

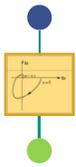
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Vorlesung: Systemdynamik und Regelungstechnik

Kapitel 3

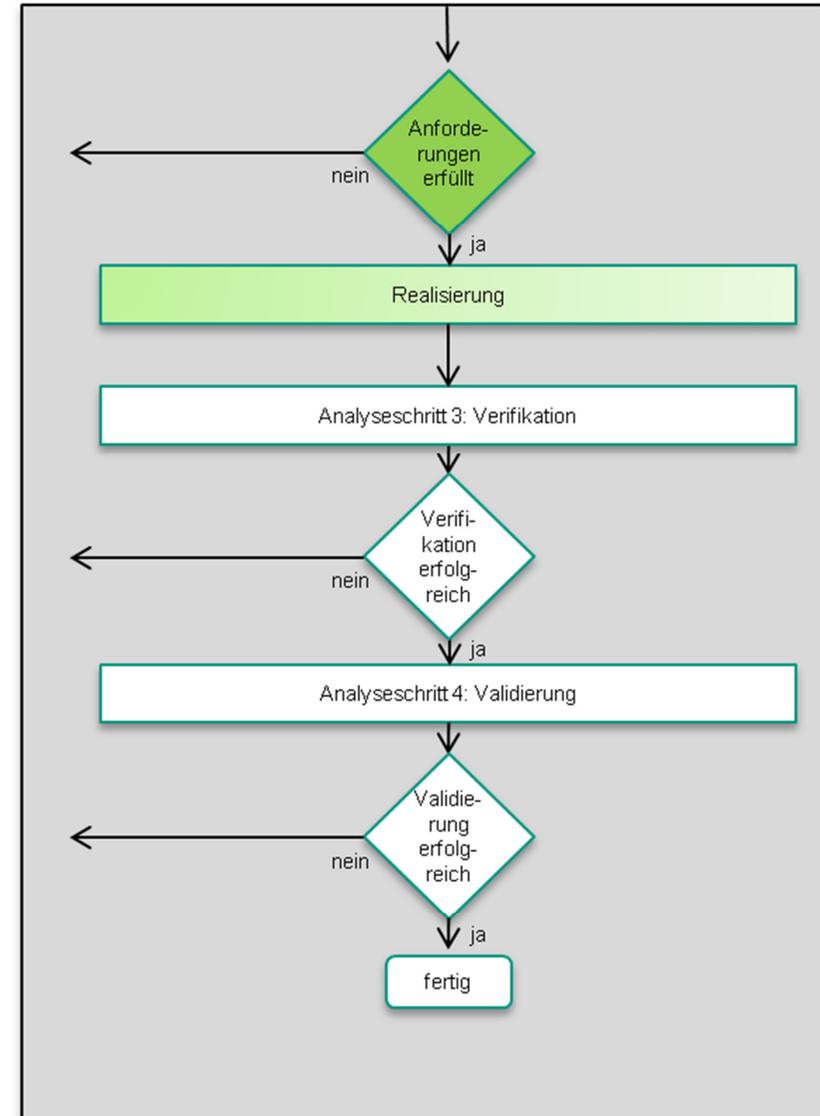
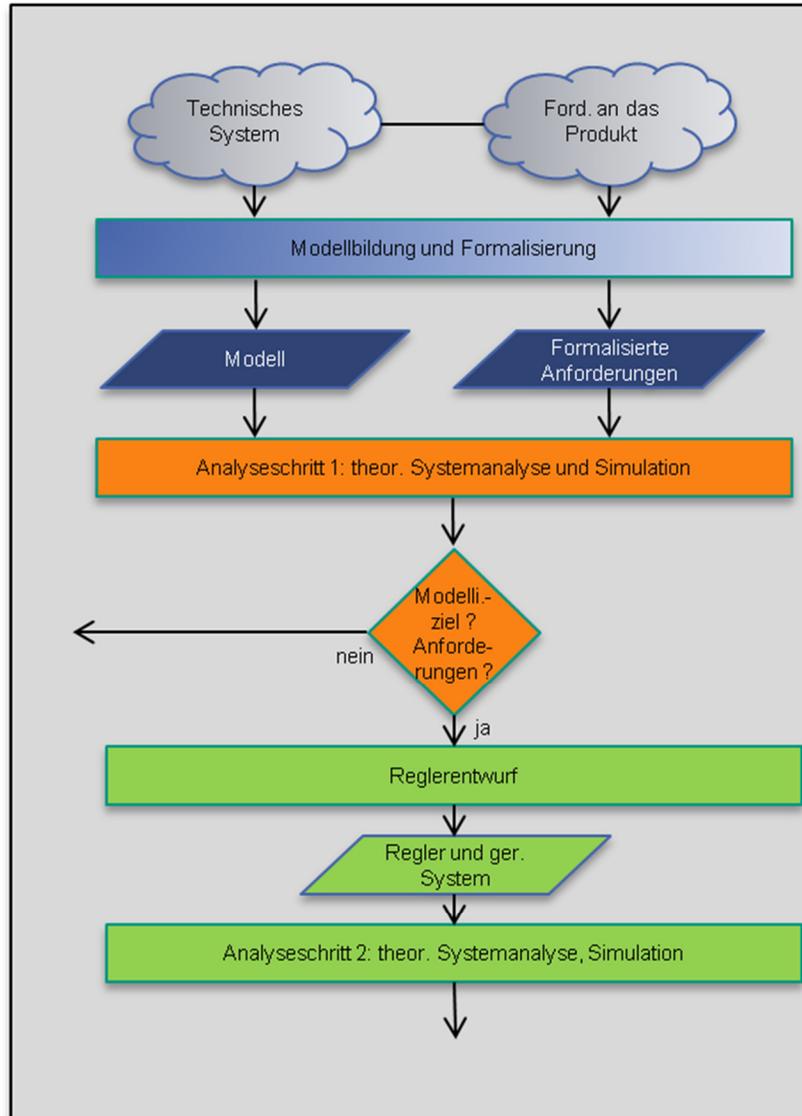
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann

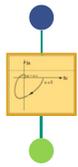




Einordnung in den Gesamtentwurf

Übersicht





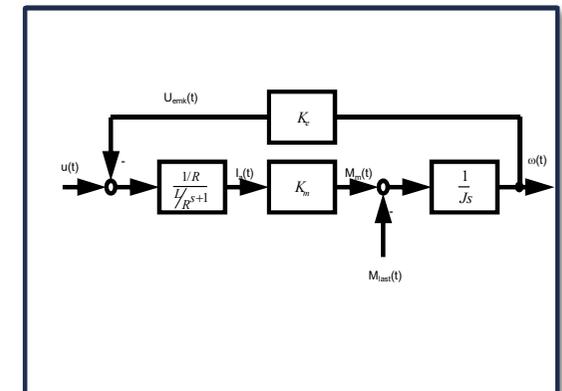
1. Einführung

1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

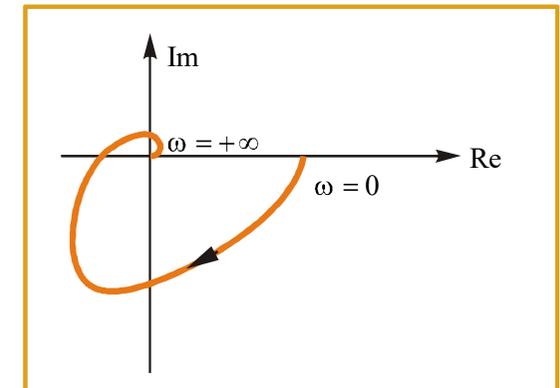
1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Analoge und digitale Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise





3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



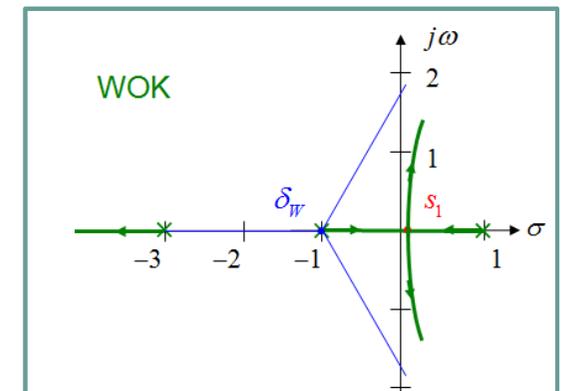
4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



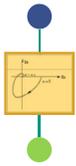
5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Forderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Entwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren
5. Entwurf mit dem Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



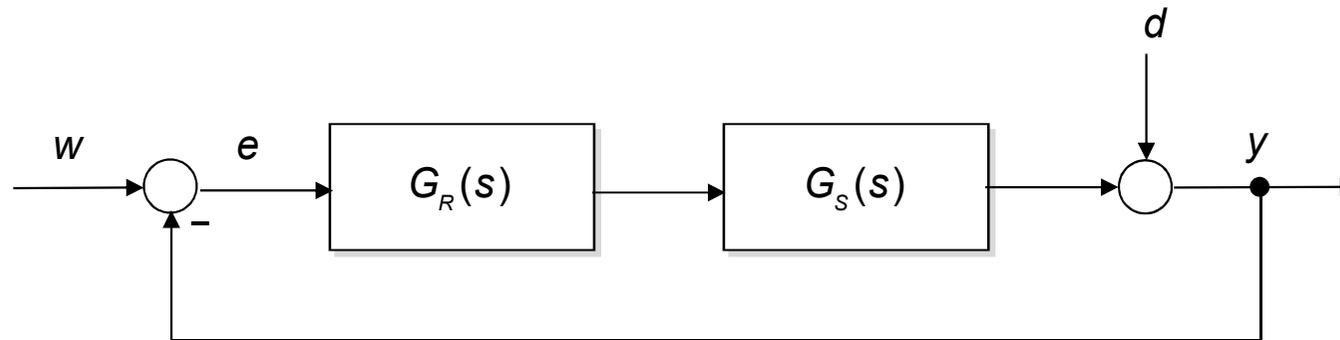
6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



3.1 Stationäres Verhalten

3.1.1 Stationäres Verhalten

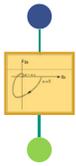


- Hier untersucht:
Stationäres Verhalten der Regelabweichung $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ bei gegebenen Anregungssignalen
- Gegeben:

$$F_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_o}{s^q} \underbrace{\frac{1 + b_1s + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + \dots + a_{n-q}s^{n-q}}}_{\frac{Z(s)}{N(s)}} e^{-T_t s}$$

- Dann gilt:

$$\left. \frac{E(s)}{W(s)} \right|_{D(s)=0} = \frac{1}{1 + F_o(s)} = - \left. \frac{E(s)}{D(s)} \right|_{W(s)=0}$$



3.1 Stationäres Verhalten

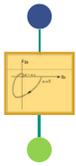
3.1.1 Stationäres Verhalten (2)

- Mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation folgt (falls ein Endwert existiert):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{K_o Z(s)}{s^q N(s)}}_{\rightarrow 1}} \cdot W(s) = \dots = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{q+1}}{s^q + K_o} \cdot W(s)$$

- Für unterschiedliche Anregungen ergeben sich daraus folgende Endwerte $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$:

| Systemtyp $F_o(s)$ | | P | I | I^2 |
|-------------------------|--|-----------|-----------|---------------------|
| | | $(q = 0)$ | $(q = 1)$ | $(q = 2)$ |
| Anregung $w(t)$ | | | | |
| Sprung | $w_0 \sigma(t) \quad \circ \text{---} \circ \quad \frac{W_0}{s}$ | | 0 | 0 |
| Rampe | $w_1 t \sigma(t) \quad \circ \text{---} \circ \quad \frac{W_1}{s^2}$ | ∞ | | 0 |
| Beschleunigungsfunktion | $\frac{1}{2} w_2 t^2 \sigma(t) \quad \circ \text{---} \circ \quad \frac{W_2}{s^3}$ | ∞ | ∞ | $\frac{1}{K_o} w_2$ |

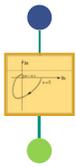


3.1 Stationäres Verhalten

3.1.1 Stationäres Verhalten (3)

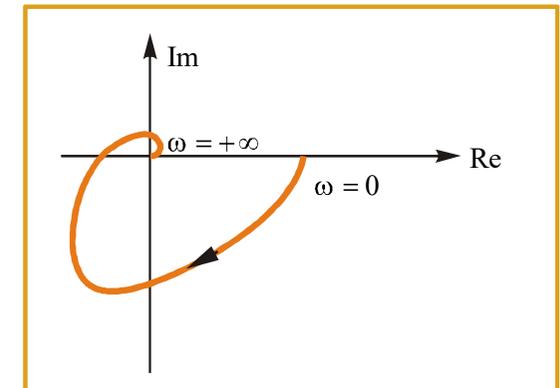
- Aus der Tabelle lassen sich folgende Richtlinien für ein befriedigendes stationäres Verhalten ableiten:
 - damit $e(t \rightarrow \infty) = 0$ bei Sprunganregung (in w oder in d)
 - ⇒ **F_o mit I-Verhalten erforderlich**
 - damit $e(t \rightarrow \infty)$ einen endlichen Wert annimmt
 - ⇒ **K_o so groß wie möglich wählen**
- Aber:
 - mehr als ein Integrator ist aus Stabilitätsgründen nicht sinnvoll
⇒ Abschnitt Stabilität
 - auch K_o darf nicht zu groß werden, um die Stabilität nicht zu gefährden
- Für die Reglerauswahl ergeben sich in Abhängigkeit von der Regelstrecke folgende Reglerstrukturen für befriedigendes stationäres Verhalten:

- **P -Strecken** ⇒ **Regler mit I -Anteil**
- **I -Strecken** ⇒ **Regler ohne I -Anteil**



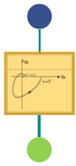
3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
- 2. Frequenzgang und Ortskurve**
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.1 Frequenzgang

- Eine wichtige Sonderstellung nimmt die Anregung des Systems mit Sinus-Signalen bzw. komplexen Signalen $u(t) = u_0 e^{j\omega t}$ ein
- Sinusförmige Anregung eines stabilen linearen Systems:



- Falls das System linear und zeitinvariant ist,

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$$

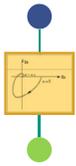
- ergibt sich die allgemeine Lösung (siehe HM III):

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t)$$

- Speziell im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$y(t) = y_{\text{part}}(t) = A \sin[\omega t + \varphi] \quad (*) \quad A: \text{Amplitude} ; \varphi: \text{Phasenverschiebung}$$

- Das heißt, das System lässt sich durch die Amplitude und Phase für jede Frequenz ω charakterisieren



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.1 Frequenzgang (2)

- Im Bildbereich ist das lineare, zeitinvariante System durch $G(s)$ charakterisiert.

