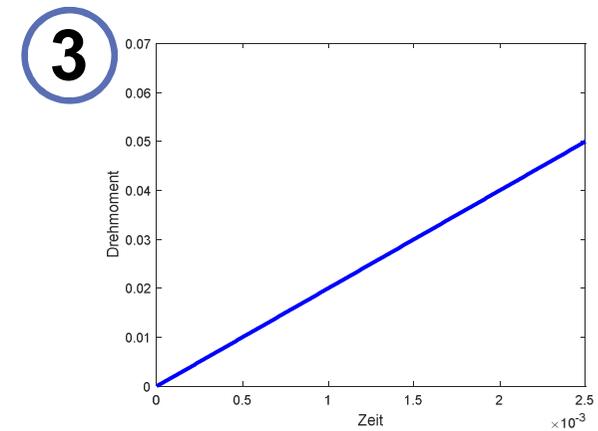
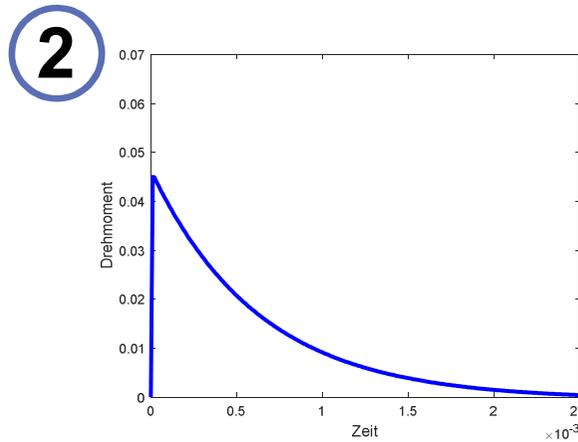
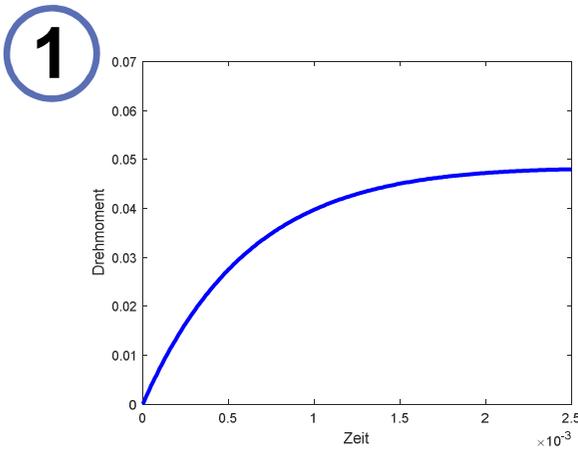
2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.8 Kaskadenregelung

■ **Frage:**
Welches Zeitverhalten besitzt die gezeigte Linearachse?



■ Zeitverlauf von $M(t)$ bei Sprunganregung:

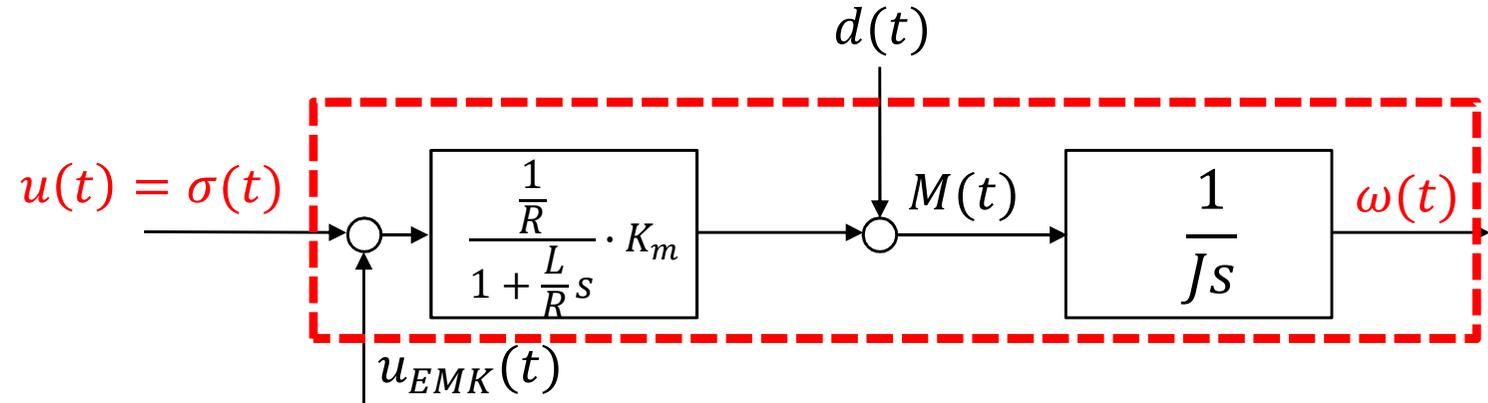




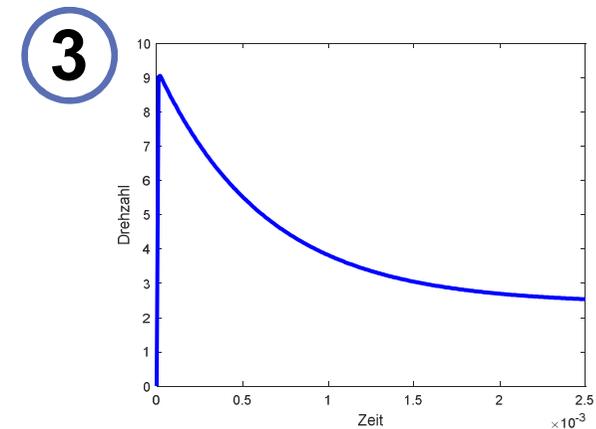
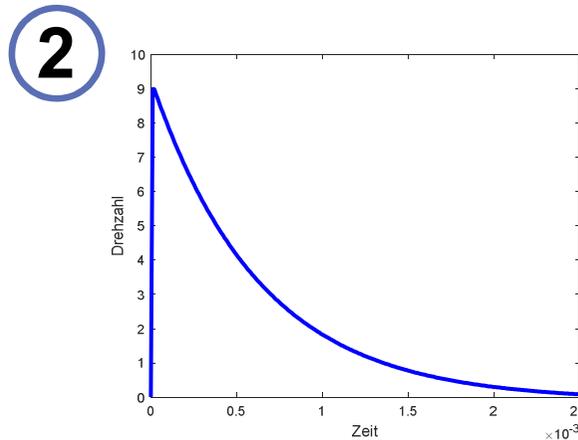
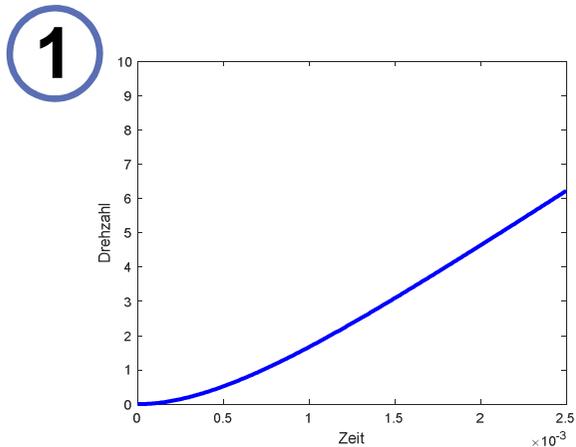
2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.8 Kaskadenregelung

- **Frage:**
Welches Zeitverhalten besitzt die gezeigte Linearachse?



- Zeitverlauf von $\omega(t)$ bei Sprunganregung:

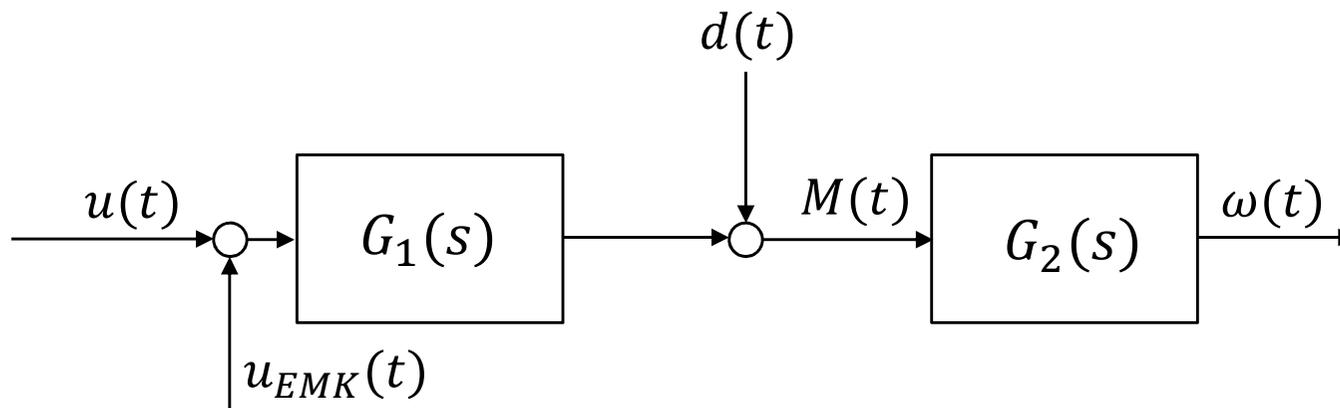




2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.8 Kaskadenregelung

■ Struktur der Linearachse



$u(t)$: Eingangsspannung
 $d(t)$: Lastmoment
 $\omega(t)$: Drehzahl

■ Frage:

Welche Maßnahme führt in diesem Beispiel zu einem schnelleren Einschwingen der Drehzahl?

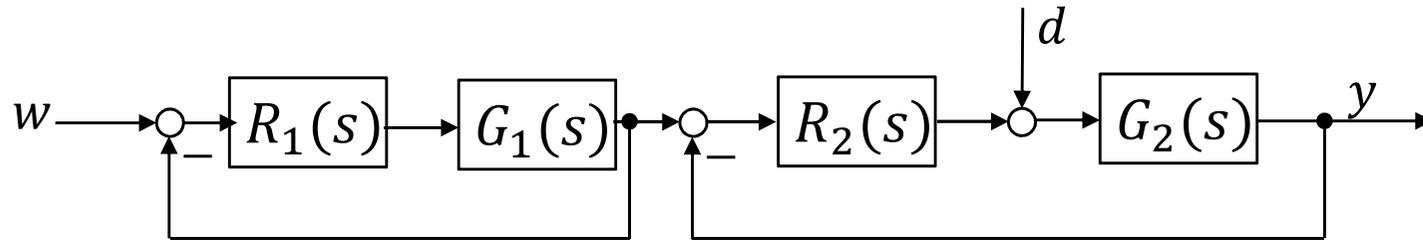


2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

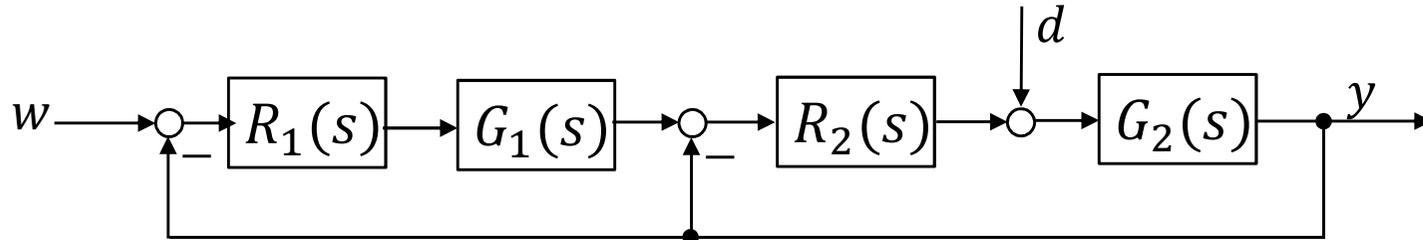
2.4.8 Kaskadenregelung

- Welche Maßnahme führt zu einem schnelleren Einschwingen der Drehzahl?