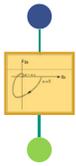
- Folglich gilt: $u(t) = u_0 \sin(\omega t) = \frac{u_0}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ (*)

- Betrachtet man zunächst nur die Aufschaltung von $u_1(t) = e^{j\omega t}$, $\omega > 0$, gilt für die zugehörige Ausgangsgröße

$$Y_1(s) = G(s) \cdot U_1(s) = G(s) \frac{1}{s - j\omega}$$

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehme man nun einfache Pole a_v von $G(s)$ an:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \left[\sum_{v=1}^n \frac{r_v}{s - a_v} + r_0 \right] \frac{1}{s - j\omega} = \sum_{v=1}^n r_v \frac{1}{(s - a_v)(s - j\omega)} + r_0 \frac{1}{s - j\omega} \\ &= \sum_{v=1}^n r_v \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s - a_v} \right] \frac{1}{j\omega - a_v} + r_0 \frac{1}{s - j\omega} \end{aligned}$$

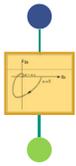


3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.1 Frequenzgang (3)

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehme man nun einfache Pole a_v von $G(s)$ an:

$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= \left[\sum_{v=1}^n \frac{r_v}{s - a_v} + r_0 \right] \frac{1}{s - j\omega} = \sum_{v=1}^n r_v \frac{1}{(s - a_v)(s - j\omega)} + r_0 \frac{1}{s - j\omega} \\
 &= \sum_{v=1}^n r_v \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s - a_v} \right] \frac{1}{j\omega - a_v} + r_0 \frac{1}{s - j\omega} \\
 &= \frac{1}{s - j\omega} \left[\sum_{v=1}^n \frac{r_v}{j\omega - a_v} + r_0 \right] + \sum_{v=1}^n \frac{r_v}{a_v - j\omega} \cdot \frac{1}{s - a_v} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= G(j\omega)} \\
 y_1(t) &= e^{j\omega t} \cdot G(j\omega) + \underbrace{\sum_{v=1}^n \frac{r_v}{a_v - j\omega} \cdot e^{a_v t}}_{= c(t)}
 \end{aligned}$$



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.1 Frequenzgang (4)

- Ausgangsgröße im Zeitbereich:

$$y_1(t) = e^{j\omega t} \cdot G(j\omega) + \sum_{v=1}^n \frac{r_v}{a_v - j\omega} \cdot e^{a_v t}$$

- Falls nun die a_v negativ reell sind, gilt für $t \rightarrow \infty$:

$$y_1(t) = e^{j\omega t} \cdot G(j\omega) = e^{j\omega t} \cdot |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

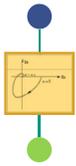
mit $\angle G(j\omega)$: Phase/Argument von $G(j\omega)$

- In gleicher Weise erhält man für den zweiten Summanden von (*) für $t \rightarrow \infty$:

$$y_2(t) = e^{-j\omega t} \cdot G(-j\omega) = e^{-j\omega t} \cdot G(\overline{j\omega}) = e^{-j\omega t} \cdot \overline{G(j\omega)} = e^{-j\omega t} \cdot |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}$$

- und somit:

$$y(t) = \frac{u_0}{2j} [y_1(t) - y_2(t)] = \frac{u_0}{2j} [|G(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - |G(j\omega)| e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}]$$



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.1 Frequenzgang (5)

- und somit:

$$y(t) = \frac{u_0}{2j} [y_1(t) - y_2(t)] = \frac{u_0}{2j} [|G(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - |G(j\omega)| e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}]$$

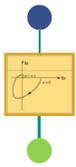
$$y(t) = |G(j\omega)| u_0 \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

- Somit sind A und φ wie folgt definiert:

Bei einer Anregung $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich die Systemantwort als Schwingung mit gleicher Frequenz ω , jedoch mit der Amplitude $A = u_0 |G(j\omega)|$ und phasenverschoben mit der Phase $\varphi = \angle G(j\omega)$ sowie einer zusätzlichen Zeitfunktion, die mit wachsendem t gegen Null strebt, falls die Polstellen einen negativen Realteil aufweisen.

- **Anmerkung:**

Diese Aussage kann verallgemeinert werden auf allgemeine LTI-Glieder unter der Voraussetzung, dass $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$.



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (2)

Def.: **Frequenzgangsortskurve**

Die Frequenzgangsortskurve (Ortskurve) ist die Kurve in der komplexen $G(j\omega)$ -Ebene, die durch Verbindung aller Pfeilspitzen $G(j\omega)$ für $0 \leq \omega < \infty$ entsteht.

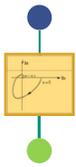
■ Beispiele:

1. PT_1 -Glied:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} \quad \Rightarrow \quad \text{Frequenzgang: } G(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\omega} = \frac{Y}{U} = \frac{K(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2}$$

$$\text{wegen } \operatorname{Re}\{G\} = \frac{K}{1+(\omega T)^2} \text{ und } \operatorname{Im}\{G\} = -\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2} = -\operatorname{Re}\{G\} \cdot \omega T \text{ gilt:}$$

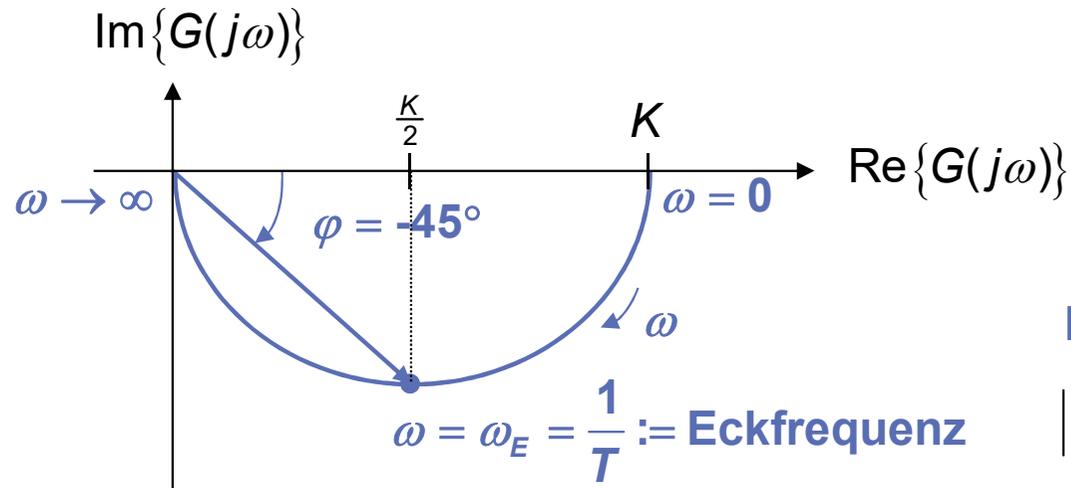
$$\underbrace{\left[\operatorname{Re}\{G\} - \frac{K}{2} \right]^2 + \left[\operatorname{Im}\{G\} \right]^2}_{\text{Kreis bzw. Halbkreis für } \omega \geq 0} = \left(\frac{K}{2} \right)^2$$



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (3)

1. PT_1 -Glieder (2):



Eckfrequenz, gegeben durch:

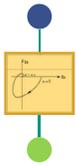
$$|\operatorname{Re}\{G(j\omega_E)\}| = |\operatorname{Im}\{G(j\omega_E)\}|$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega_E) = -\arctan 1 = -45^\circ$$

$$\Rightarrow |G(j\omega_E)| = A(\omega_E) = \frac{K}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot K$$

■ Schlussfolgerungen:

- φ wächst mit ω von $0^\circ \dots 90^\circ$ \Rightarrow **Verzögerungsverhalten**
- A nimmt für $\omega > \omega_E = \frac{1}{T}$ stark ab \Rightarrow **Tiefpassverhalten**



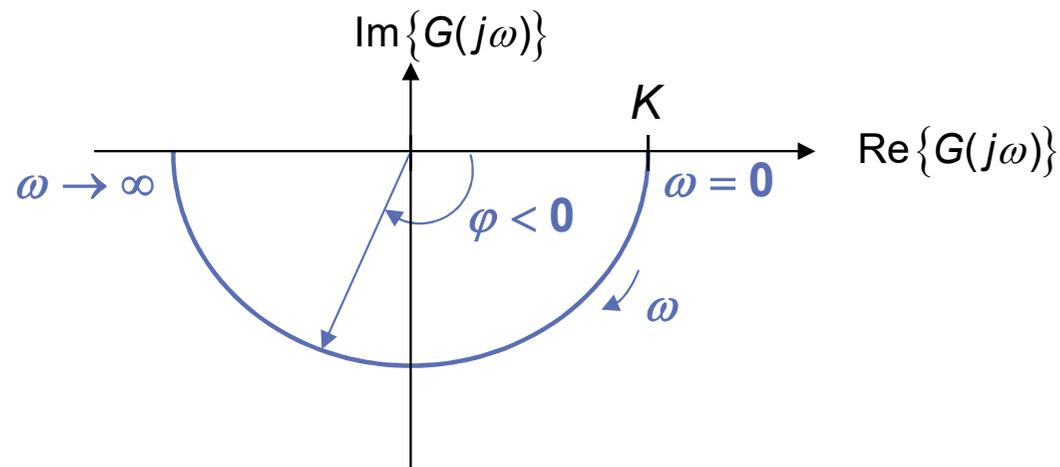
3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (4)

2. Übertragungsfunktion mit spiegelsymmetrischer Nullstelle (Allpass 1. Ordnung):

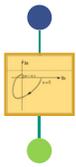
$$G(s) = \frac{K(1-Ts)}{1+Ts} \Rightarrow \text{Frequenzgang: } G(j\omega) = K \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$$

es gilt: $|G(j\omega)| = K$, $\varphi(\omega) = -2\arctan(\omega T)$



■ Schlussfolgerung:

- $|G(j\omega)| = A(\omega) = \text{const}$



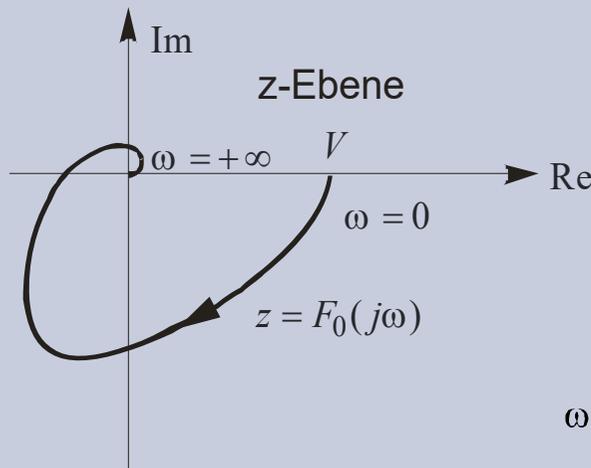
3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (5)

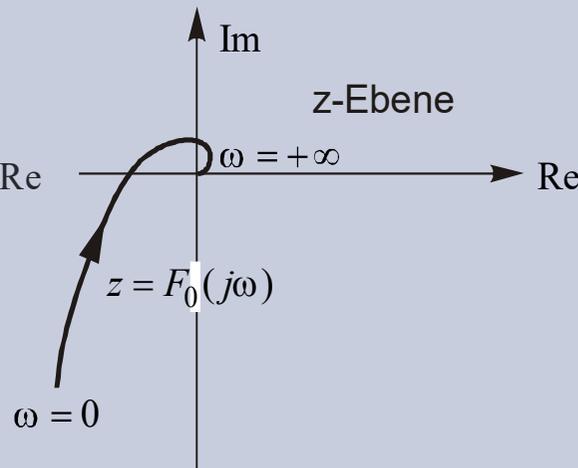
3. Verzögerungssystem 4. Ordnung

$$G(j\omega) = \frac{V}{(j\omega)^q} \cdot \frac{1}{1 + a_1(j\omega) + \dots + a_4(j\omega)^{4-q}}$$

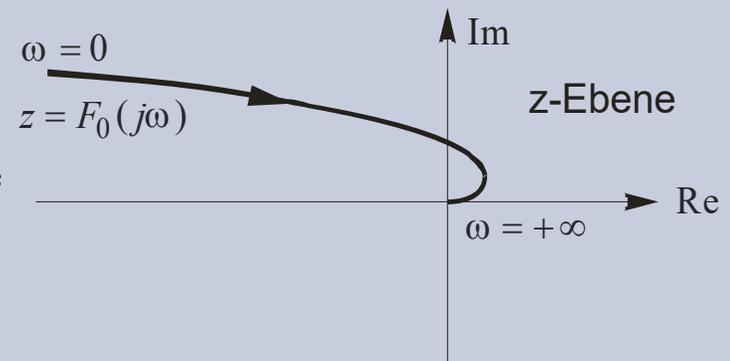
$q = 0$ (P -Verhalten):

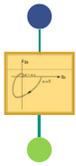


$q = 1$ (I -Verhalten):



$q = 2$ (Doppel- I -Verhalten):

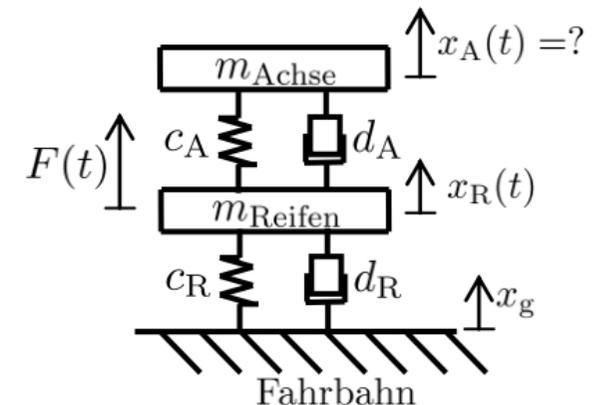




3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (6)

- **Beispiel:** Frequenzgangsortskurve eines Feder-Dämpfer-Systems im Fahrzeug.
- Modell: *Viertelfahrzeug* (System, bei dem alles auf ein Rad bezogen ist)
- Eingangsgröße $F(t)$, Ausgangsgröße $x_A(t)$



- Übertragungsfunktion (Herleitung in Übungsaufgabe 14e):

$$G(s) = \frac{X_A(s)}{F(s)} = \frac{c_A + d_A s}{(c_R + d_R s + m_R s^2)(c_A + d_A s + m_A s^2) + (c_A + d_A s)m_A s^2}$$



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

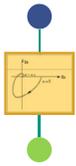
3.2.2 Frequenzgangsortskurve (7)

- **Beispiel:** Frequenzgangsortskurve eines Feder-Dämpfer-Systems im Fahrzeug.

$$G(s) = \frac{X_A(s)}{F(s)} = \frac{c_A + d_A s}{(c_R + d_R s + m_R s^2)(c_A + d_A s + m_A s^2) + (c_A + d_A s)m_A s^2}$$

- Typische Massen und Feder-Dämpfer-Kennwerte (alle Werte auf Radlast bezogen):

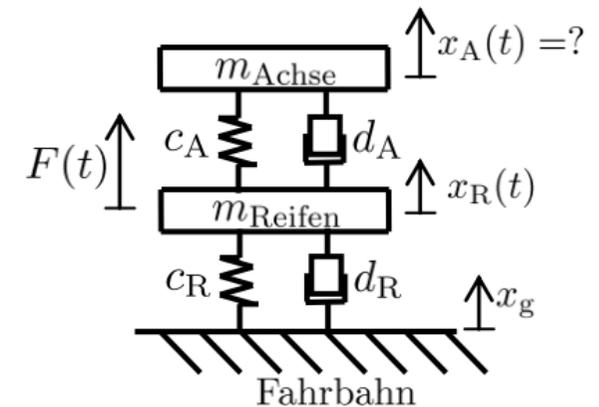
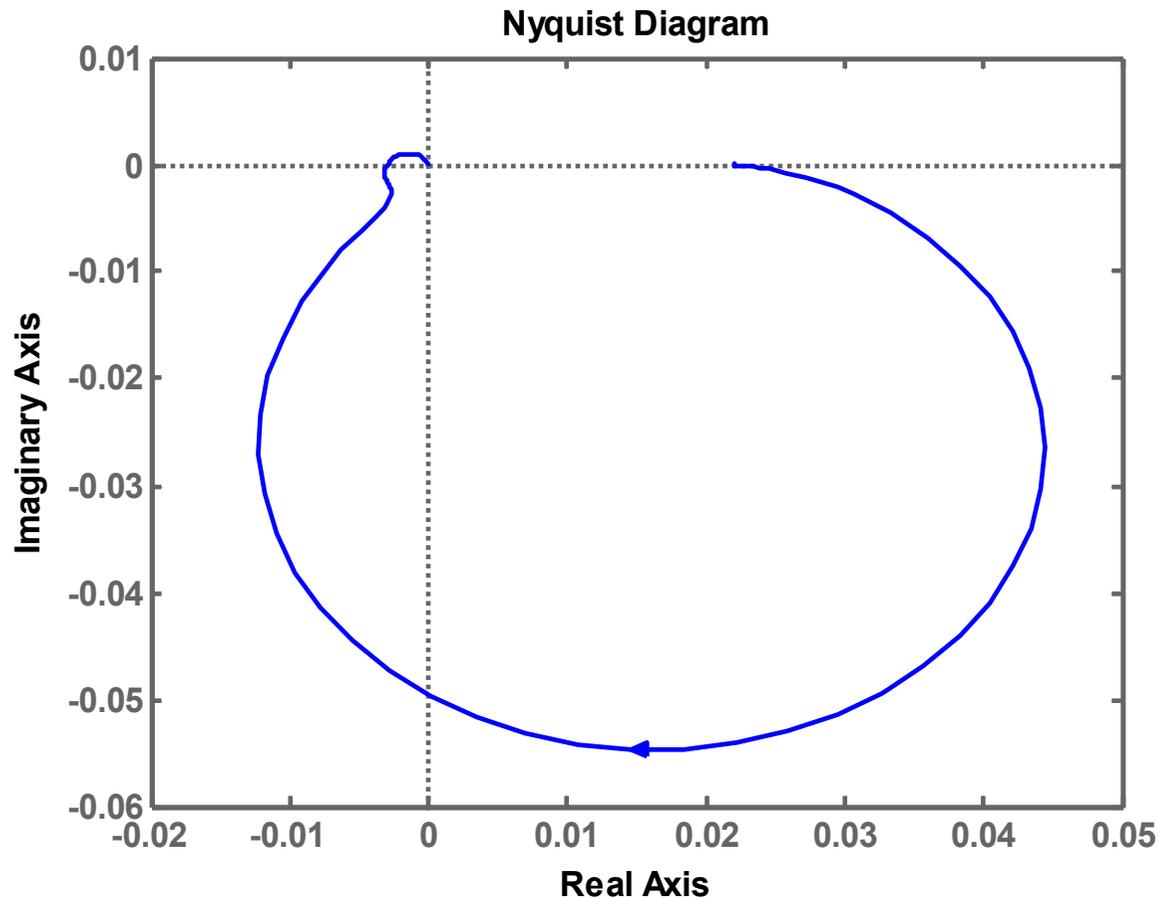
| F_{zstat} | m_{Reifen} | m_{Achse} | c_R | c_A | d_R | d_A |
|-------------|--------------|-------------|-------|-------|-------------|-------|
| kN | kg | kg | kN/m | kN/m | kNs/m | kNs/m |
| 2,82 | 31 | 229 | 128 | 20,2 | ≈ 0 | 1,14 |



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (8)

- **Beispiel:** Frequenzgangsortskurve eines Feder-Dämpfer-Systems im Fahrzeug.





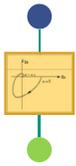
3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangs Ortskurve (9)

- **Beispiel:** Frequenzgangs Ortskurve einer Batterie



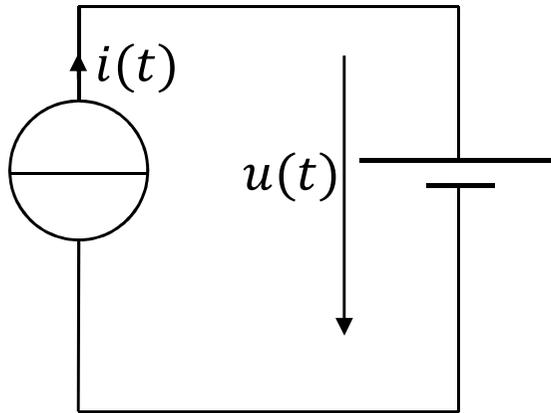
IRS-Batteriemessstand



3.2 Frequenzgang und Ortskurve

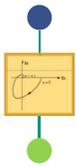
3.2.2 Frequenzgangsortskurve (10)

4. Impedanz einer Batterie bezogen auf eine Normfläche



- Sei nun $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ als Eingangsgröße durch eine regelbare Stromquelle fest vorgegeben.
- Betrachtet man dann die Spannung $u(t)$ als Systemantwort $y(t)$, ergibt sich:

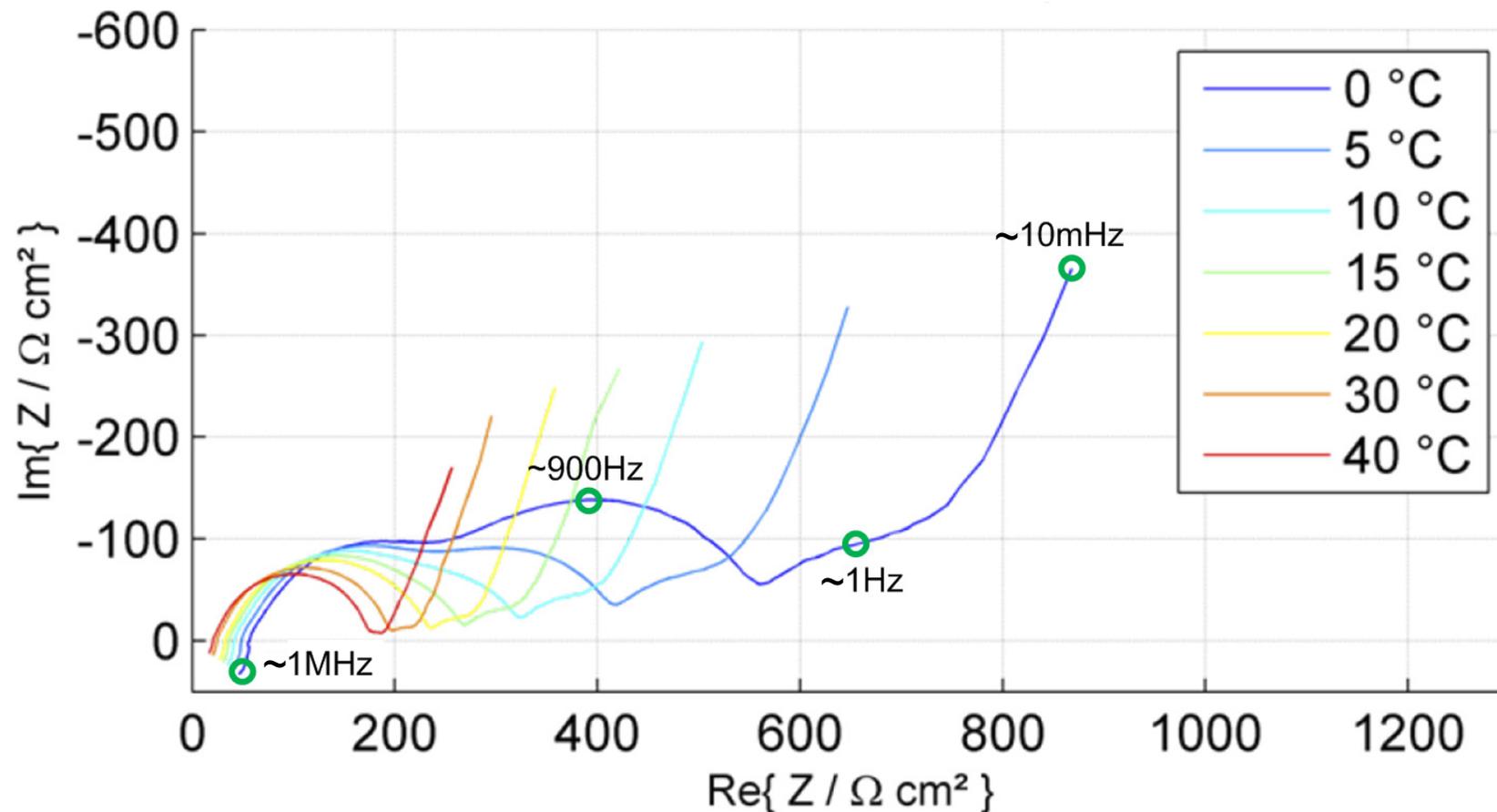
$$G(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} \triangleq \text{Impedanz der Batterie}$$



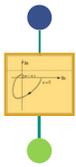
3.2 Frequenzgang und Ortskurve

3.2.2 Frequenzgangsortskurve (11)

4. Impedanz einer Batterie bezogen auf eine Normfläche

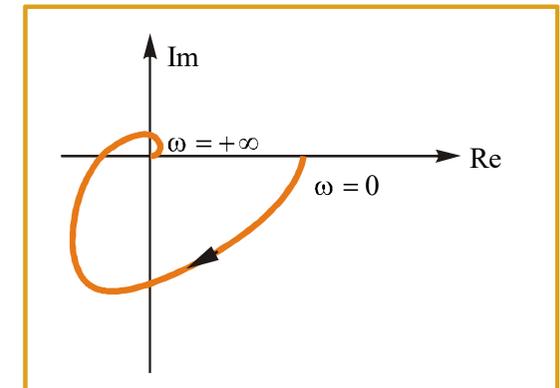


Quelle: IWE



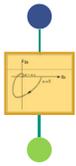
3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang und Ortskurve
- 3. Frequenzkennlinie**
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

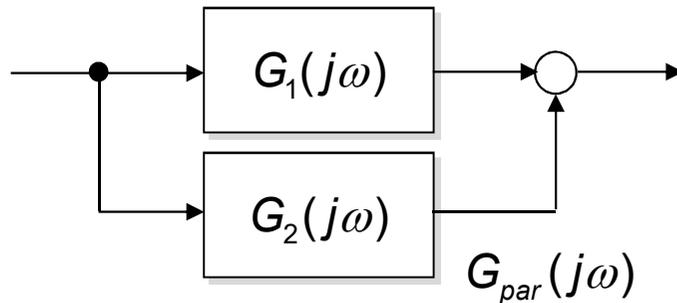
1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



3.3 Frequenzkennlinie

■ Aufbau der Frequenzgangsortskurven komplexerer Übertragungsglieder:

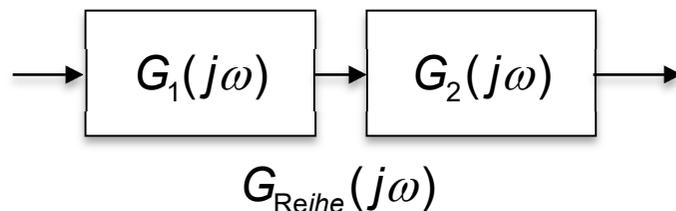
- Parallelschaltung einzelner Glieder:



$$G_{par}(j\omega) = G_1(j\omega) + G_2(j\omega)$$

⇒ vektorielle Addition der einzelnen Zeiger (einfach)

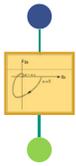
- Reihenschaltung einzelner Glieder:



$$G_{Reihe}(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

⇒ Multiplikation der Beträge, Addition der Phasenwinkel (umständlich)

■ Zweckmäßig: Verwendung logarithmischer Frequenzkennlinien (Bode-Diagramm)



3.3 Frequenzkennlinie

Def.: **Frequenzkennlinien (Bode-Diagramm)**

Die Frequenzkennlinien eines Systems bestehen aus zwei getrennten Diagrammen für den Betrag und die Phase von $G(j\omega)$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω .

$$G(j\omega) \begin{cases} \rightarrow |G(j\omega)| = A(\omega) & \text{Betrag} \\ \rightarrow \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) & \text{Phase} \end{cases}$$

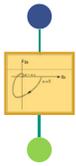
Dabei gilt:

- Auftragen von $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ über der logarithmisch geteilten ω -Achse
- Auftragen von $A(\omega)$ im logarithmischen Maßstab
- Auftragen von $\varphi(\omega)$ im linearen Maßstab

Alternative für die Betragskennlinie: **Dezibel-Maß** $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$

Vorteil: $|G(j\omega)|_{dB}$ kann linear aufgetragen werden:

| | | | | | | | | |
|---------------------|------|-----|---|------|------|----|-----|------|
| $G(j\omega)$ | 0.01 | 0.1 | 1 | 2 | 3.16 | 10 | 100 | 1000 |
| $ G(j\omega) _{dB}$ | -40 | -20 | 0 | 6.02 | 10 | 20 | 40 | 60 |



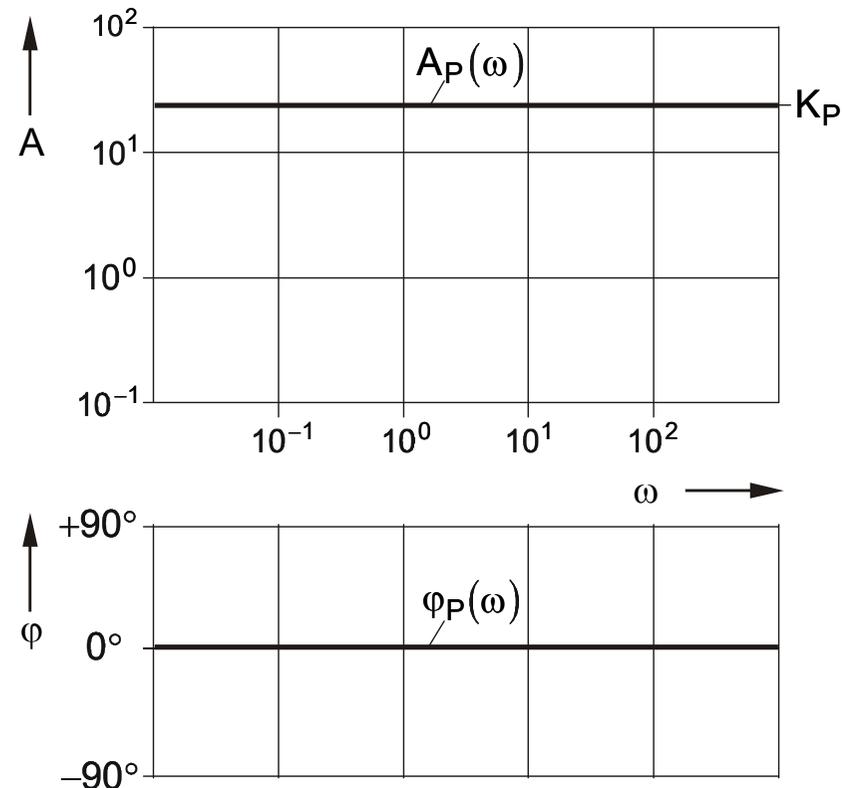
3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder

1. Beispiel: *P*-Glied:

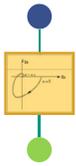
$$G(j\omega) = K_P \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = A_P(\omega) = K_P, \quad \angle G(j\omega) = \varphi_P(\omega) = 0$$

■ Betrags- und Phasenverlauf:



Tafelanschrieb 3.3 (1)

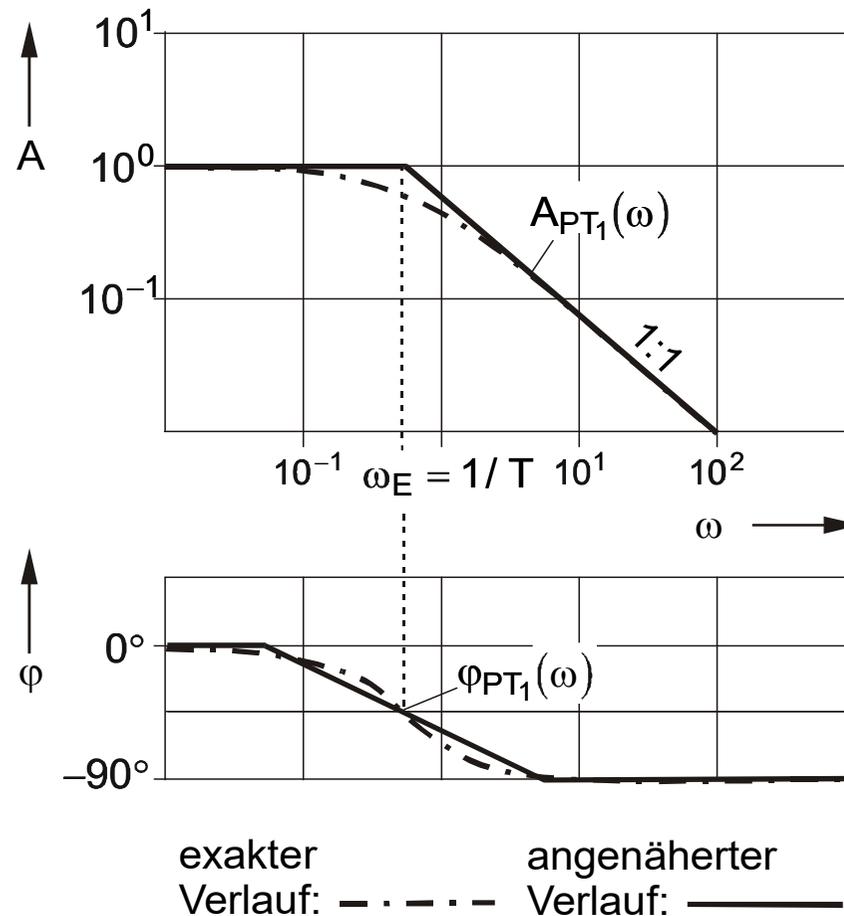
Frequenzkennlinie PT_1 -Glied

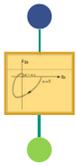


3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (2)

2. Beispiel: PT_1 -Glied:





3.3 Frequenzkennlinie

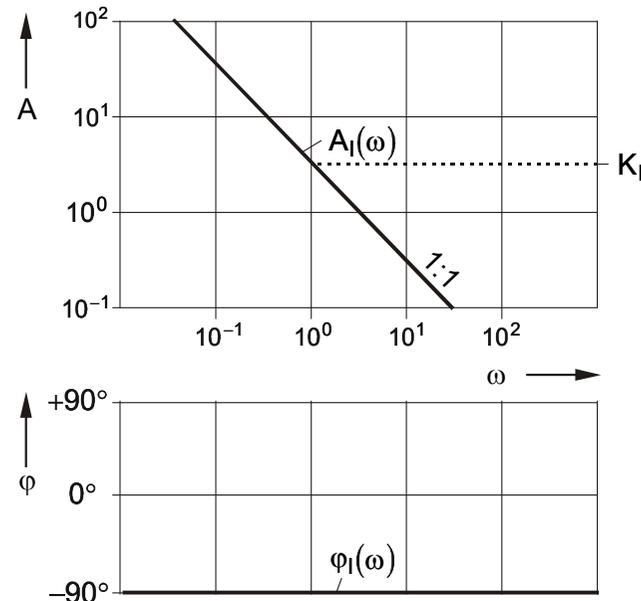
3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (3)

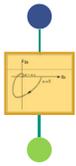
3. Beispiel: I-Glied:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} = -j \frac{K_I}{\omega} \quad \Rightarrow \quad A_I(\omega) = \frac{K_I}{\omega}, \quad \log A_I = \log K_I - \log \omega$$

$$\varphi_I(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(\dots)}{\text{Re}(\dots)} \right\} = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

■ Betrags- und Phasenverlauf:





3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (4)

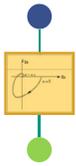
4. Beispiel: PT_2 -Glied ($K = 1$) (1):

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2dTj\omega + T^2(j\omega)^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2d\omega_0(j\omega) + (j\omega)^2} \quad \omega_0 := \frac{1}{T} : \text{Eigenfrequenz des ungedämpften Systems}$$

$$A_{PT_2} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2}} ; \quad \varphi_{PT_2}(\omega) = -\arctan \frac{2d\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Es gelten speziell folgende Asymptotennäherungen:

$$\begin{array}{ll} \omega \ll \omega_0 : & A_{PT_2}(\omega) \approx 1 \quad \varphi_{PT_2}(\omega) \approx 0 \\ \omega = \omega_0 : & A_{PT_2}(\omega_0) = \frac{1}{2d} \quad \varphi_{PT_2}(\omega_0) = -90^\circ \\ \omega \gg \omega_0 : & A_{PT_2}(\omega) \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \varphi_{PT_2}(\omega) \approx -180^\circ \end{array}$$

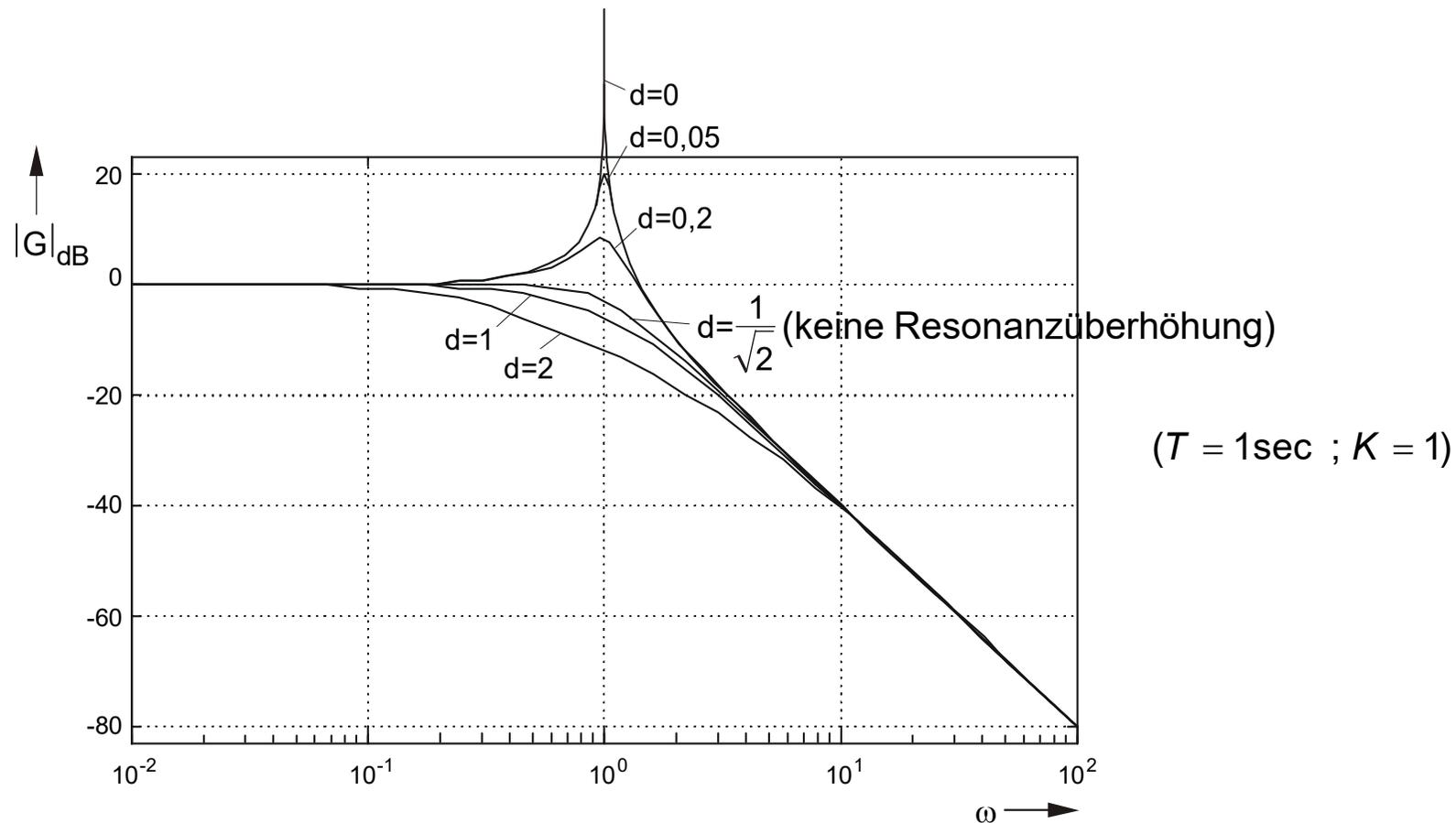


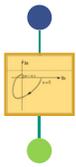
3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (5)

4. Beispiel: PT_2 -Glieder ($K = 1$) (2):

- Betragsverlauf:



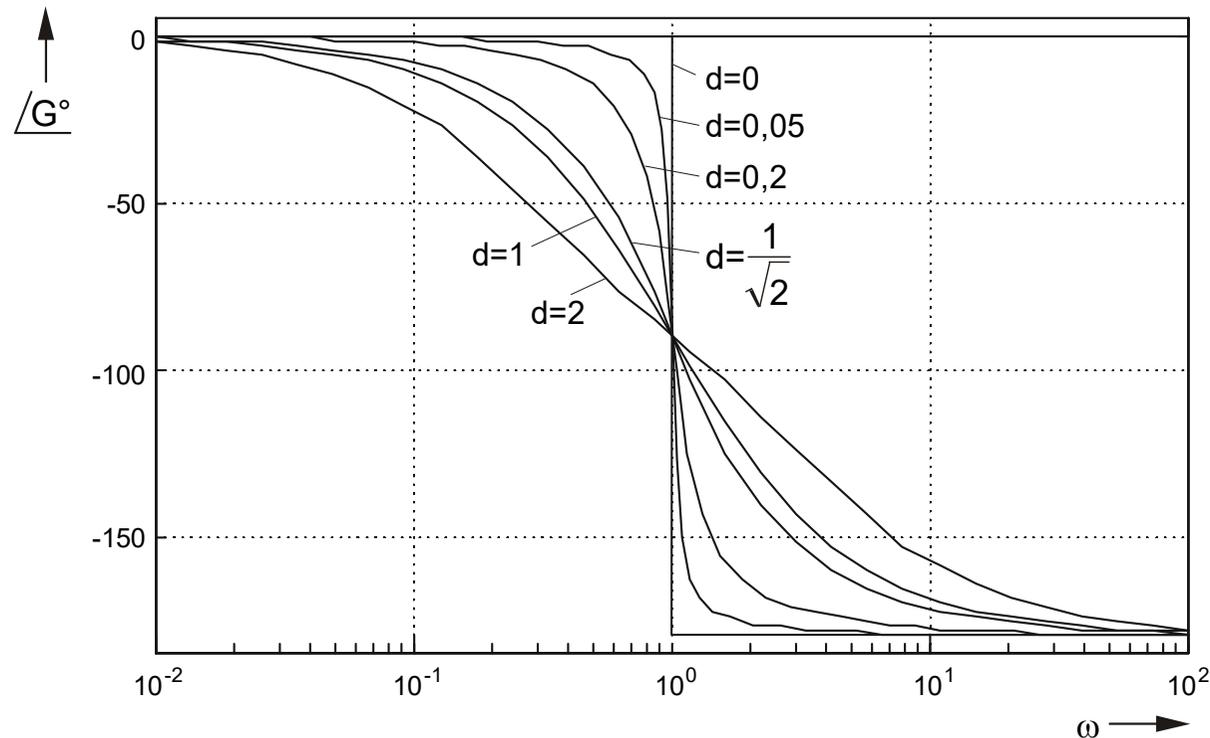


3.3 Frequenzkennlinie

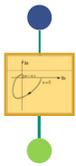
3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (6)