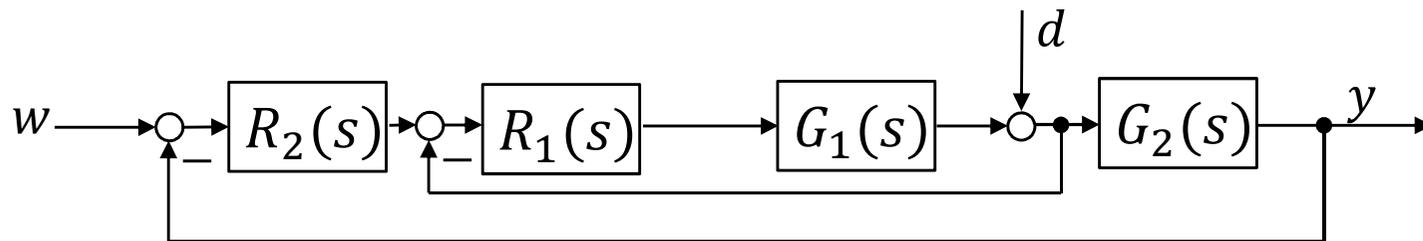
1



2



3



Tafelanschrieb 2.4.8

Eigenschaften der Kaskadenregelung



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.9 Störgrößenaufschaltung

■ Klimaanlage im Auto

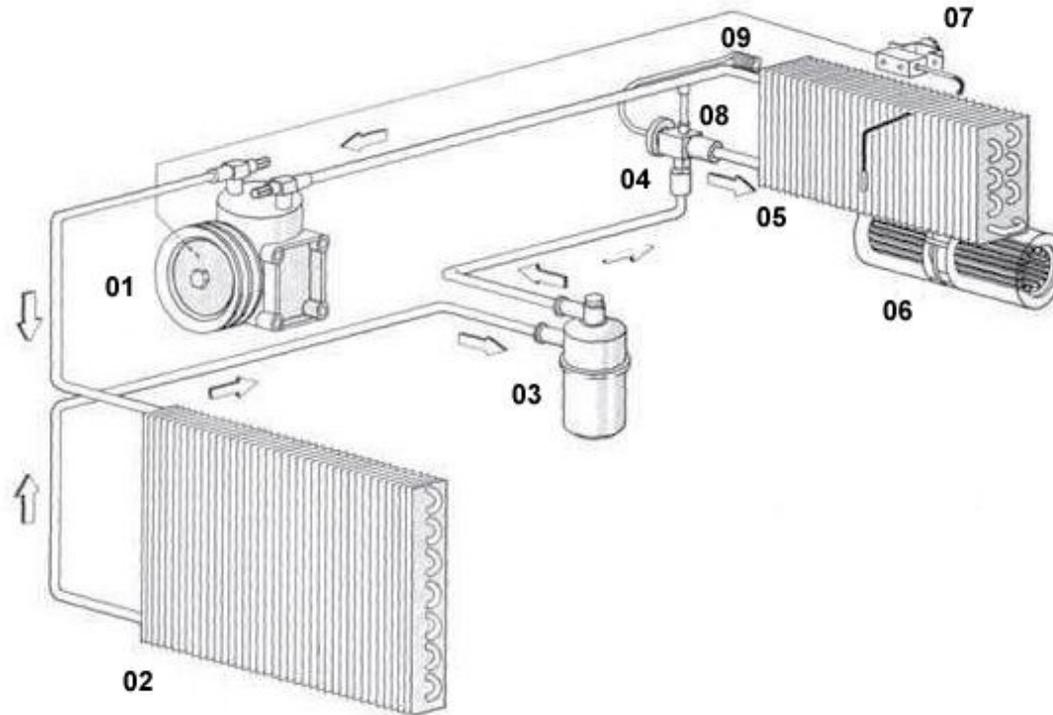
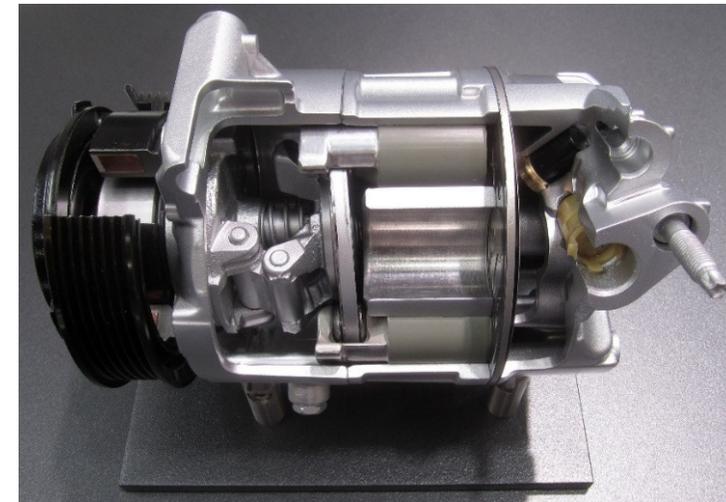


Schaubild einer Klimaanlage
(Quelle: Wikipedia)

- 01: Klimakompressor
- 02: Kondensator
- 03: Kältemittelbehälter
- 04: Expansionsventil
- 05: Verdampfer
- 06: Gebläse
- 07: Temperaturfühler
- 08: Ausgleichsleitung
- 09: Temperatur-Unterdruckschalter



Klimakompressor
(Taumelscheibenverdichter)

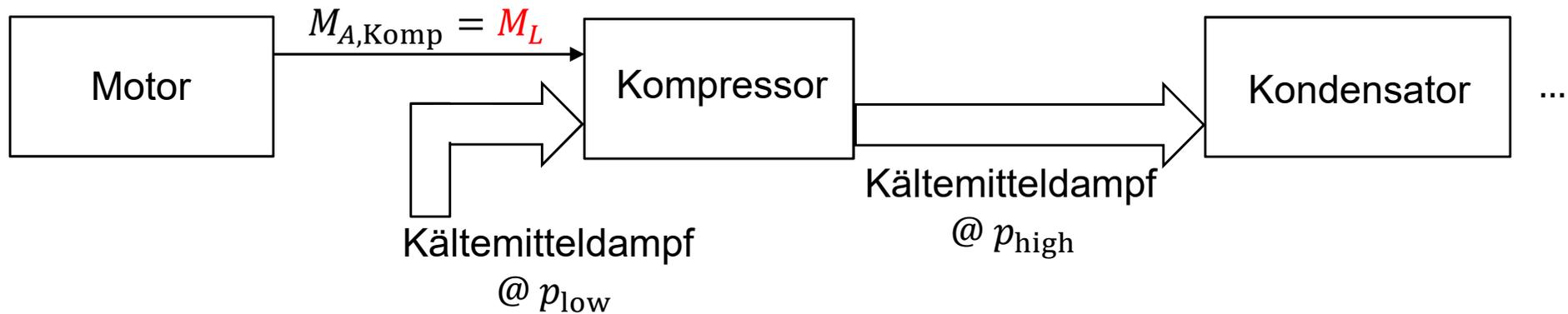


2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

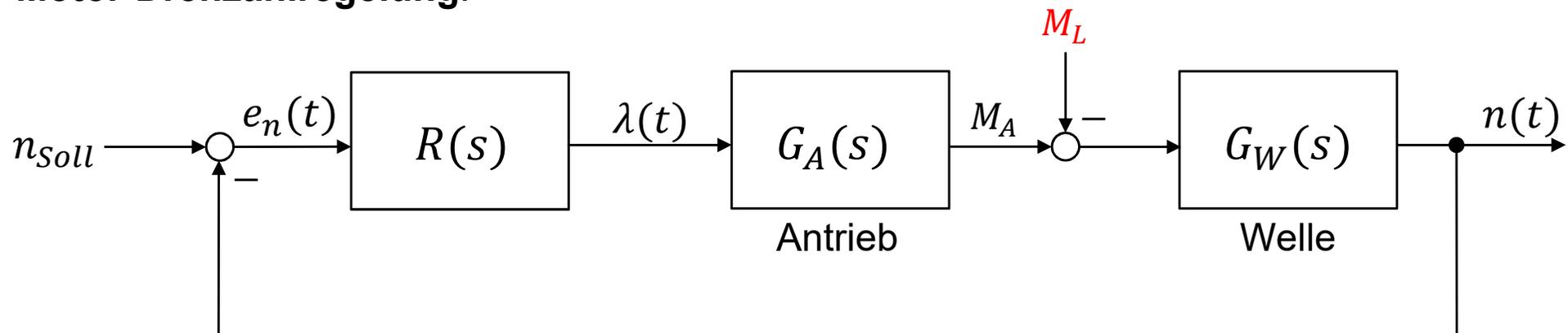
2.4.9 Störgrößenaufschaltung

- Klimaanlage im Auto mit Drehzahlregelung des Motors
- Schematisches Blockschaltbild:

Klimakompressor:



Motor-Drehzahlregelung:



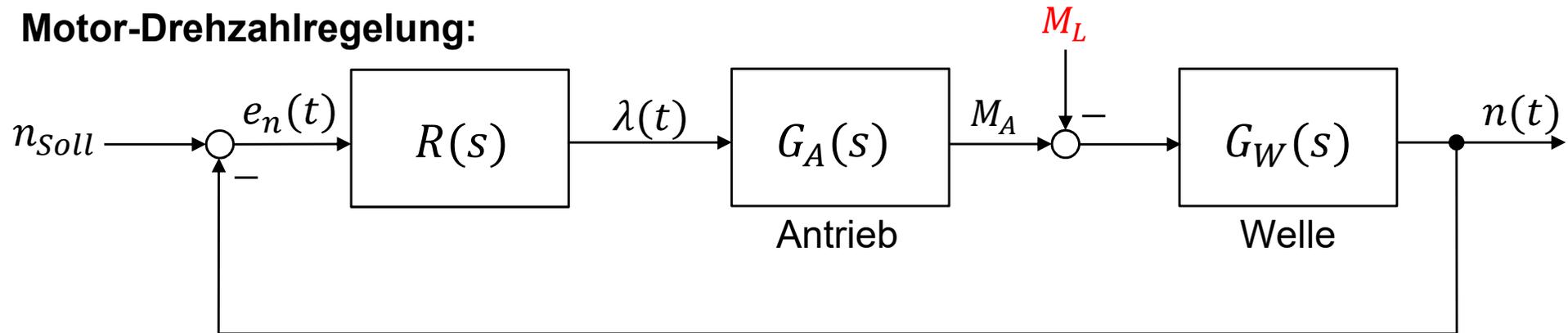


2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

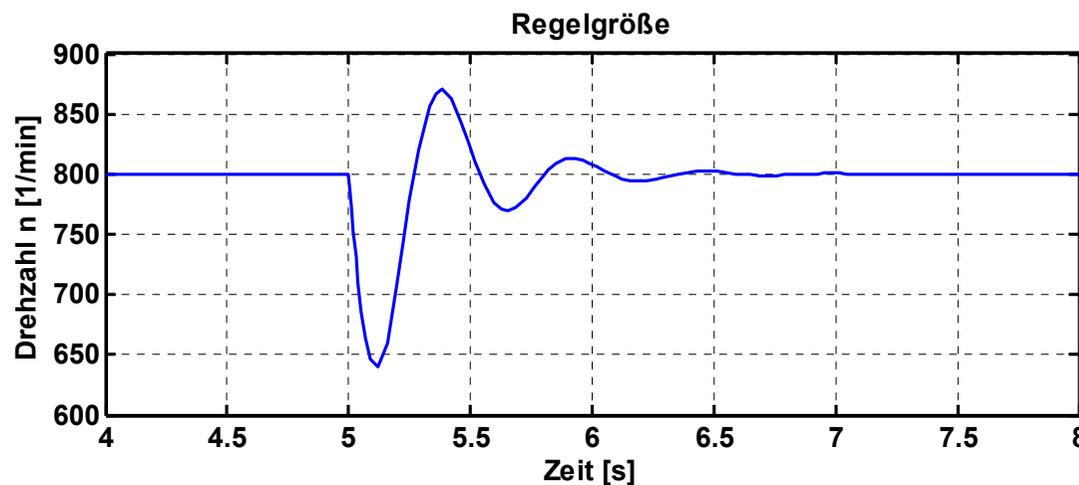
2.4.9 Störgrößenaufschaltung

- Klimaanlage im Auto mit Drehzahlregelung des Motors

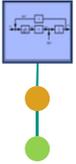
Motor-Drehzahlregelung:



- **Problem:** Beim Einschalten des Klimakompressors sackt die Drehzahl des Motors zunächst ab, bis die Drehzahlregelung den Sollwert wieder einstellt.