4. Beispiel: PT_2 -Glied ($K = 1$) (3):

■ Phasenverlauf:



($T = 1$ sec ; $K = 1$)



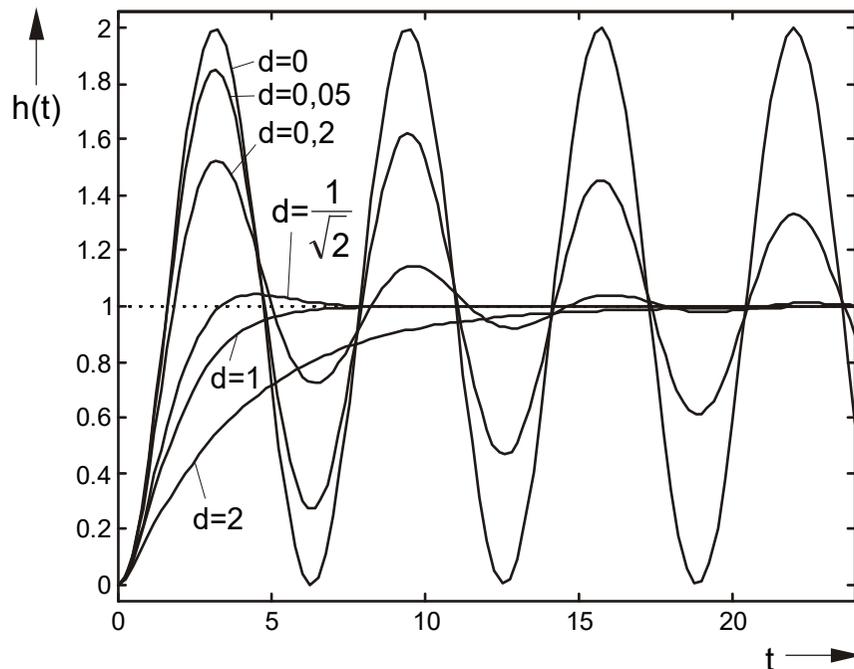
3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (7)

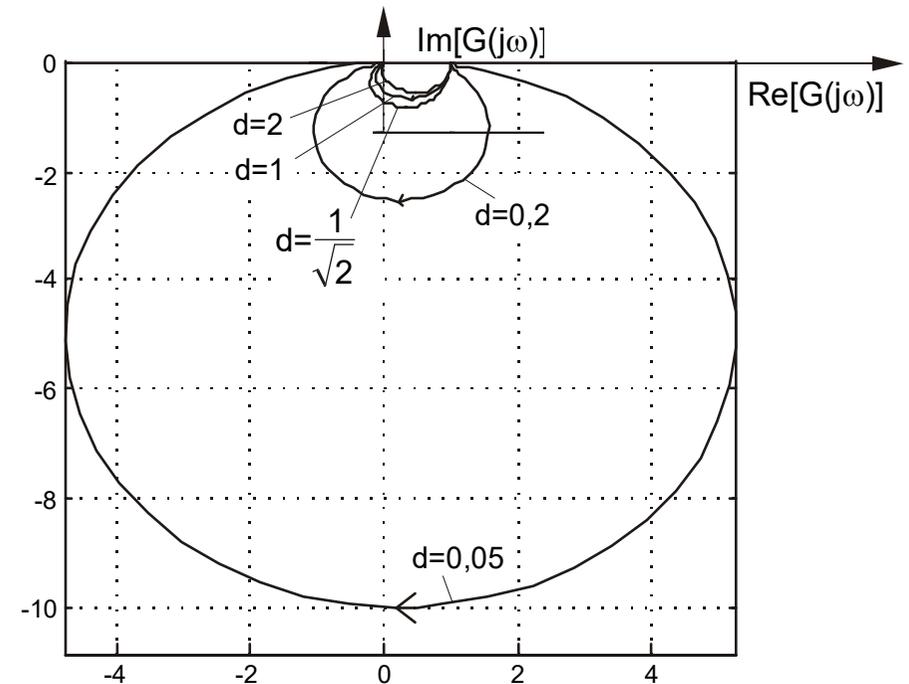
4. Beispiel: PT_2 -Glieder ($K = 1$) (4):

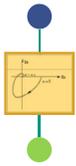
- zum Vergleich: weitere Charakteristika von PT_2 -Gliedern: $G(s) = \frac{1}{1 + 2dT s + T^2 s^2}$

(a) Sprungantwort ($T = 1\text{sec} ; K = 1$)



(b) Ortskurve ($T = 1\text{sec} ; K = 1$)



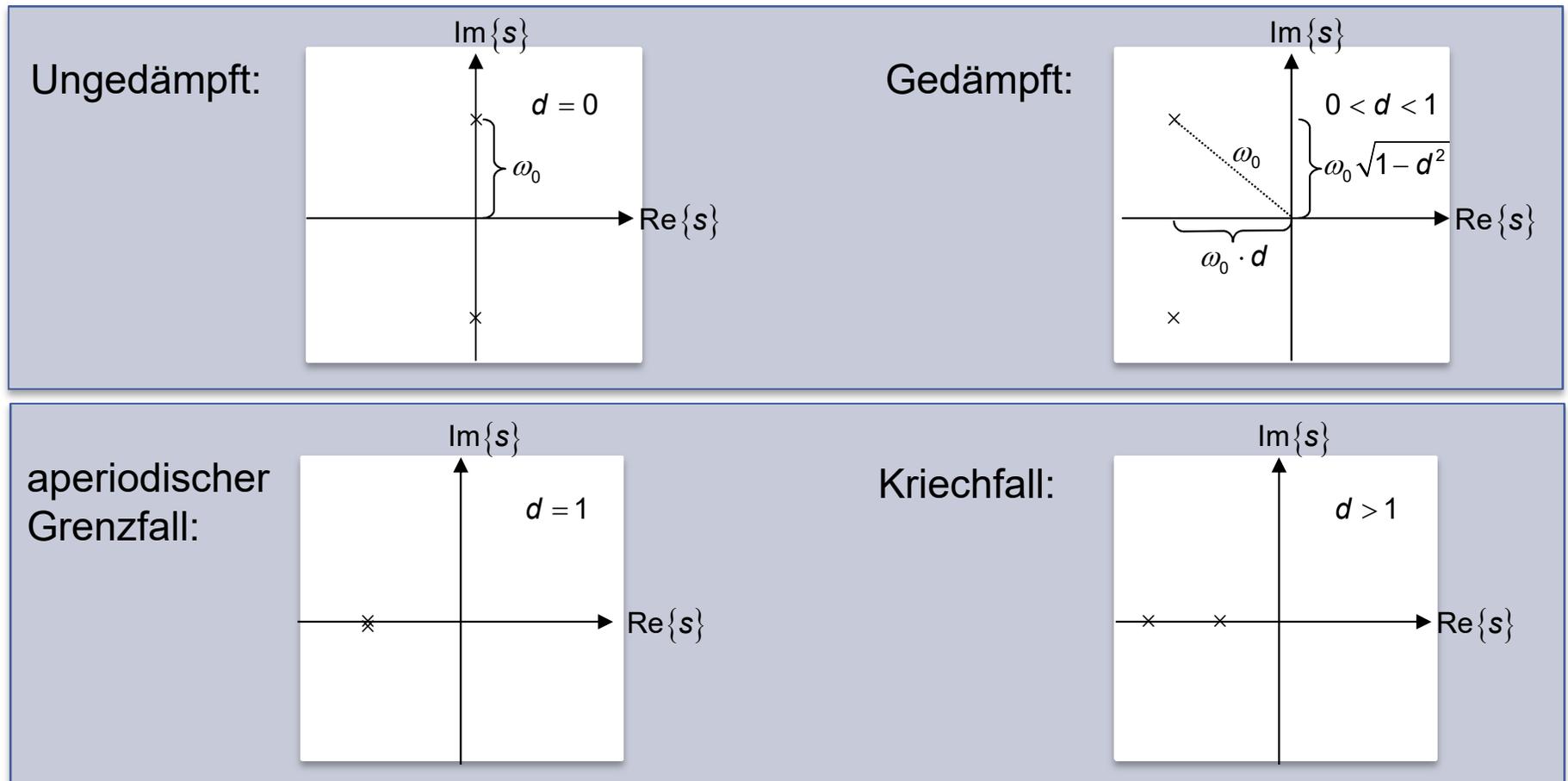


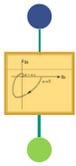
3.3 Frequenzkennlinie

3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (8)

4. Beispiel: PT_2 -Glied ($K = 1$) (5):

(c) Pollen für verschiedenen Dämpfungen d





3.3 Frequenzkennlinie

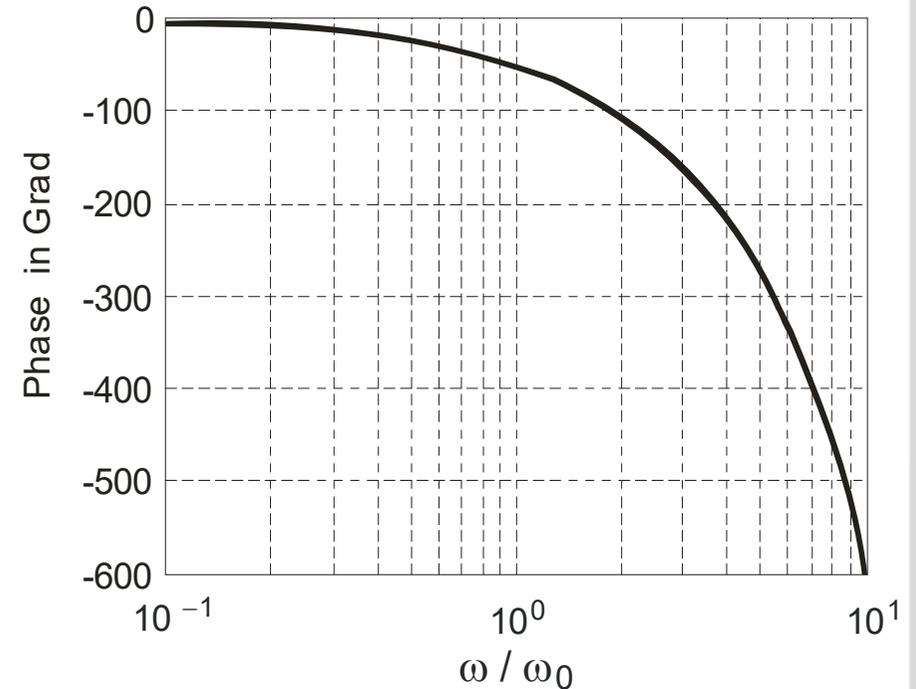
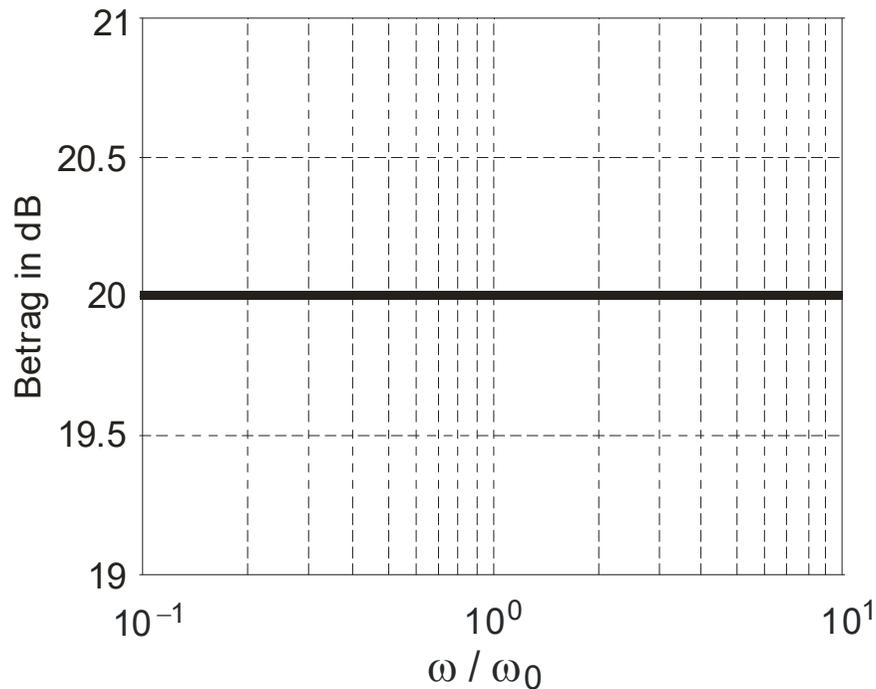
3.3.1 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsglieder (9)

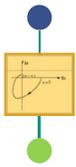
5. Beispiel: Totzeit-Glied:

$$G(j\omega) = K \cdot e^{-T_t j\omega} \quad (K > 0 ; T_t > 0) \quad \Rightarrow \quad A_T(\omega) = K$$

$$\varphi_T(\omega) = -\omega T_t = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

■ Betrags- und Phasenverlauf ($K = 10 ; \omega_0 = 1$):





3.3 Frequenzkennlinie

3.3.2 Frequenzkennlinien inverser Übertragungsglieder

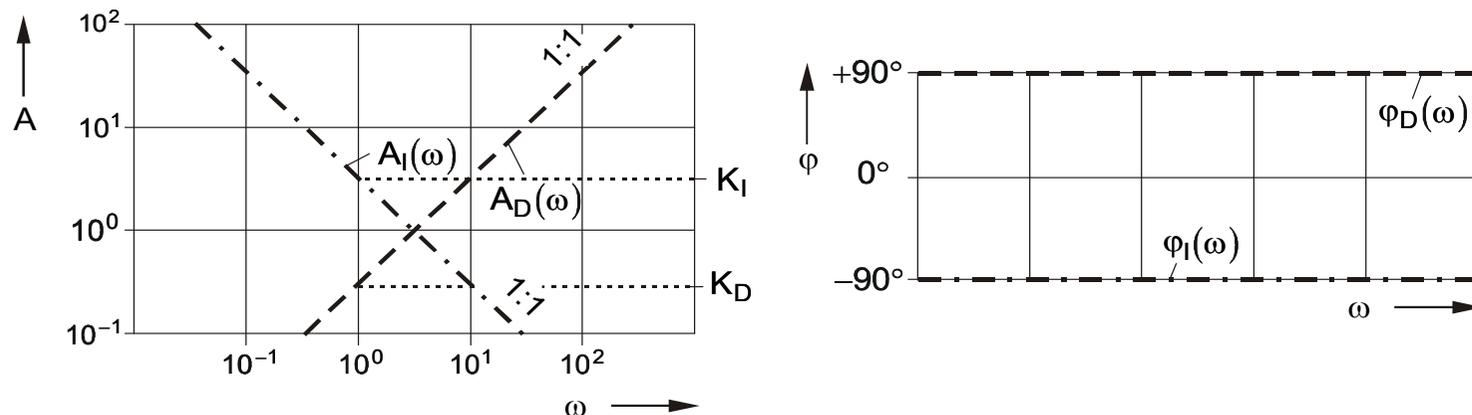
- Die Frequenzkennlinien der inversen Glieder erhält man wie folgt:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \Rightarrow G^{-1}(j\omega) = \frac{1}{|G(j\omega)|} \cdot e^{-j\varphi(\omega)}$$

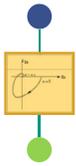
$$|G(j\omega)^{-1}|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{|G(j\omega)|} \right| = -20 \log |G(j\omega)| = -|G(j\omega)|_{dB}$$

- Betragskennlinie: Spiegelung an der 0 dB-Linie
- Phasenkennlinie: Spiegelung an der 0-Grad-Linie

- Beispiel: **D-Glied** aus **I-Glied**:



- Damit z.B. auch verfügbar: **PD-Glied** aus **PT₁-Glied**, Nullstellenpaar aus **PT₂-Glied**



3.3 Frequenzkennlinie

3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder

- Reihenschaltung elementarer Übertragungsglieder:

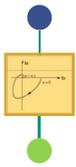
$$\begin{aligned}G_{\text{Reihe}}(j\omega) &= G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \\ &= |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot |G_3(j\omega)| \cdot e^{j(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \log A_{\text{Reihe}}(\omega) &= \log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + \log |G_3(j\omega)| \\ \varphi_{\text{Reihe}}(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)\end{aligned}$$

- Also:

Die Frequenzkennlinien der Reihenschaltung von Übertragungsgliedern erhält man wie folgt:

- Betragskennlinie: Summation der Teilamplitudengänge in *dB*
- Phasenkennlinie: Summation der Teilphasengänge



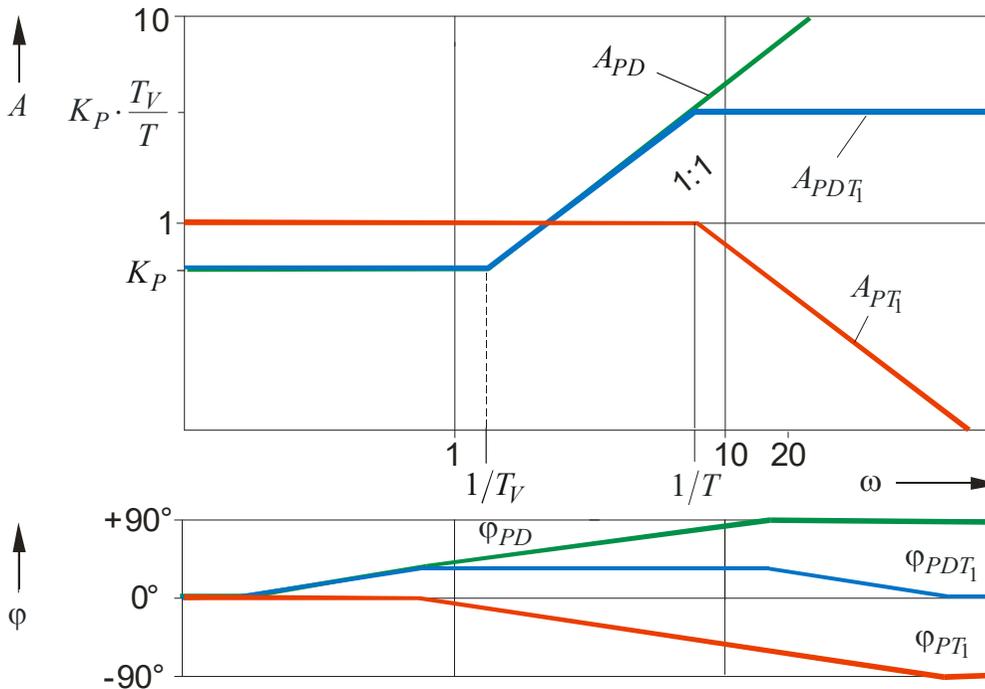
3.3 Frequenzkennlinie

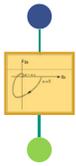
3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder (2)

■ Beispiel: Bode-Diagramm PDT_1 -Glied:

$$G(s) = K_P \frac{1 + T_V s}{1 + T s} \Rightarrow G(j\omega) = K_P \frac{1 + j\omega T_V}{1 + j\omega T} = K_P \underbrace{\left(1 + j \frac{\omega}{1/T_V}\right)}_{PD} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{1/T}}}_{PT_1}$$

PDT_1





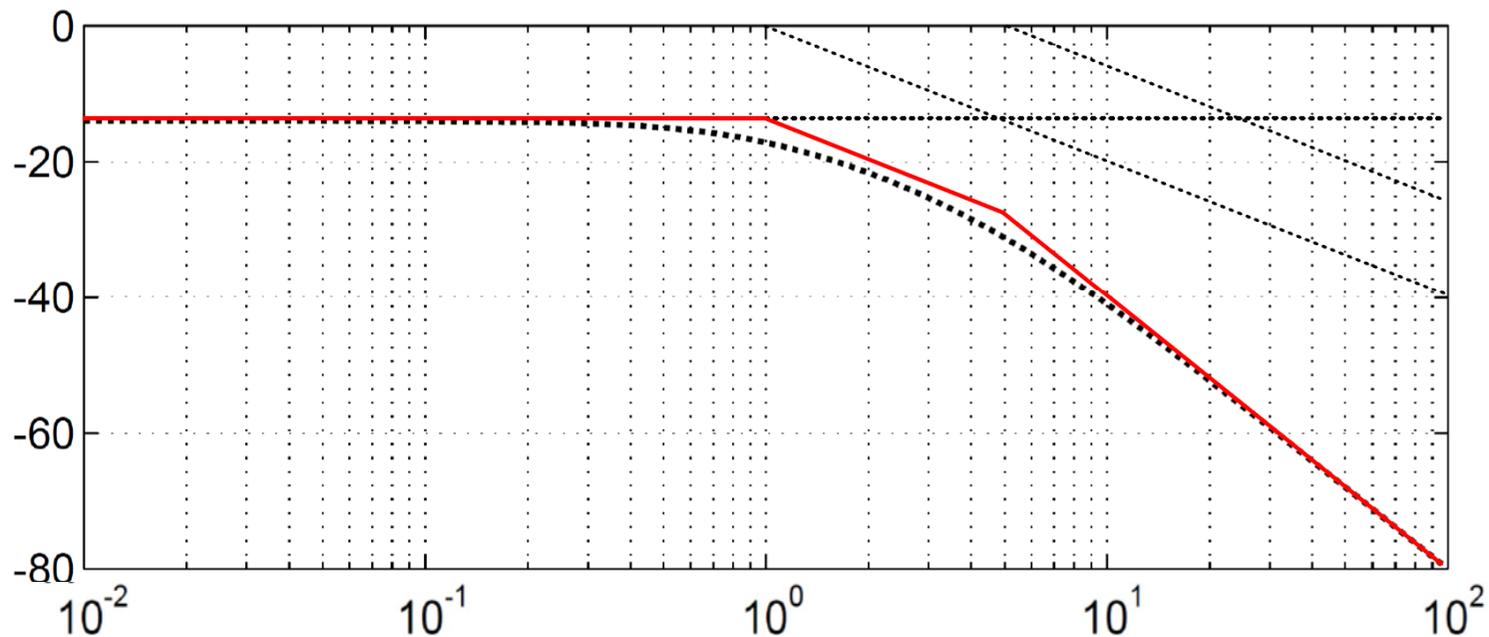
3.3 Frequenzkennlinie

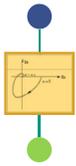
3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder (3)

Übertragungsfunktion:
$$G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+5}$$

Stationäre Schwingungen:
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \frac{1}{j\omega+5}$$

■ Betragsverlauf:
$$M_{dB} = -20 \left(\log(|1+j\omega|) + \log\left(|1+j\frac{1}{5}\omega|\right) + \log(5) \right)$$





3.3 Frequenzkennlinie

3.3.3 Frequenzkennlinien zusammengesetzter Übertragungsglieder (4)

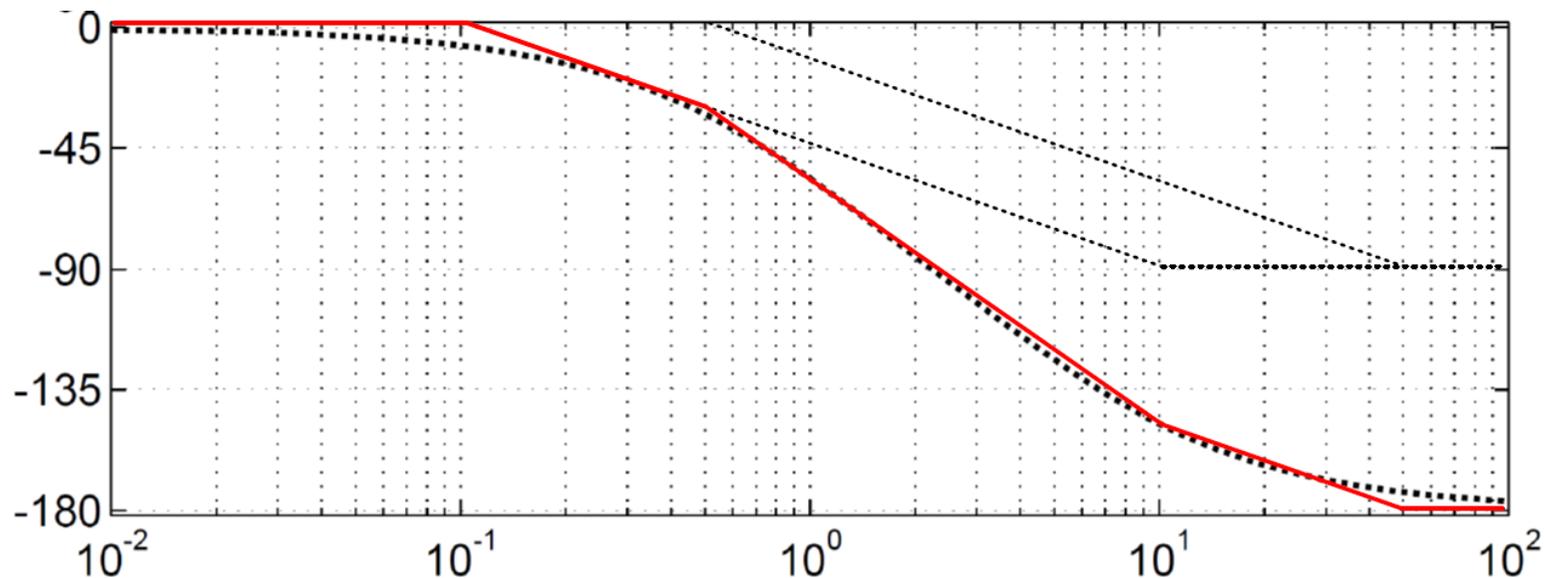
Übertragungsfunktion:

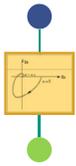
$$G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+5}$$

Stationäre Schwingungen:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \frac{1}{j\omega+5}$$

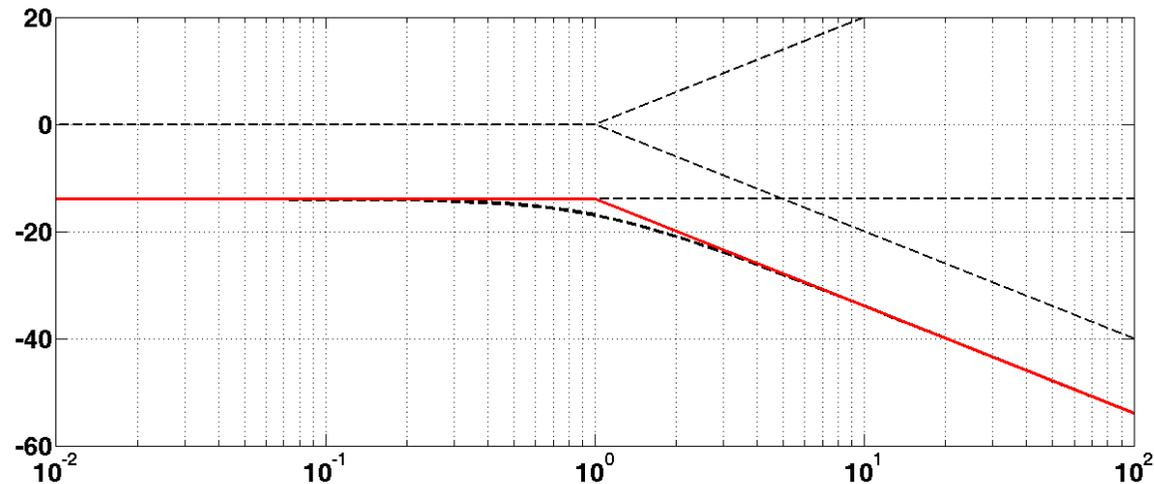
■ Phasenverlauf: $\varphi = -\arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)$





3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe



$$K = \frac{1}{5} \hat{=} -14 \text{ dB}$$

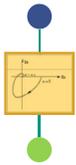
$$T = 1 \text{ s}$$

- Vermutung: Aus dem Betragsverlauf kann auf den Phasenverlauf geschlossen werden.