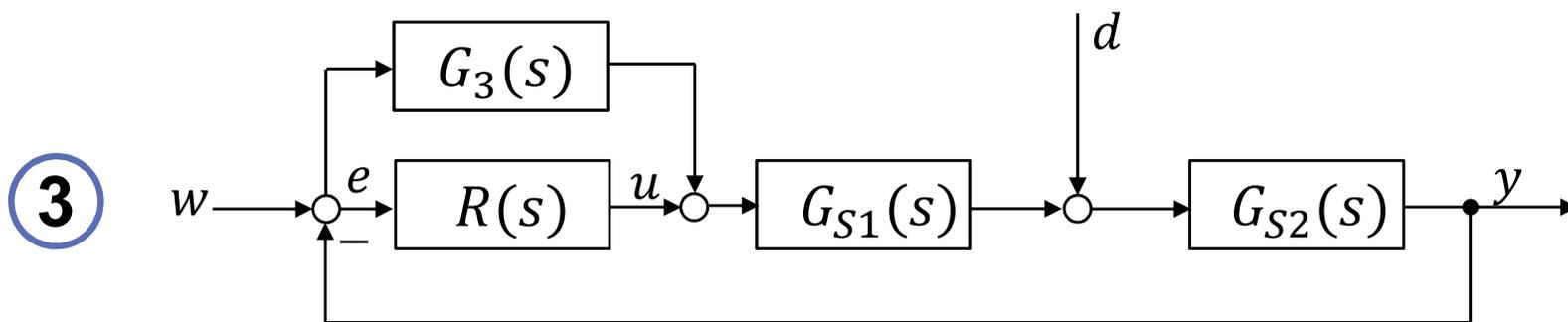
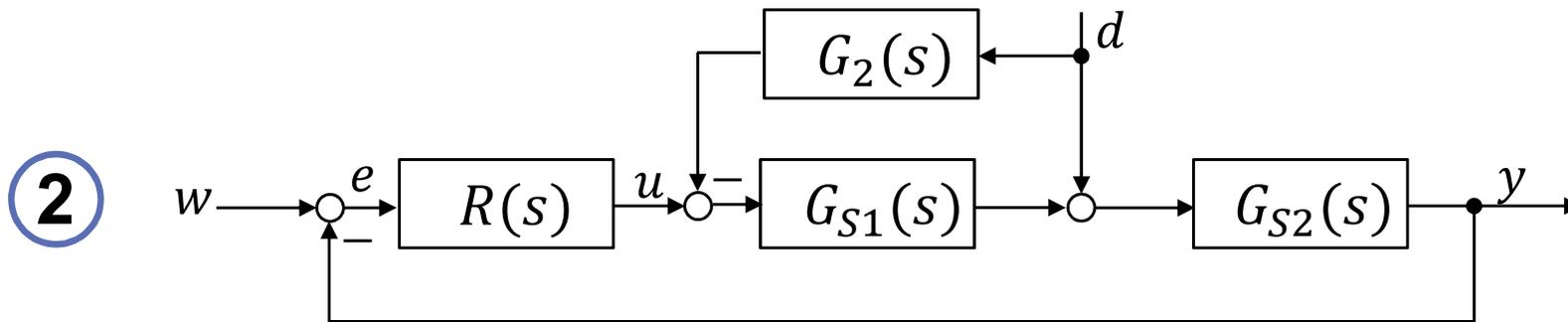
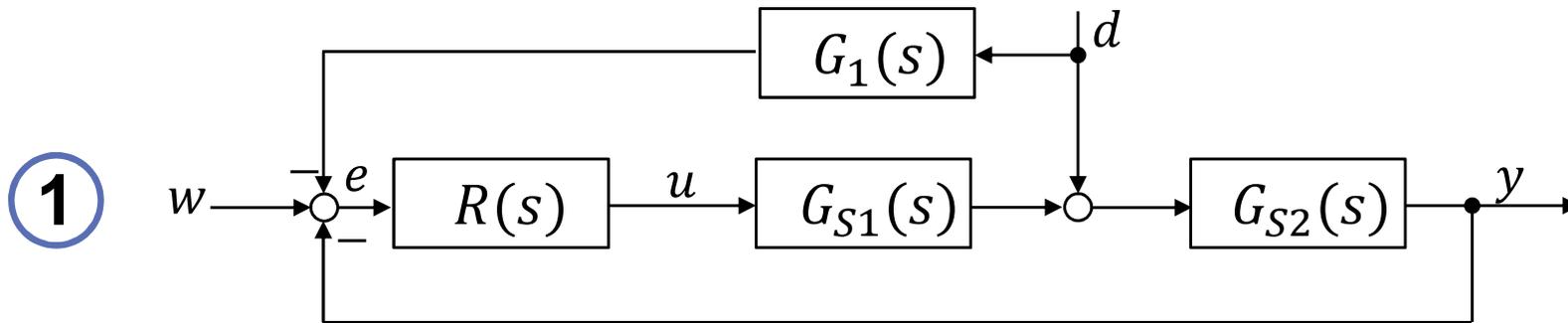
Sprunghafte Störung ($M_L = 20$ Nm) zum Zeitpunkt $t = 5$ s



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.9 Störgrößenaufschaltung

- Welche Struktur schafft Abhilfe?

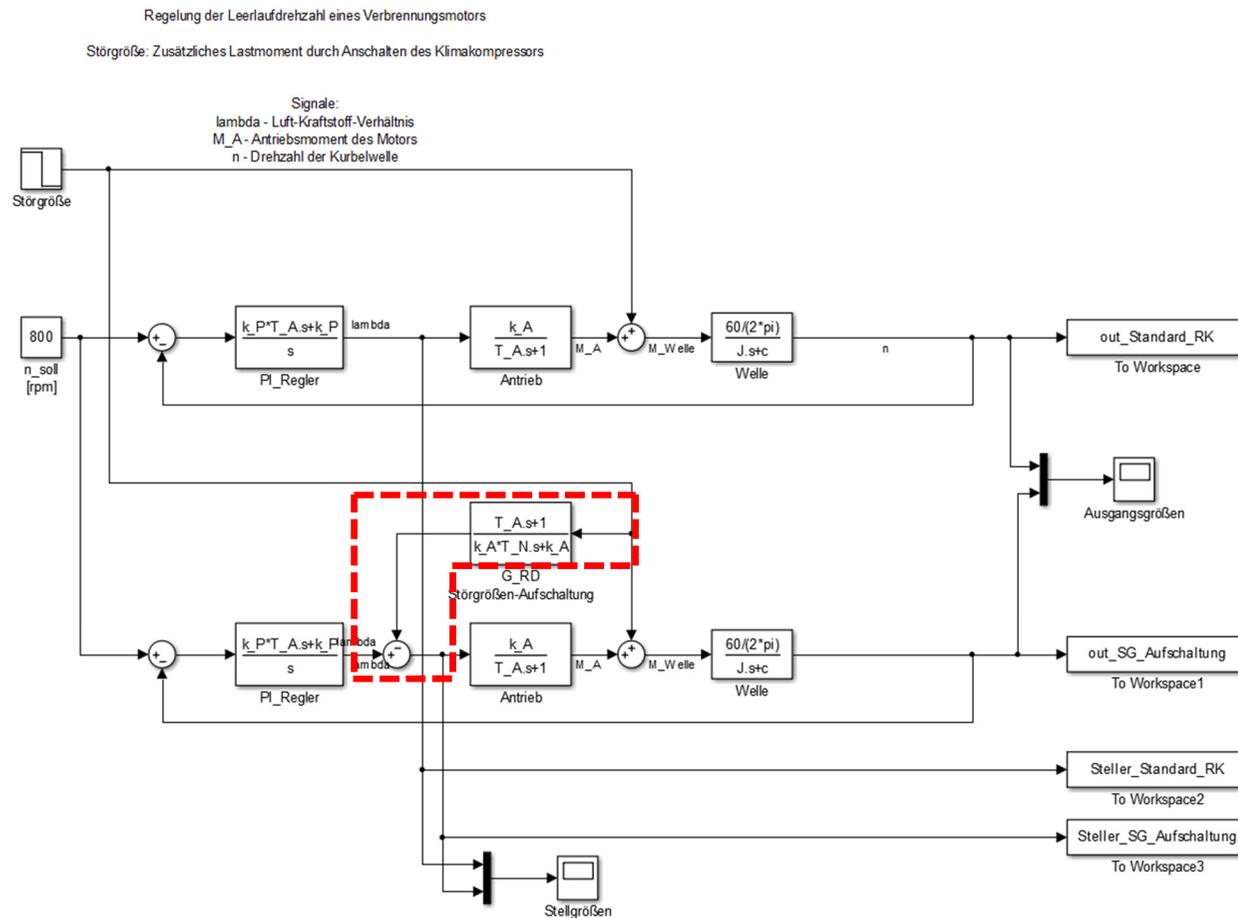




2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.9 Störgrößenaufschaltung

- Klimaanlage im Auto mit Drehzahlregelung des Motors
- Simulink-Modell: Standardregelkreis und Erweiterung um Störgrößenaufschaltung

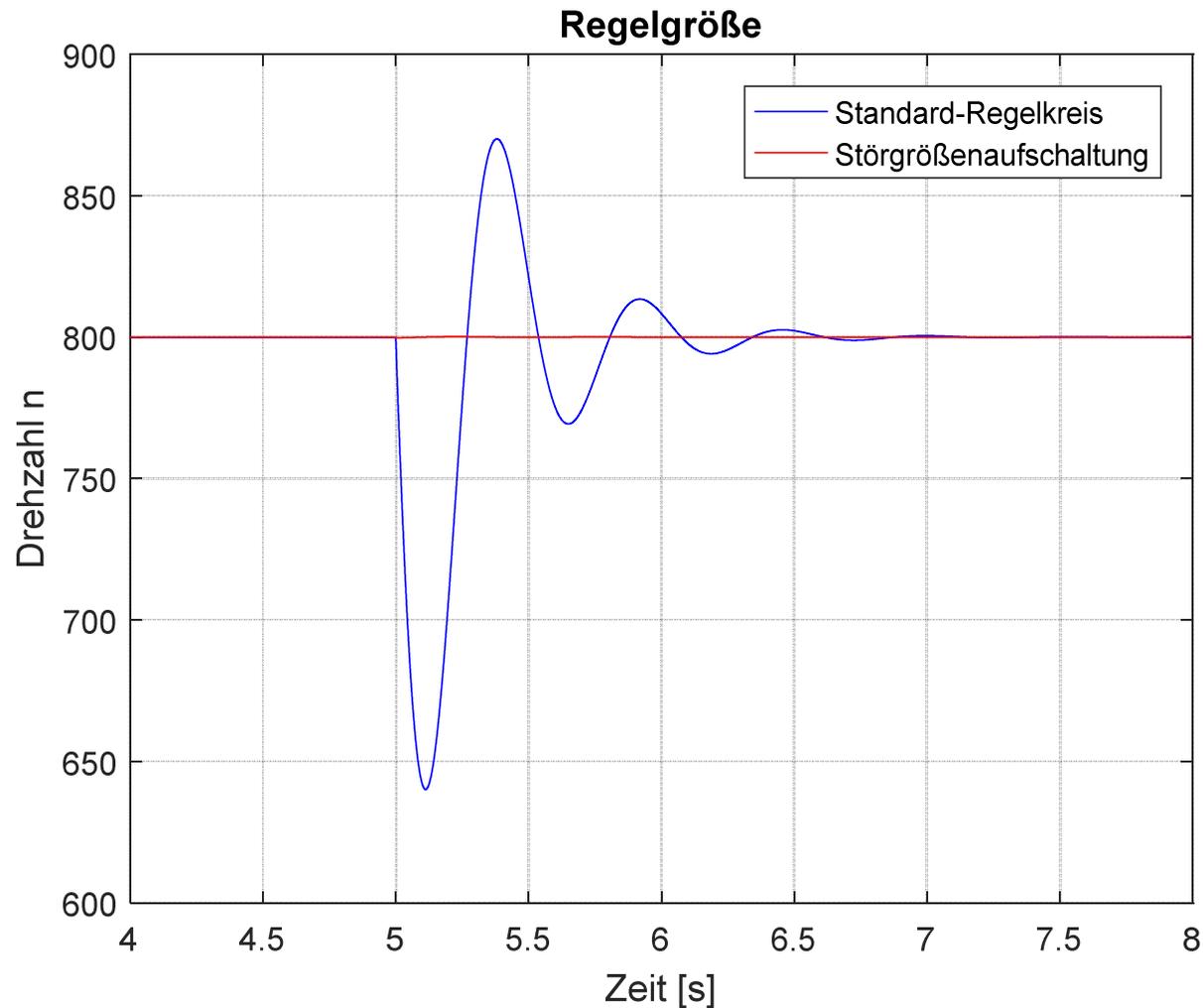




2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.9 Störgrößenaufschaltung

- Vergleich der Simulationsergebnisse



Tafelanschrieb 2.4.9

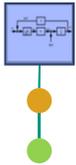
Eigenschaften der Störgrößenaufschaltung