- Beispiel:
$$G(j\omega) = K \frac{1 - Tj\omega}{(1 + Tj\omega)(1 + Tj\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = |K| \frac{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{1 + T^2\omega^2} \equiv |K| \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = |G_{PT1}(j\omega)|$$

Fazit: Aus dem Betragsverlauf kann im Allgemeinen nicht auf den Phasenverlauf geschlossen werden.



3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (2)

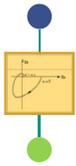
- Frage: Durch was unterscheiden sich zwei R-Glieder mit gleichem Betragsverlauf ?

$$\begin{aligned} |G_1(j\omega)| &= |G_2(j\omega)| \\ \Rightarrow \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} &= \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} = 1 \end{aligned}$$

- Offenbar ergibt sich der Unterschied durch einen Frequenzgang $G_A(j\omega)$, dessen Betrag unabhängig von der Frequenz ist.
- Diese Übertragungsglieder bezeichnet man allgemein als Allpass.

Es gilt nun: Sämtliche **R-Glieder, die dieselbe Betragskennlinie** aufweisen **unterscheiden sich durch Allpässe**, deren Betragskennlinie konstant ist und es gilt:

$$G_1(j\omega) = G_2(j\omega)G_A(j\omega)$$



3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (3)

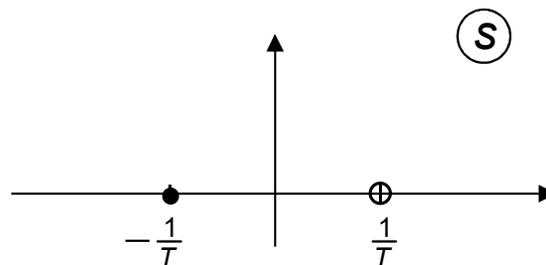
Def.: **Allpass**

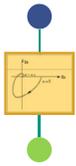
Ein System mit rationaler Übertragungsfunktion heißt Allpass, wenn sich Zähler- und Nennerpolynom nur im Vorzeichen der komplexen Variablen unterscheiden:

$$G_A(s) = \frac{Z_A(s)}{N_A(s)} \quad \text{mit} \quad N_A(s) = Z_A(-s).$$

Damit liegen also Pole und Nullstellen eines Allpasses jeweils symmetrisch zueinander links und rechts von der imaginären Achse.

■ Beispiel: $G_A(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}$





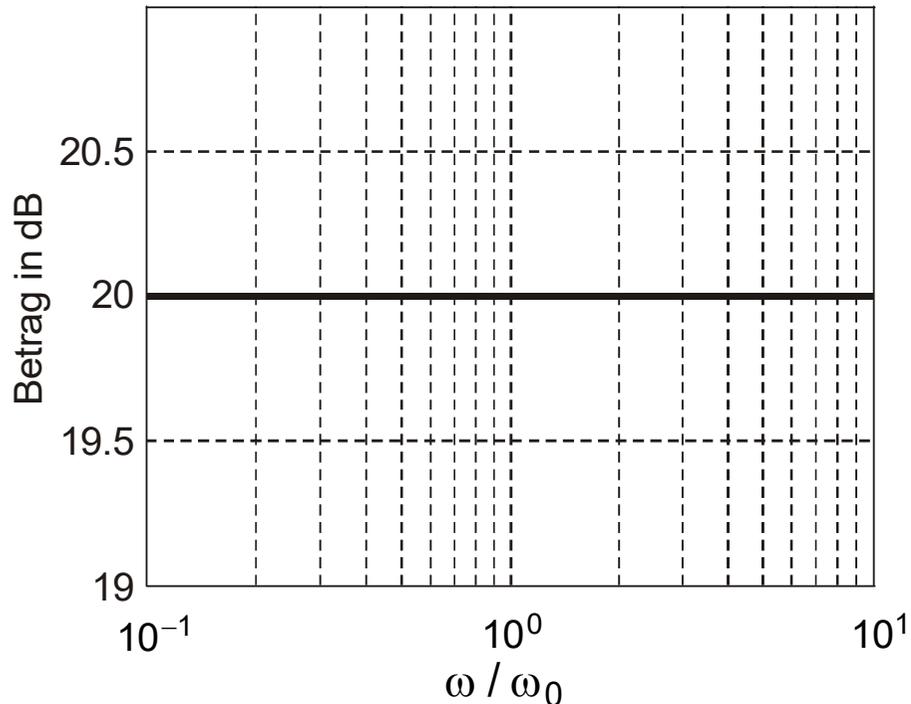
3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (4)

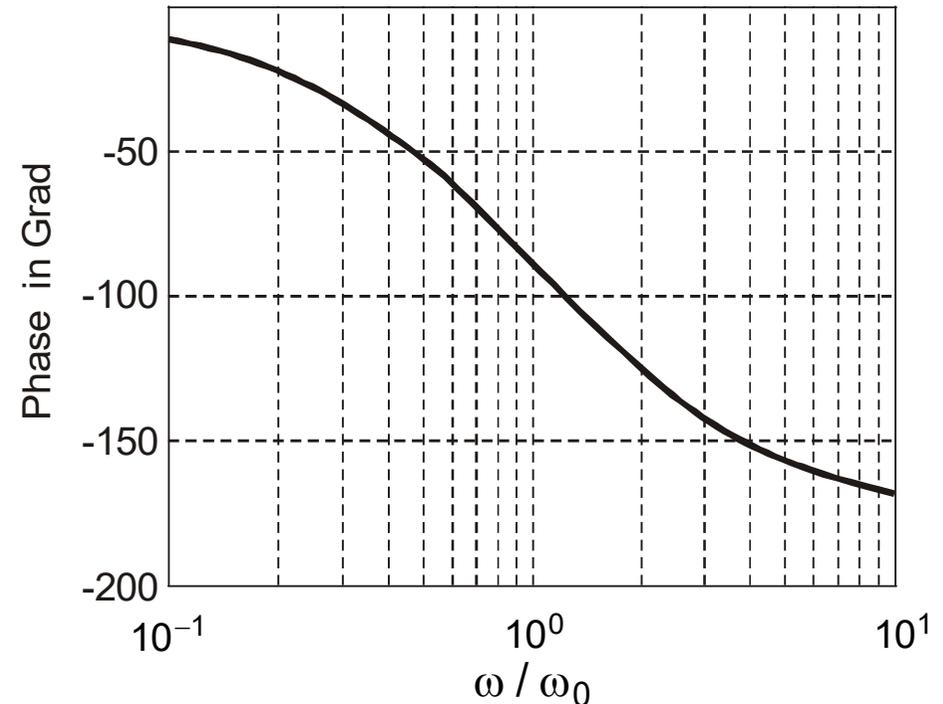
- Beispiel: Bode-Diagramm eines *Allpasses 1. Ordnung*:

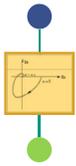
$$G(j\omega) = K \cdot \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow A_{AP}(\omega) = K ; \varphi_{AP}(\omega) = -2 \cdot \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Betragskennlinie ($K = 10 ; \omega_0 = 1$)



Phasenkennlinie ($K = 10 ; \omega_0 = 1$)





3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (5)

Def.: **Minimalphasensystem:**

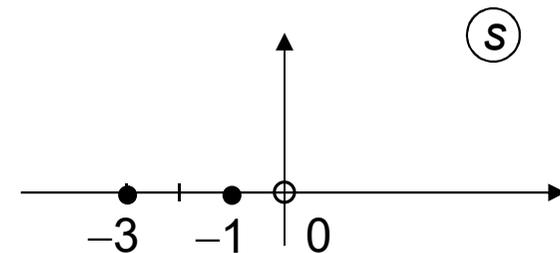
Ein System mit rationaler Übertragungsfunktion

$$G_m(s) = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots}, \quad K > 0, \quad q \geq 0$$

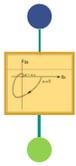
heißt Minimalphasensystem, wenn es keine Pole und keine Nullstellen rechts der imaginären Achse aufweist.

■ Beispiel:
$$G(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s - 0)}{(s + 1)(s + 3)}$$

The diagram shows the partial fraction decomposition of the transfer function. The numerator is s , which is written as $(s - 0)$. The denominator is $s^2 + 4s + 3$, which is factored into $(s + 1)(s + 3)$. The root 0 is labeled β_1 with a downward arrow. The roots -1 and -3 are labeled α_1 and α_2 with upward arrows.



Fazit: Zu einer gegebenen Betragskennlinie gibt es nur ein Minimalphasenglied

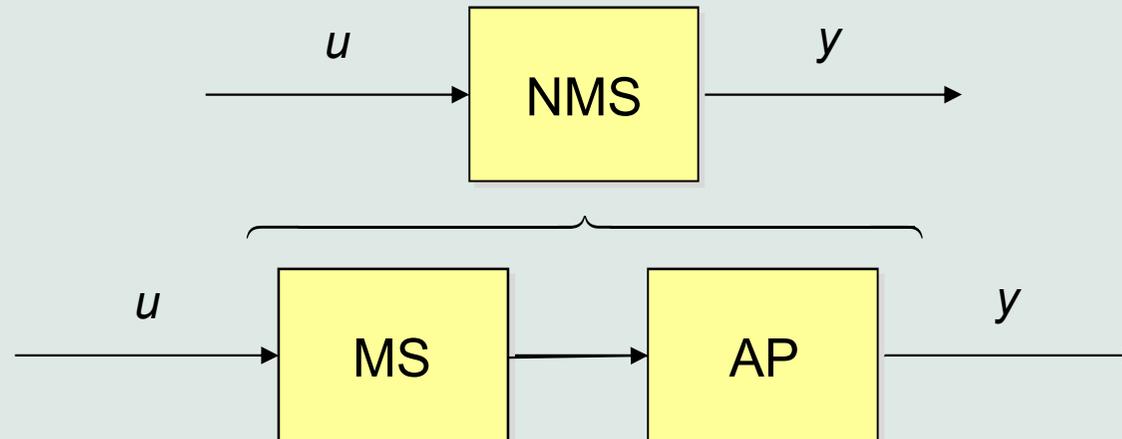


3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (6)

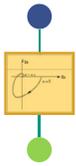
Nicht-Minimalphasensystem (NMS):

Reihenschaltung von Minimalphasensystem (MS) und Allpass (AP)



- Allpass dreht Phase zurück

⇒ Der Phasengang eines Minimalphasensystems liegt oberhalb der Phasenkennlinie aller rationalen Übertragungsfunktionen, die dieselbe Betragskennlinie und keine Pole rechts der imaginären Achse haben.

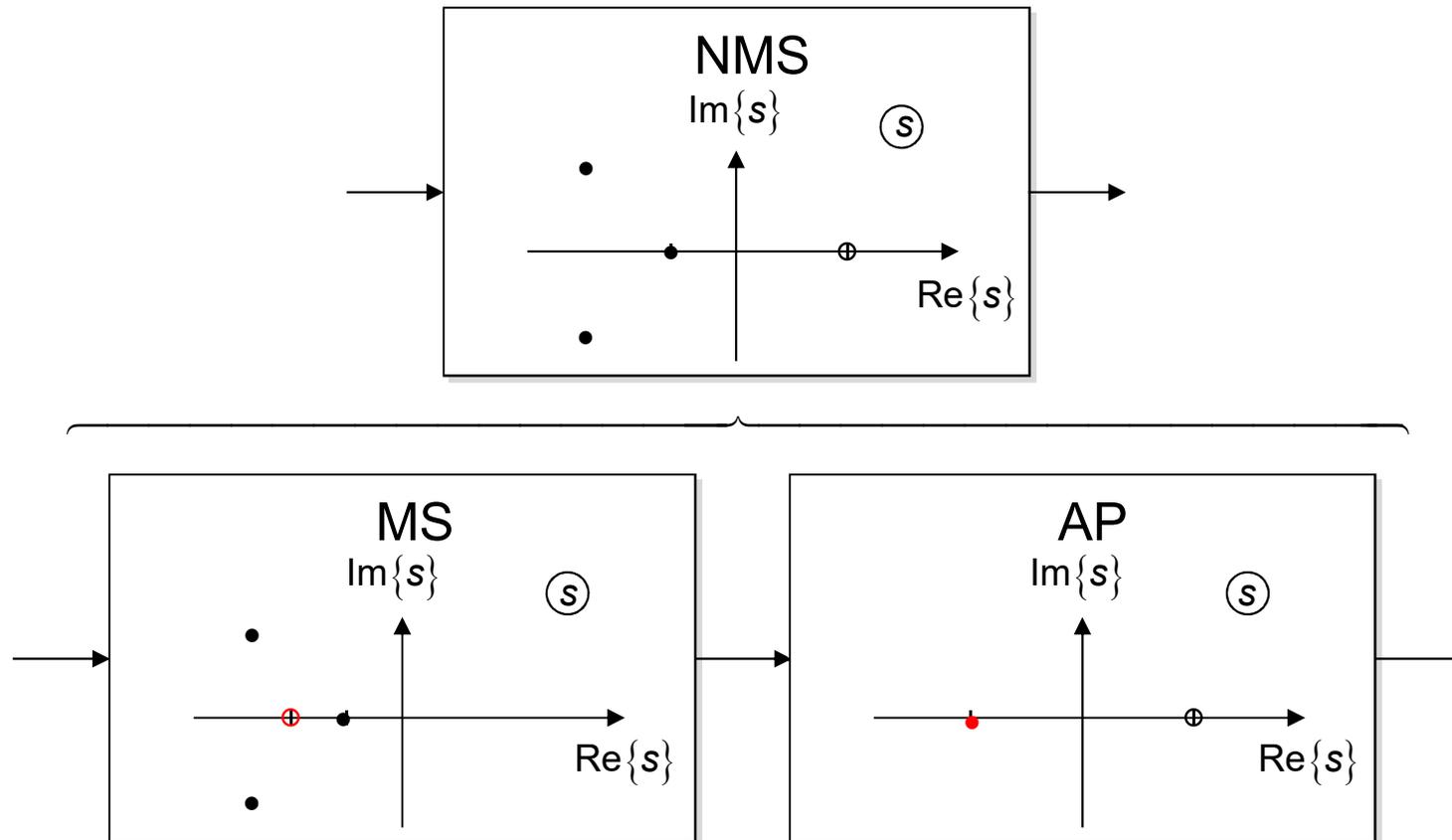


3.3 Frequenzkennlinie

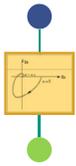
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (7)