2.4 Der Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen

2.4.10 Fazit zu den Regelkreisstrukturen

- Nur **eine** Stellgröße vorhanden, aber ggf. mehrere Messgrößen genutzt.
- Ggf. mehrere Messgrößen, die in einer Vorwärtsstruktur oder Rückkopplungsstruktur genutzt werden: Mehrere Schleifen möglich.
- Hoffnung: Regelkreisverhalten „irgendwie“ besser.
- Offen:
 - Was heißt „gutes Regelkreisverhalten“?
 - Kann man den Regler $R(s)$ berechnen, und wenn ja, wie?
 - Wie werden mehrschleifige Regelkreise berechnet?
 - Wie wird/werden der/die Regler technisch realisiert?



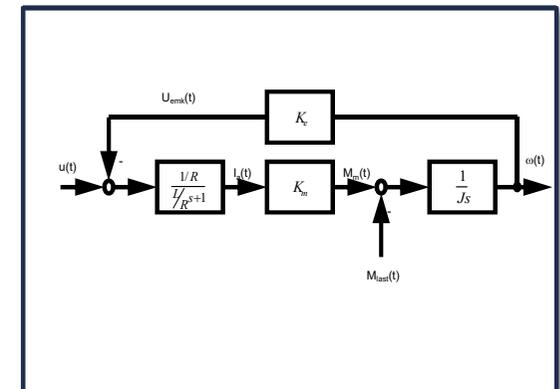
1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
- 5. Analoge und digitale Regelkreise**
6. Beschreibung digitaler Regelkreise

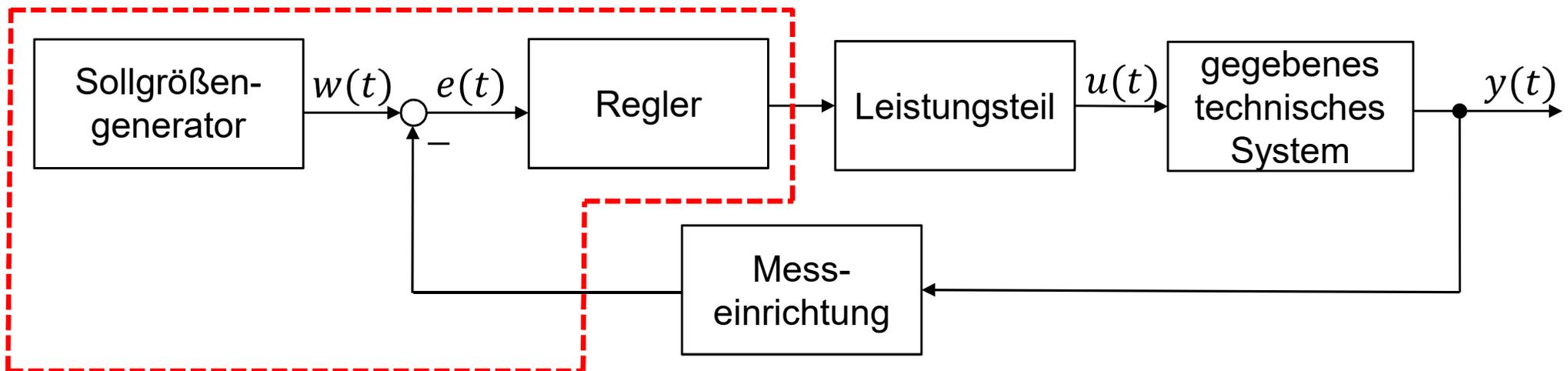




2.5 Analoge und digitale Regelkreise

2.5.1 Reglerrealisierung

- Falls der Regler $R(s)$ (sowie weitere Strukturelemente) für ein gegebenes technisches System entworfen wurden und nun „künstlich“ hinzugefügt werden soll, stellt sich die Frage, wie eine technische Realisierung erfolgen kann.



- **Ziel:** Technische Realisierung von Regler und Sollgrößengenerator



2.5 Analoge und digitale Regelkreise

2.5.1 Reglerrealisierung



Realisierungsmöglichkeiten

- **Analoge Realisierung:** Die Aufgabe besteht darin, $R(s)$ und den Sollgrößengenerator
 - durch eine elektrische Schaltung
oder
 - durch eine mechanische Konstruktion
oder
 - durch eine hydraulische Schaltung
abzubilden.

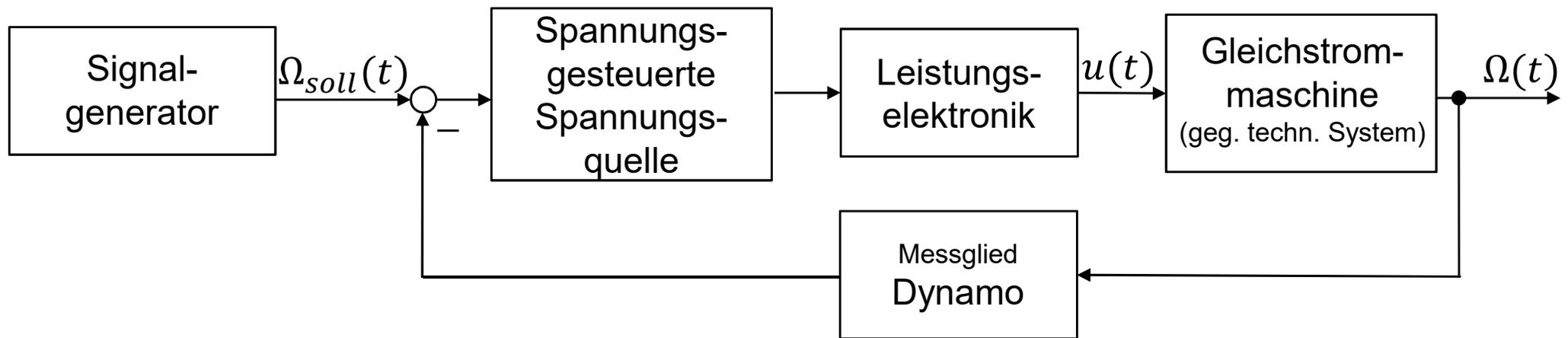
- **Digitale Realisierung:**
 - $R(s)$ und der Sollgrößengenerator werden durch einen **Rechner** ermittelt und geeignet mit dem technischen System verbunden.
 - Es ist zu prüfen, inwieweit die digitalen Bauelemente den Regelkreis verändern.



2.5 Analoge und digitale Regelkreise

2.5.1 Beispiel für eine analoge elektrische Realisierung

Drehzahlregelung einer Gleichstrommaschine

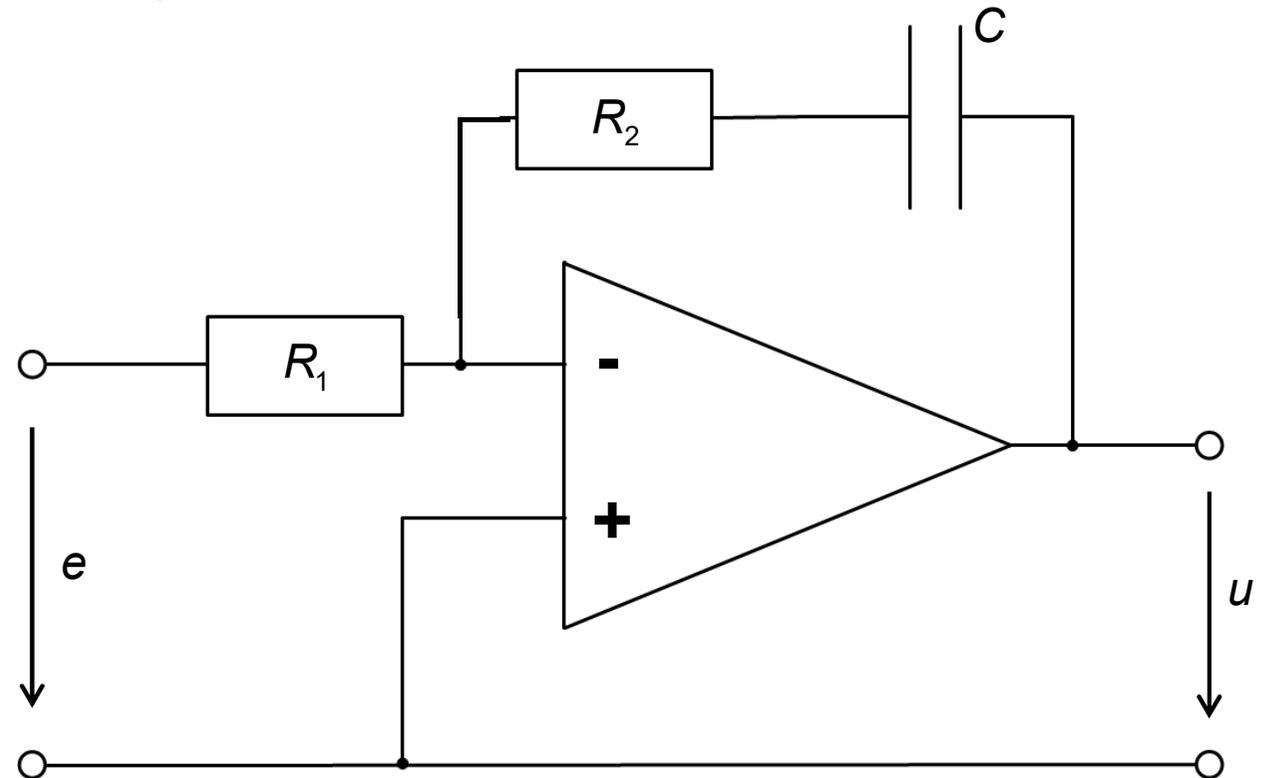




2.5 Analoge und digitale Regelkreise

2.5.1 Beispiel für eine analoge elektrische Realisierung

- Schaltungstechnische Realisierung eines PI-Gliedes

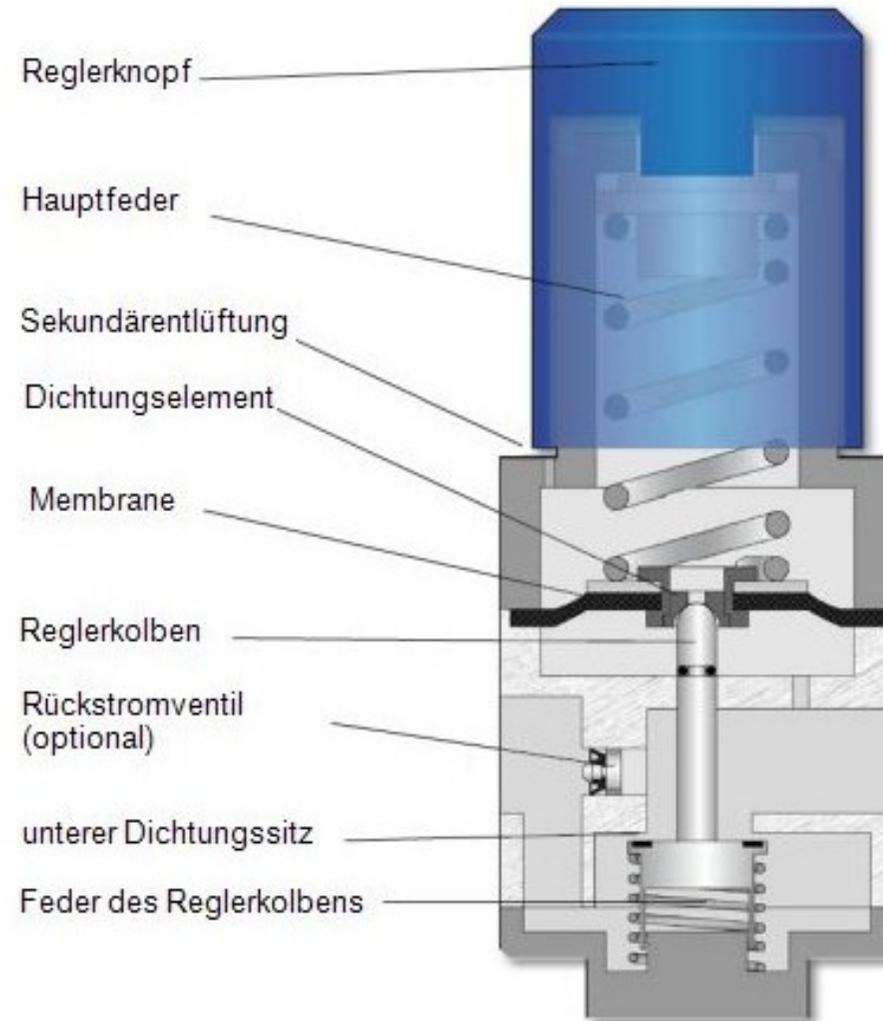




2.5 Analoge und digitale Regelkreise

2.5.1 Beispiel für eine mechanische / pneumatische Reglerrealisierung

Direktgesteuerte Membran-Regelventile

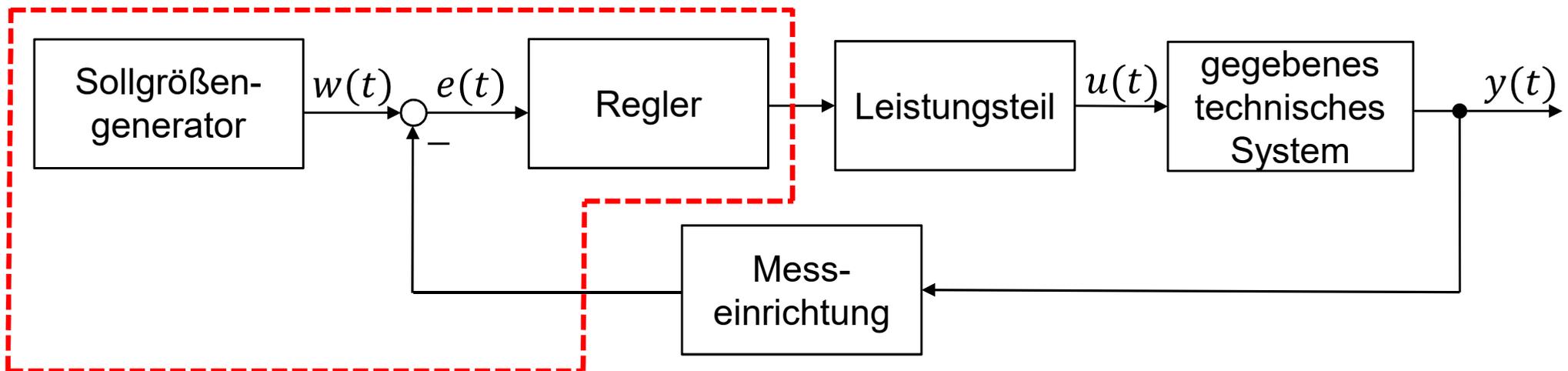




2.5 Analoge und digitale Regelkreise

2.5.1 Reglerrealisierung

- Falls der Regler $R(s)$ (sowie weitere Strukturelemente) für ein gegebenes technisches System entworfen wurden und nun „künstlich“ hinzugefügt werden soll, stellt sich die Frage, wie eine technische Realisierung erfolgen kann.

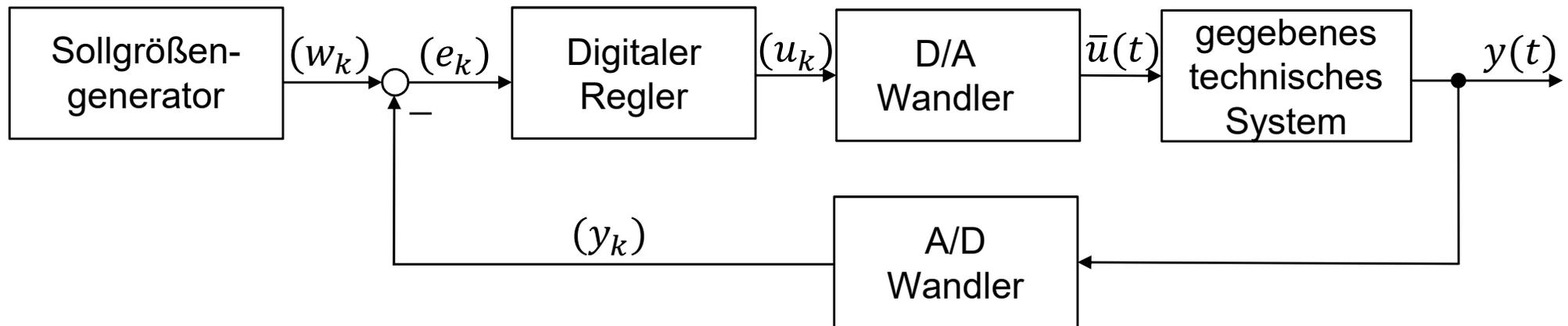


- **Ziel:** Technische Realisierung von Regler und Sollgrößengenerator



2.5 Analoge und digitale Regelkreise

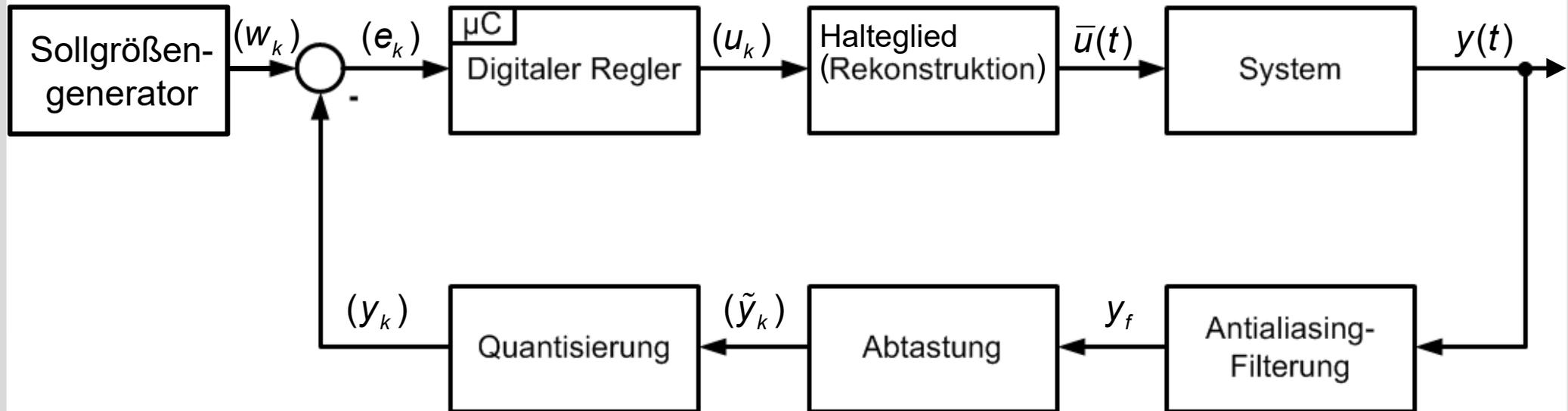
2.5.1 Reglerrealisierung





2.5 Analoge und digitale Regelkreise

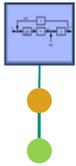
2.5.2 Allgemeiner Aufbau eines digitalen Regelkreises



■ **Gesucht:** Geeignete Beschreibung / geeignetes Modell für den Reglerentwurf

■ Notation: (x_k) - Folgen

\bar{x} - abschnittsweise konstante Funktionen



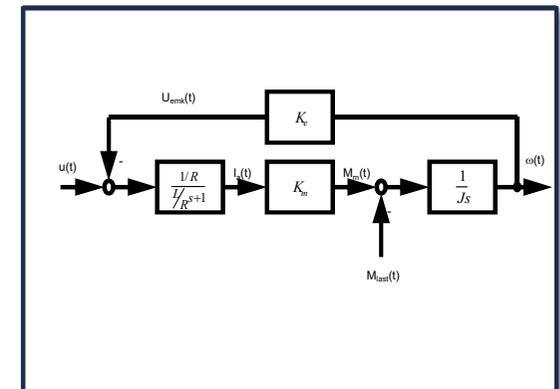
1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Analoge und digitale Regelkreise
- 6. Beschreibung digitaler Regelkreise**

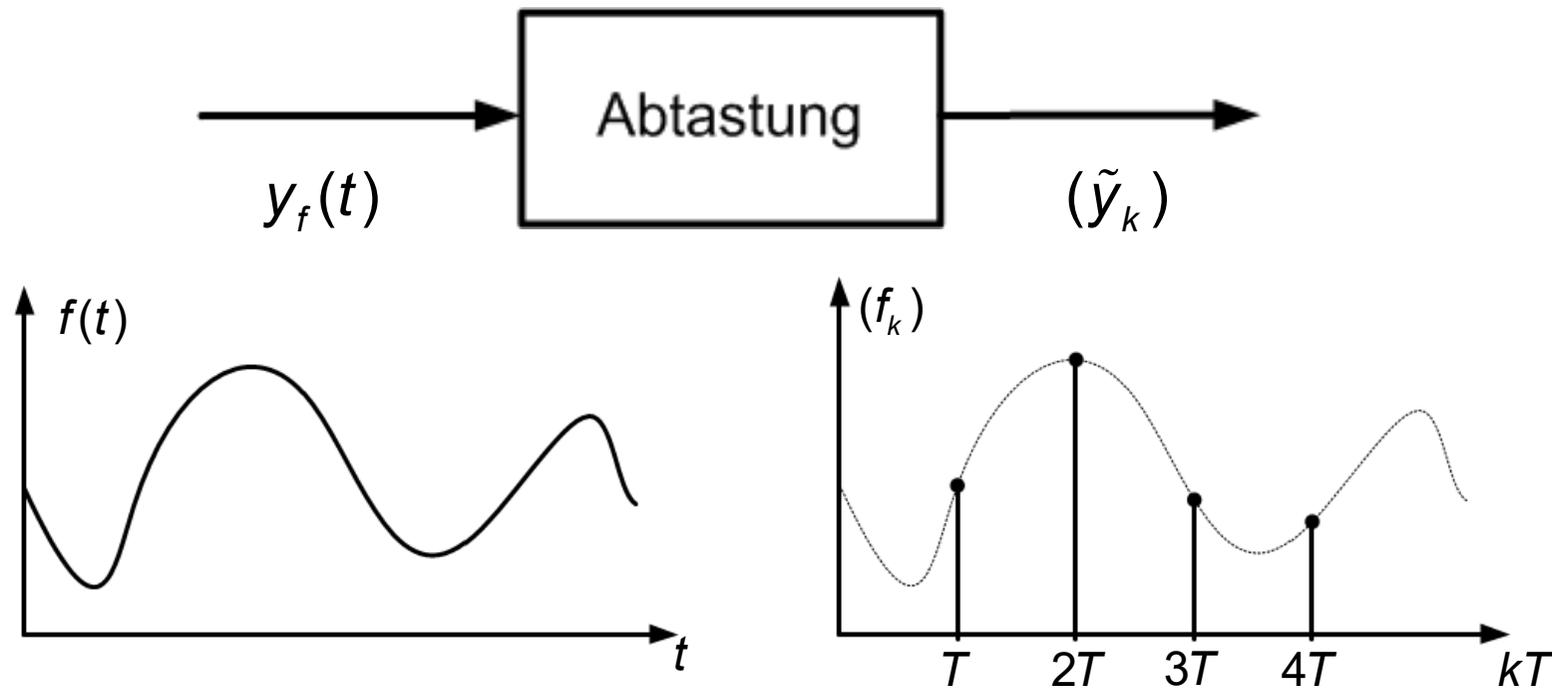




2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.1 Abtastung

- Von einem kontinuierlichen Zeitverlauf werden zu äquidistanten Zeitpunkten Werte aufgezeichnet → Abtastung

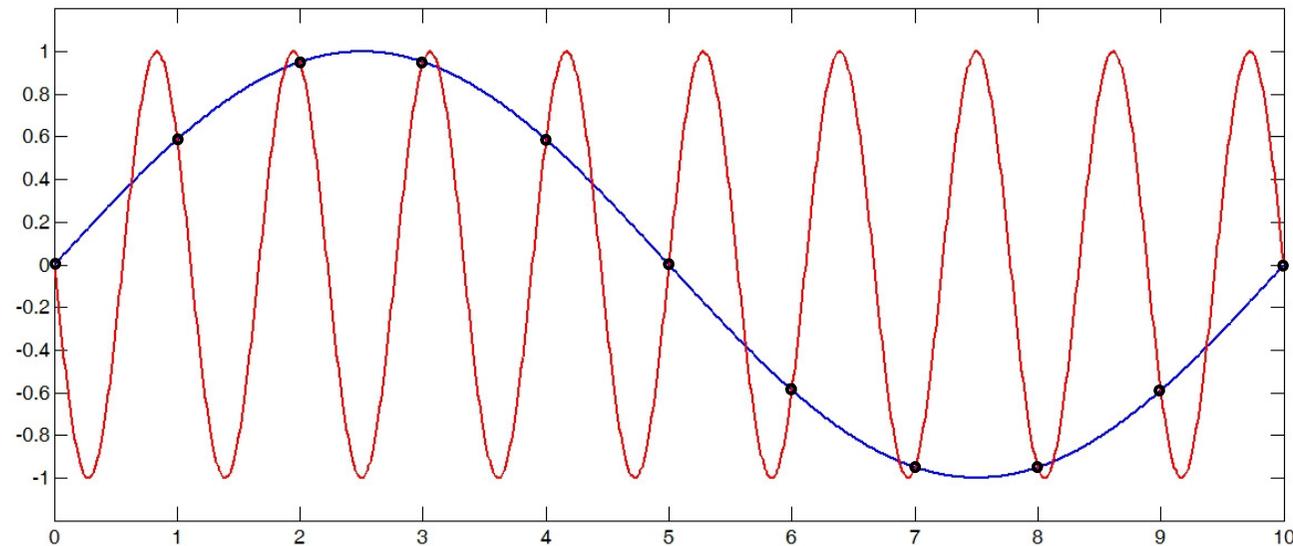


- Ergebnis ist Zahlenfolge (y_k)



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.2 Antialiasfilter



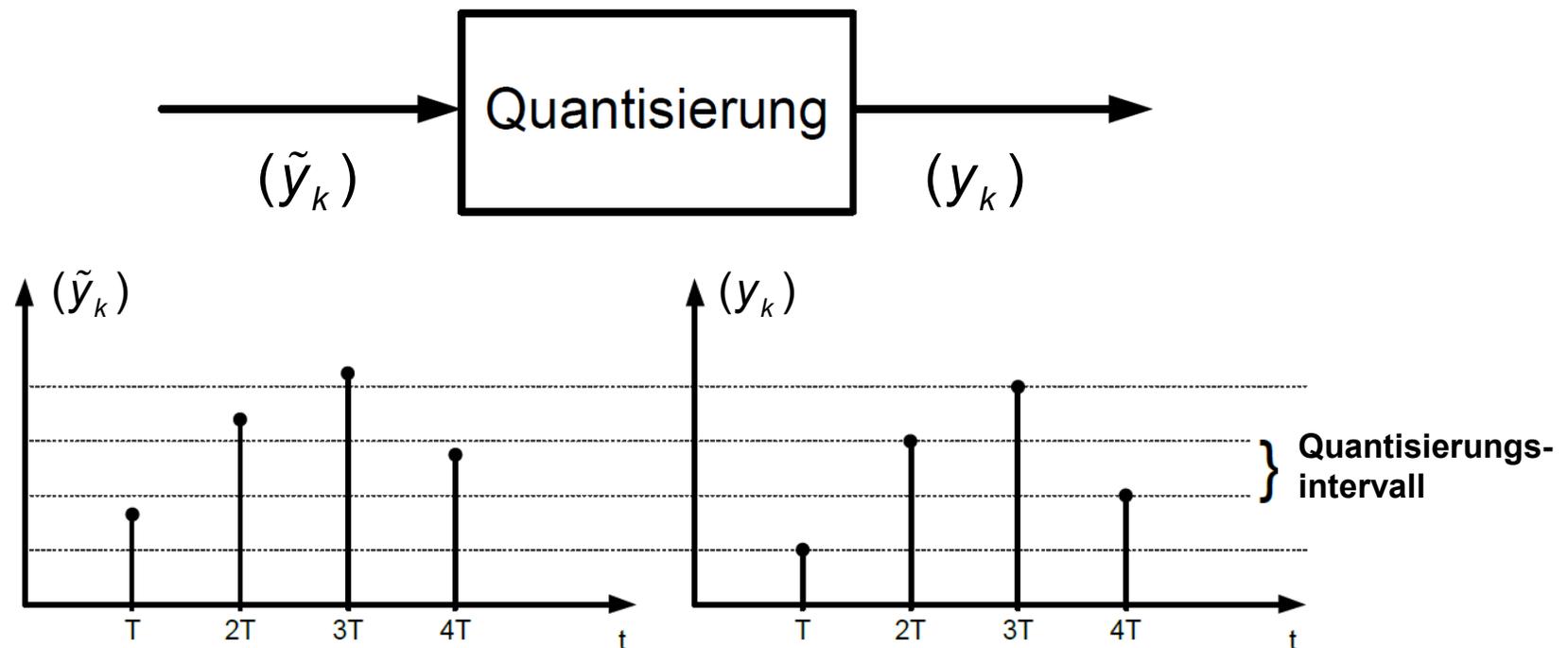
- **Generell: Abtasttheorem von Shannon ist zu beachten**
 - D.h. Antialiasfilter muss für $Y(j\omega) \cong 0$ für $|\omega| \geq \omega_{\max}$ sorgen
 - Ferner ist für die Abtastfrequenz mindestens $\frac{2\pi}{T} > 2\omega_{\max}$ zu wählen
 - Die Wahl der Abtastfrequenz wird in Kap. 4 und 6 besprochen
- Der Antialiasfilter ist je nach Anwendung zu berücksichtigen, man schlägt ihn dann zur Strecke hinzu



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.3 Quantisierung

- Das Signal wird digitalisiert, d.h. es steht nur eine endliche Anzahl von Werten zur Beschreibung zur Verfügung → Quantisierung



- Heute ist die Quantisierung häufig sehr genau, somit

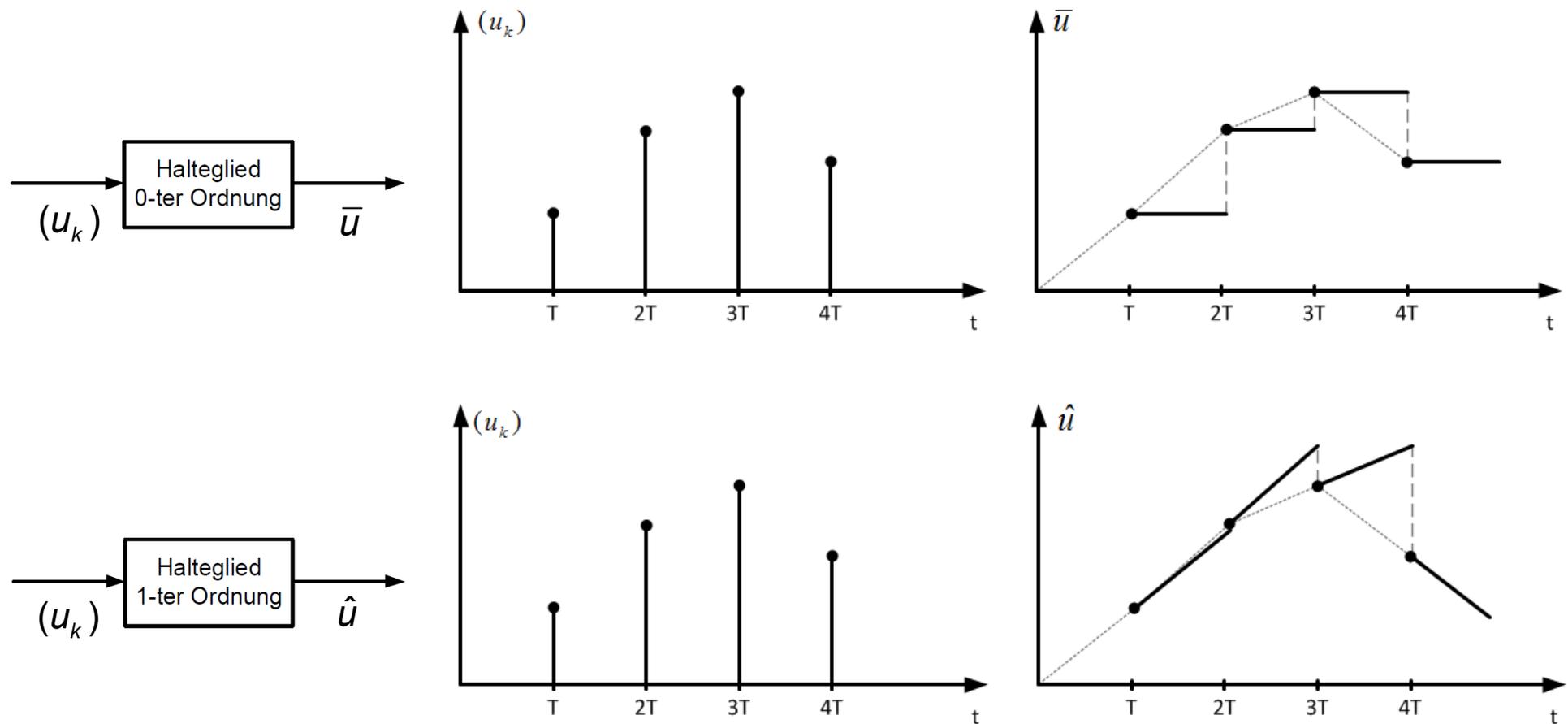
$$(y_k) \cong (\tilde{y}_k) \Rightarrow \text{Quantisierung kann vernachlässigt werden}$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.4 Halteglied

- Die Signalrekonstruktion erfolgt durch ein Halteglied
- Das Halteglied muss kausal sein





2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.4 Halteglied (2)

■ Mathematische Beschreibung des Haltegliedes

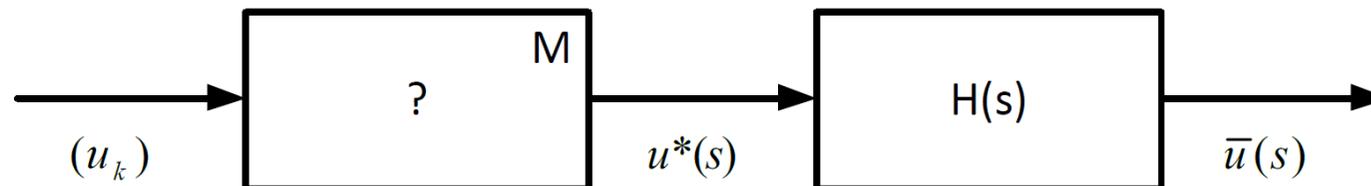
$$\bar{u}(vT \leq t < (v+1)T) = [\sigma(t - vT) - \sigma(t - (v+1)T)] \cdot u_v$$

wobei $\sigma(t)$ der Einheitssprung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

Damit:

$$\bar{u}(t) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v [\sigma(t - vT) - \sigma(t - (v+1)T)]$$

$$\bar{U}(s) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v \left[\frac{e^{-vTs}}{s} - \frac{e^{-(v+1)Ts}}{s} \right] = \underbrace{\sum_{v=0}^{\infty} u_v e^{-vTs}}_{U^*(s)} \cdot \underbrace{\frac{1 - e^{-Ts}}{s}}_{H(s)}$$

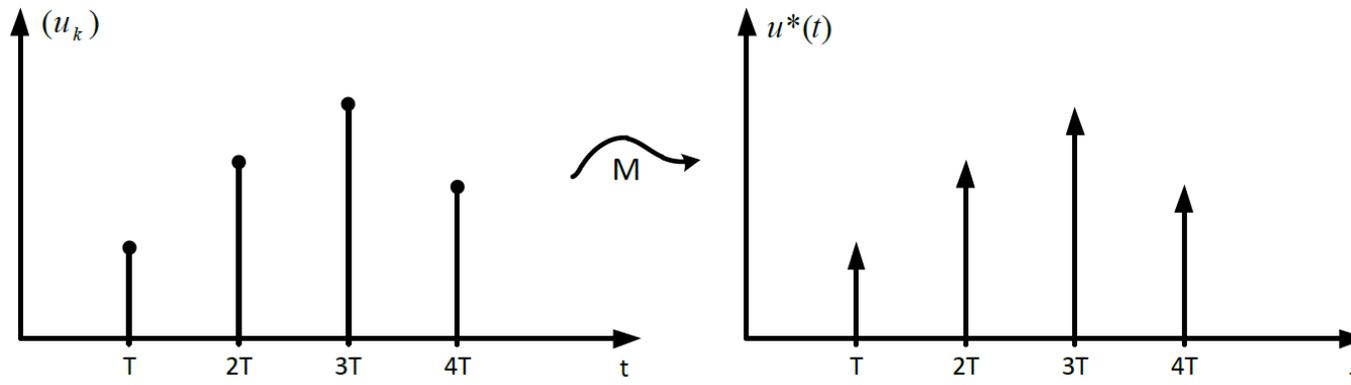




2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.4 Halteglied (3)

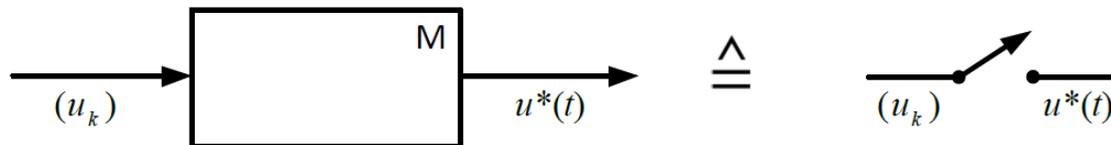
$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$$



- Offenbar entsteht $u^*(t)$ aus einer **Modulation** von u_k mit einem Impulskamm

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

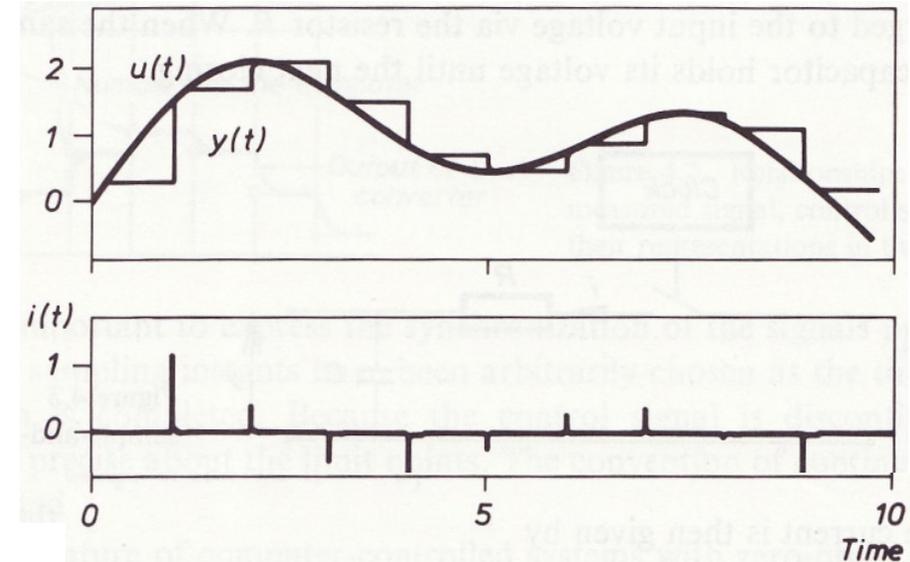
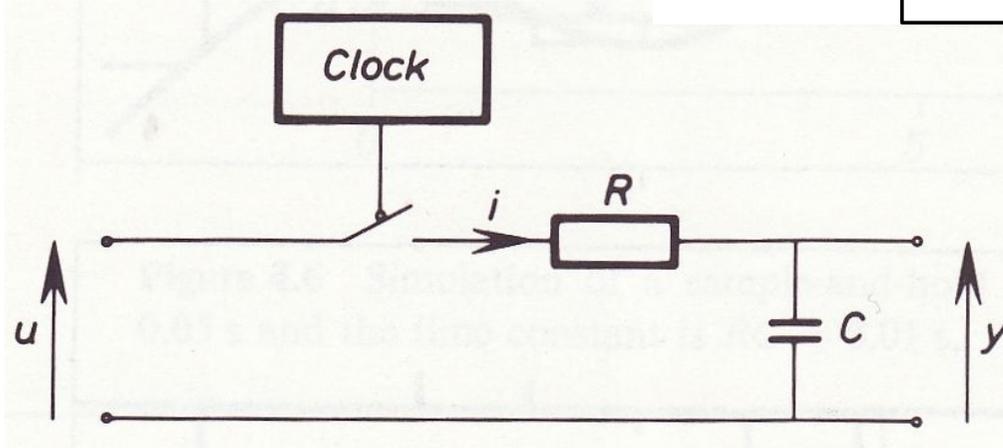
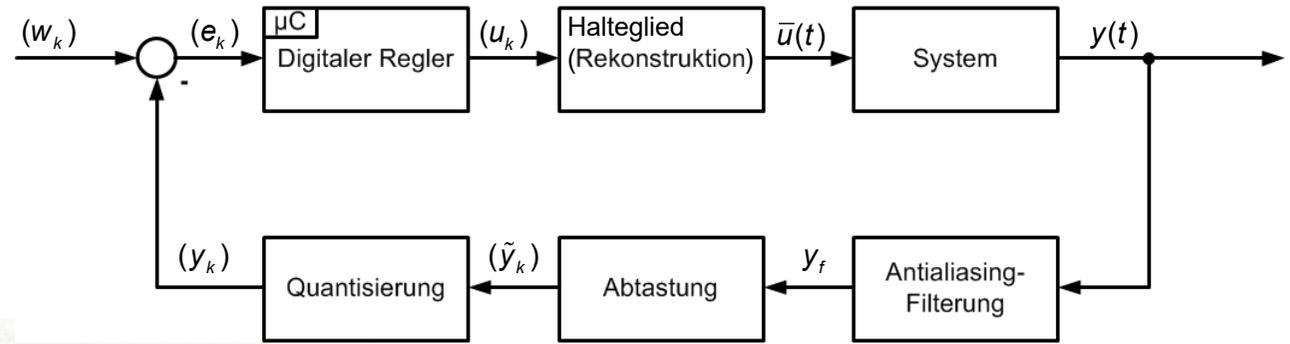
- M wird auch Delta-Abtaster genannt.





2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.4 Interpretation Halteglied

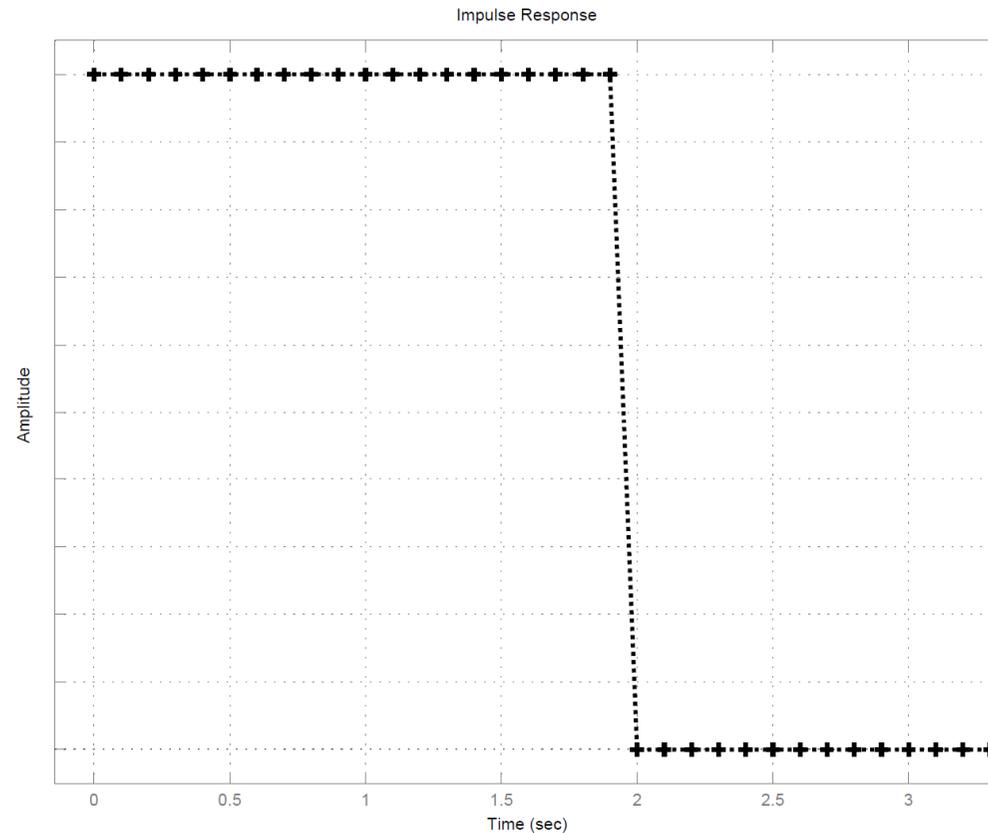




2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.4 Interpretation Halteglied (2)

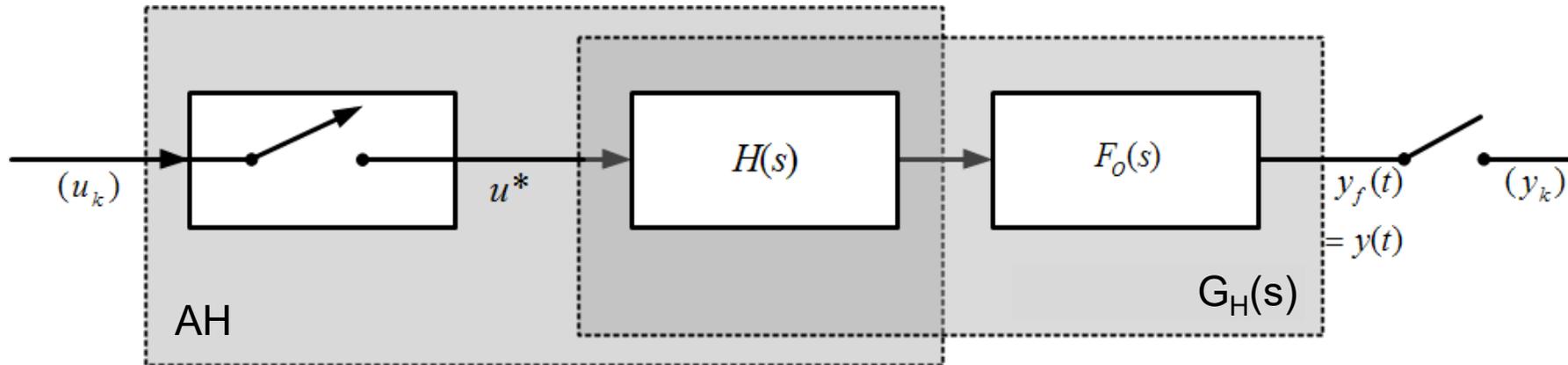
$$G_H(s) = H(s)F_O(s) = (1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{1}{s} \cdot F_O(s) \quad g_H(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)F_O(s)\}$$





2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.5 Abtastsystem



$$\begin{aligned}y(t) &= u^*(t) * g_H(t) = \left(\sum_{v=0}^{\infty} u_v \delta(t - vT) \right) * g_H(t) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} u_v (\delta(t - vT) * g_H(t)) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} u_v g_H(t - vT)\end{aligned}$$

- Betrachtet man $y(t)$ nur zu den Zeitpunkten $t = kT$ (Abtastung), erhält man die Ausgangsfolge

$$(y(kT)) = \left(\sum_{v=0}^{\infty} u_v g_H(kT - vT) \right)$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.5 Abtastsystem (2)

- Zur Erinnerung: zeitdiskrete Faltung zweier Zahlenfolgen (bitte wiederholen VL SUS)

$$(a_k) * (b_k) = \left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v b_{k-v} \right)$$

- Die Strecke sei kausal, d.h. $(g_H(kT)) = 0$ für $k \leq 0$

- **Damit**

$$(y(kT)) = (u_k) * (g_H(kT))$$

- Die Ausgangs-Folge (y_k) entsteht also durch eine **diskrete Faltung** mit der **abgetasteten Impulsantwort** des zeitkontinuierlichen Systems **mit Halteglied**
- Diese Beschreibung nennt man „**Stroboskop-Modell**“, da das System nur zu diskreten Zeitpunkten betrachtet wird.
- **Achtung:** Halteglied nur für kleine Abtastzeiten zu vernachlässigen



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.5 Abtastsystem (3)

Berechnung von $(g_H(kT))$:

Weg 1:

Z-Transformation (siehe Abschnitt 2.7)

Weg 2:

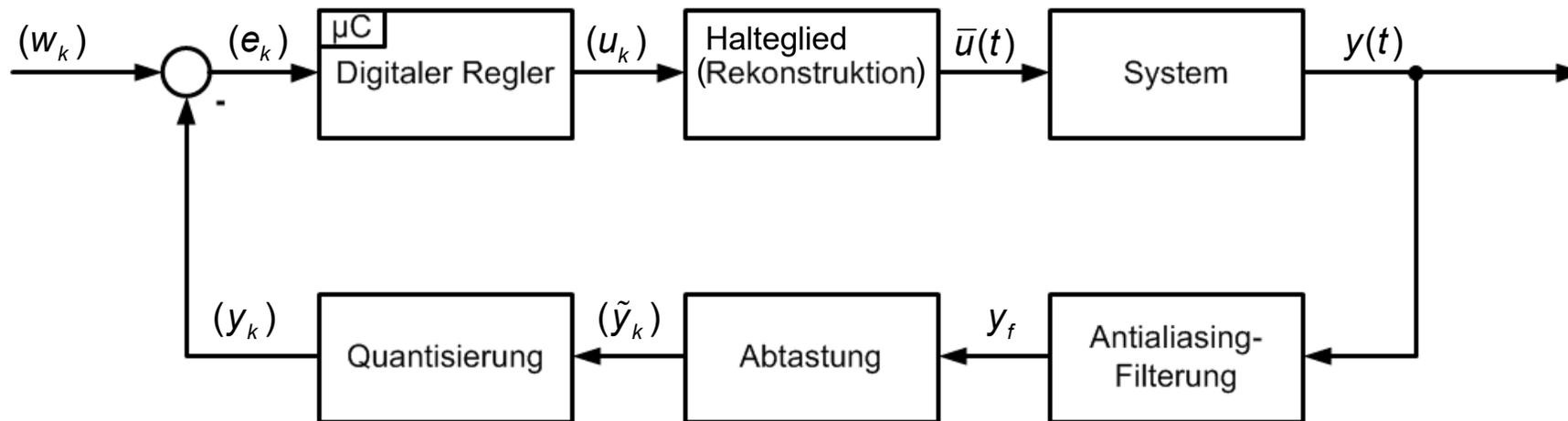
Simulation/Approximation der Sprungantwort von $F_o(s)$ und dessen zeitliche Verschiebung um einen Abtastzeitschritt (siehe Abschnitt 2.5)

$(g_H(kT)) \approx g_{H,k} \Rightarrow$ implizit durch Differenzengleichung gegeben!



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.6 Beschreibung des Regelalgorithmus



■ Abbildungsvorschrift für den Regler:

Ebenfalls als Darstellung einer diskreten Faltung der Regeldifferenzfolge (e_k) mit einer Reglerimpulsantwortfolge (r_k)

$$(u_k) = (e_k) * (r_k)$$

■ Damit ergibt sich die Ausgangsgröße wie folgt

$$(y(kT)) = (u_k) * (g_H(kT)) = (e_k) * (r_k) * (g_H(kT))$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.7 Technische Realisierung des Reglers im Rechner

Reglerimpulsfolge endlich

- ⇒ finite impulse response (fir)
- ⇒ "Programmierung einer Summe"
- ⇒ direkte Abbildung von (e_k) auf (u_k)

$$(u_k) = \left(\sum_{v=0}^{\alpha} e_v r_{k-v} \right)$$

Reglerimpulsfolge unendlich (iir) aber durch eine Rekursionsbeziehung gegeben

- ⇒ "Speicherung von Vorgängerwerten erforderlich"

$$(u_k) = f(u_{k-1}, \dots, u_{k-m}, e_{k-1}, \dots, e_{k-m})$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.8 Z-Transformation

- **Motivation:** Für zeitkontinuierliche Systeme hat sich die Laplace-Transformation bewährt, da sie DGLen auf algebraische Gleichungen abbildet.
Wunsch: Gleiche Situation für Folgen schaffen.

- **Lösung:** Z-Transformation bildet Folgen in den Z-Bereich ab (siehe VL SUS, bitte wiederholen):

- **Zur Erinnerung: Definition Z-Transformation:**

$$Y_Z(z) = \mathfrak{Z}\{y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n}$$

Üblicherweise kausale Systeme betrachtet → **einseitige** Z-Transformation

$$Y_Z(z) = \mathfrak{Z}\{y_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.8 Z-Transformation (2)

Zur Erinnerung: Einige wichtige Rechenregeln:

■ 1. Verschiebungsregel:

• „nach rechts“:

$$\begin{array}{l} f(t - mT) \\ (f(k - m)) \end{array} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} z^{-m} \left[F_Z(z) + \sum_{\nu=1}^m f(-\nu)z^\nu \right], \quad m = 1, 2, \dots$$

• „nach links“:

$$\begin{array}{l} f(t + mT) \\ (f(k + m)) \end{array} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} z^m \left[F_Z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu} \right], \quad m = 1, 2, \dots$$

■ 2. Dämpfungsregel:

$$\begin{array}{l} f(t) \cdot e^{\alpha t} \\ (f(k) \cdot e^{\alpha k T}) \end{array} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} F_Z(e^{-\alpha T} z), \quad \alpha \text{ beliebig komplex}$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.8 Z-Transformation (3)

Zur Erinnerung: Einige wichtige Rechenregeln:

■ 3. Differenzbildungs- / Summationsregel:

$$\bullet \begin{array}{l} f(t) - f(t-T) \\ (f(k)) - (f(k-1)) \end{array} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \frac{z-1}{z} F_z(z) - f(-1)$$

- mit $f(t)$ bzw. $(f(k)) = 0$ für $t < 0$ bzw. $k < 0$:

$$\sum_{v=0}^{\infty} f(t-vT) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \frac{z}{z-1} F_z(z)$$

$$\left(\sum_{v=0}^k f(v) \right)$$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.8 Z-Transformation (4)

Zur Erinnerung: Einige wichtige Rechenregeln:

■ 4. Differentiationsregel für die Bildfunktion:

$$\begin{array}{l} t \cdot f(t) \\ (kT \cdot f(k)) \end{array} \overset{Z}{\longleftrightarrow} -Tz \cdot F_z'(z)$$

■ 5. Grenzwertsätze:

mit $(f(k)) \overset{Z}{\longleftrightarrow} F_z(z)$ gilt:

- Anfangswertsatz: $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_z(z)$

- Endwertsatz: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1) F_z(z)$



2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

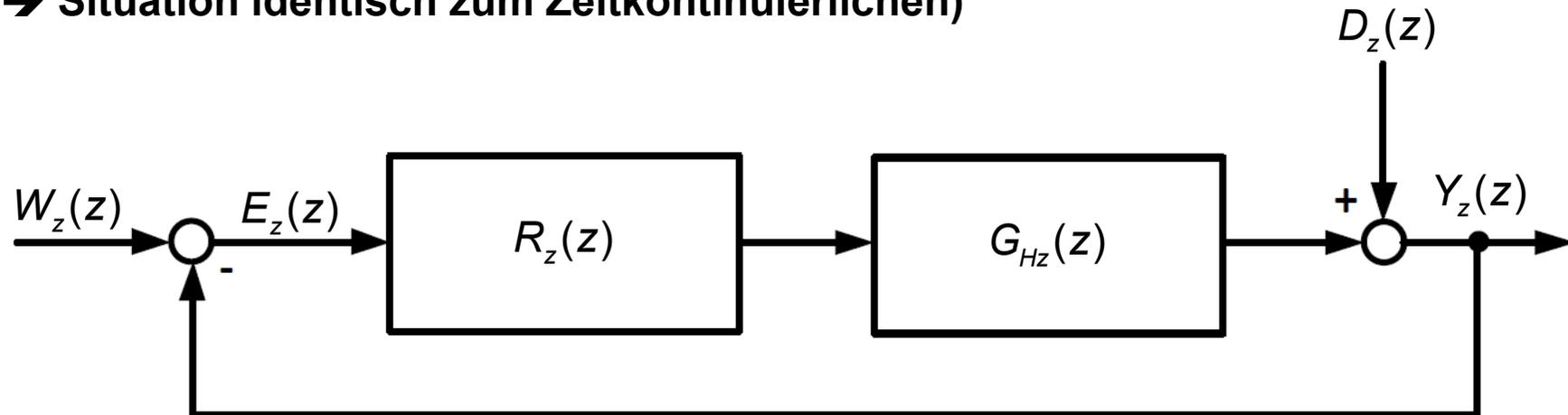
2.6.9 Z-transformierter Regelkreis

- **Bestimmung der Ausgangsfolge:**

$$(y(kT)) = (u_k) * (g_H(kT)) = (e_k) * (r_k) * (g_H(kT))$$

$$Y_z(z) = E_z(z)R_z(z)G_{Hz}(z)$$

- **D.h. aus einer Faltung wird eine Multiplikation**
(→ Situation identisch zum Zeitkontinuierlichen)





2.6 Beschreibung digitaler Regelkreise

2.6.9 Z-transformierter Regelkreis (2)

■ Bestimmung der Ausgangsfolge:

$$(y(kT)) = (u_k) * (g_H(kT)) = (e_k) * (r_k) * (g_H(kT))$$

$$Y_z(z) = E_z(z)R_z(z)G_{Hz}(z)$$

■ Berechnung von $G_{Hz}(z)$:

$$1) g_H(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot F_o(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot F_o(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{1 - e^{-Ts}\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_o(s)}{s}\right\}$$

$$2) \text{ Abtastung: } g_H(kT)$$

$$3) \text{ Z-Trafo: } G_{Hz}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z}\left\{\left\{\frac{F_o(s)}{s}\right\}_{\text{Nach Abtastung}}\right\}$$

Tafelanschrieb 2.6 (1)

Modellierung der Gleichstrommaschine