■ Nun gilt:

jedes allgemeine Nicht-Minimalphasensystem (NMS) lässt sich stets zerlegen in ein Minimalphasensystem (MS) und einen Allpass (AP):



PC-Demo 2: Allpass

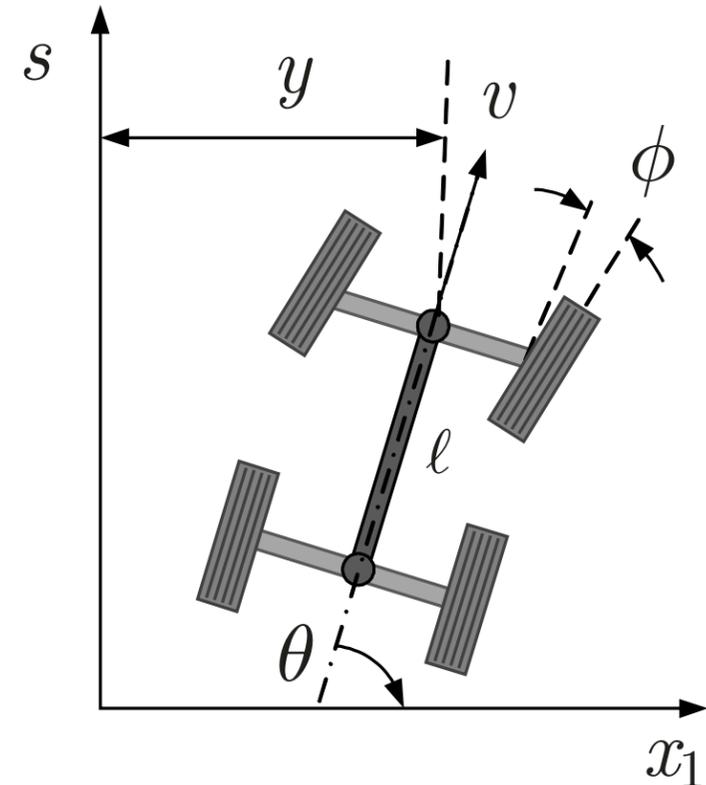


3.3 Frequenzkennlinie

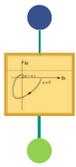
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (7)

Beispiel für ein **Nichtminimalphasensystem**: Rückwärtseinparken von Fahrzeugen

- Eingangsgröße:
Dreh-/Lenkgeschwindigkeit des Vorderrads
 $u(t) = \dot{\varphi}(t)$
- Ausgangsgröße:
Seitlicher Abstand $y(t)$
- Linearisiertes Modell
um den Arbeitspunkt: $\theta_0 = 90^\circ, u_0 = 0, \varphi_0 = 0^\circ$
- Übertragungsfunktion $G(s) = -\frac{v \cdot s + \frac{v^2}{l}}{s^3}$
- Das System besitzt eine Nullstelle: $\beta = -\frac{v}{l}$



v : Fahrzeuglängsgeschwindigkeit
(vorwärts: positiv)
 l : Radstand

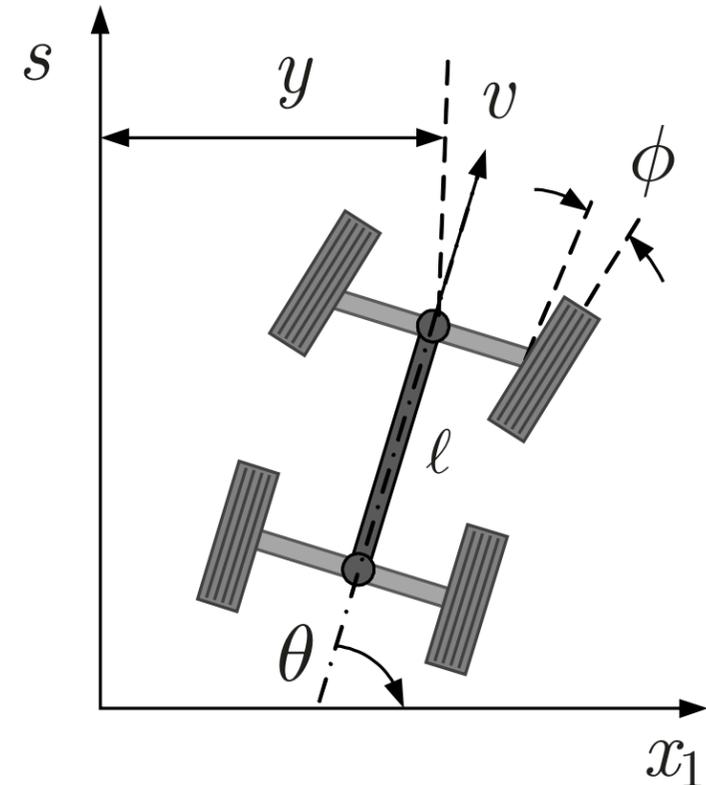


3.3 Frequenzkennlinie

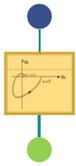
3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (7)

Beispiel für ein **Nichtminimalphasensystem**: Rückwärtseinparken von Fahrzeugen

- Übertragungsfunktion $G(s) = -\frac{v \cdot s + \frac{v^2}{l}}{s^3}$
- Das System besitzt eine Nullstelle: $\beta = -\frac{v}{l}$
- Bei Vorwärtsfahrt ($v > 0$) \rightarrow minimalphasig
- Bei Rückwärtsfahrt ($v < 0$) \rightarrow nichtminimalphasig



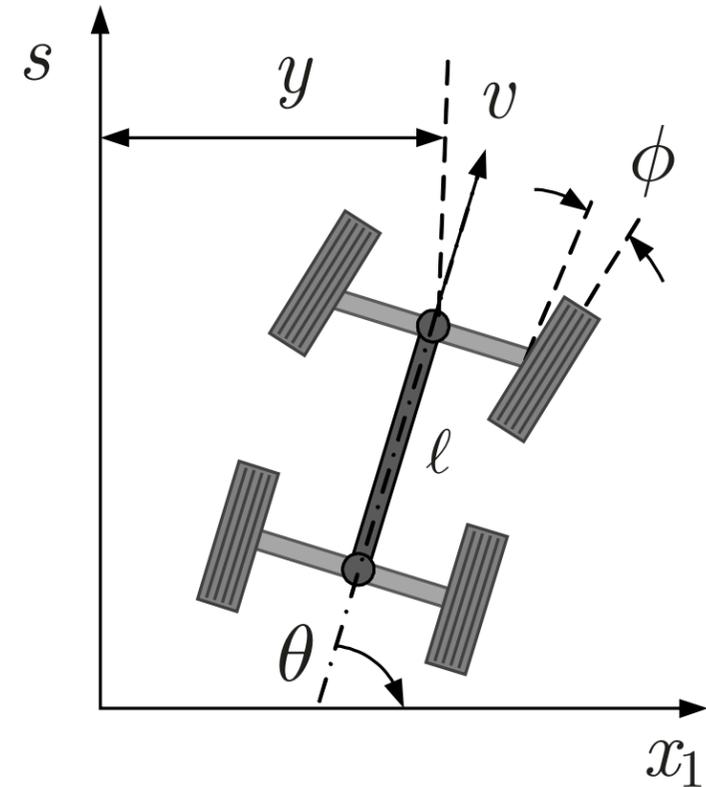
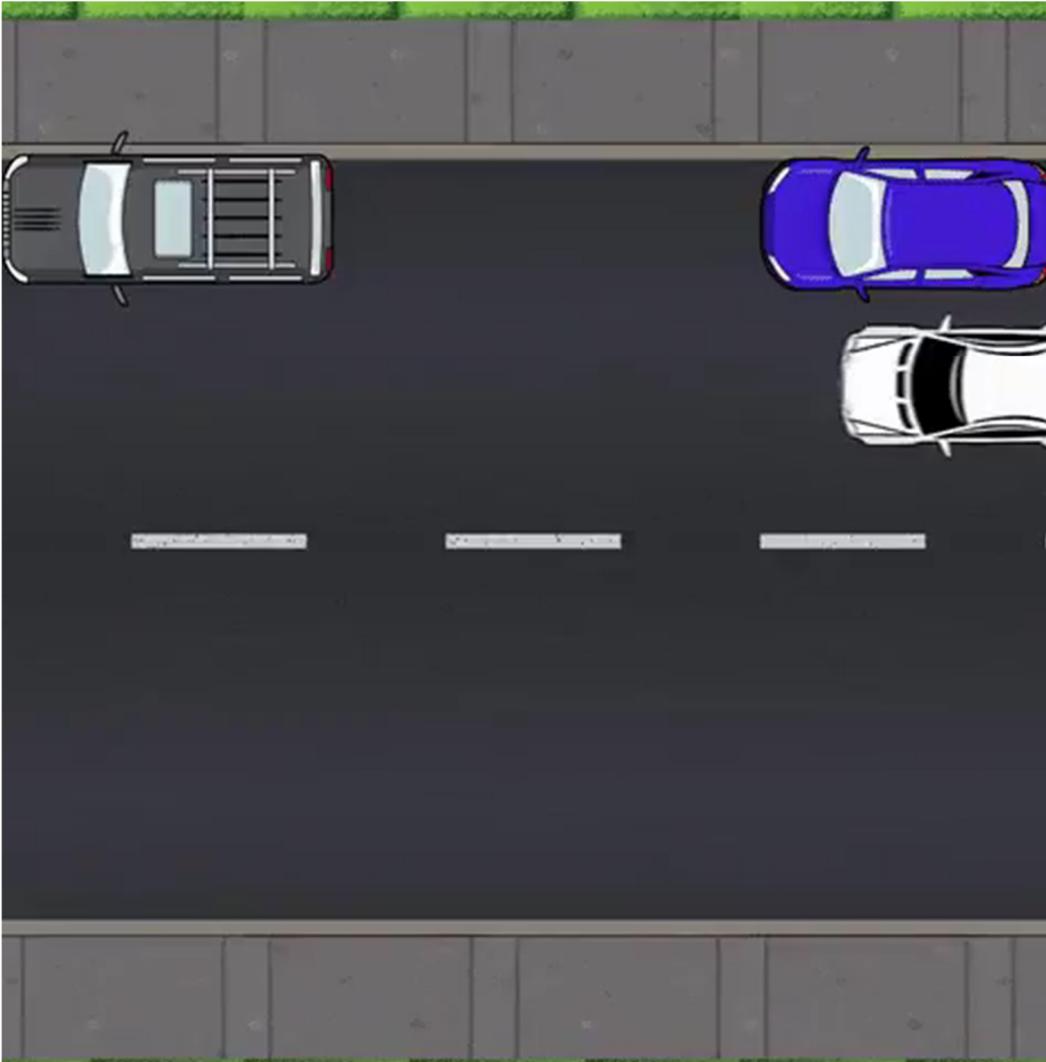
v : Fahrzeuglängsgeschwindigkeit
(vorwärts: positiv)
 l : Radstand



3.3 Frequenzkennlinie

3.3.4 Minimalphasensysteme und Allpässe (7)

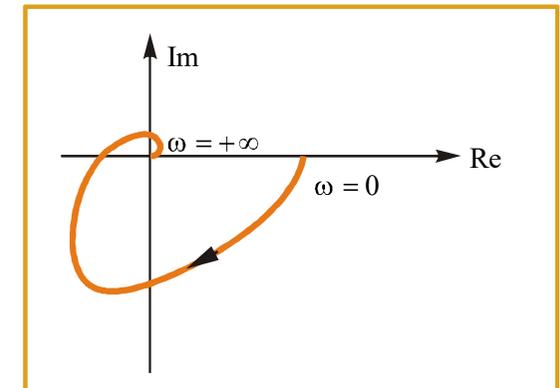
Beispiel für ein **Nichtminimalphasensystem**: Rückwärtseinparken von Fahrzeugen





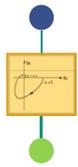
3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
- 4. Grundlagen zur Stabilität**
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



3.4 Grundlagen zur Stabilität

3.4.1 Definitionen

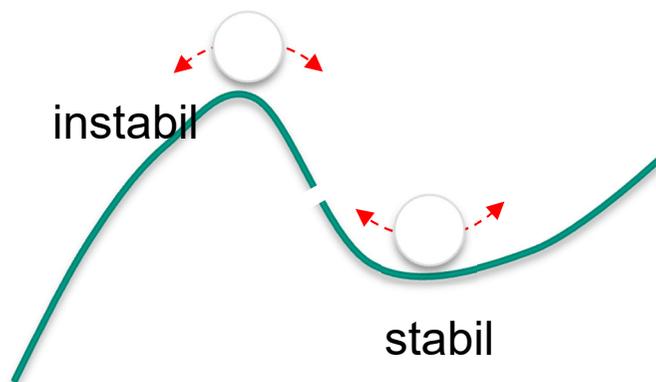
I) Stabilität einer Ruhelage

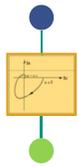
- System kehrt bei kleiner Auslenkung aus der Ruhelage in diese zurück oder verbleibt in deren Nähe
- → Nichtlineare Regelungen und Regelung linearer Mehrgrößensysteme

II) Ein/Ausgangsstabilität

- System reagiert auf eine beschränkte Eingangsgröße (Testfunktion) mit einer beschränkten Ausgangsgröße
- → Die Art der Beschränkung muss definiert werden

Merkhilfe: Kugel im Gebirge





3.4 Grundlagen zur Stabilität

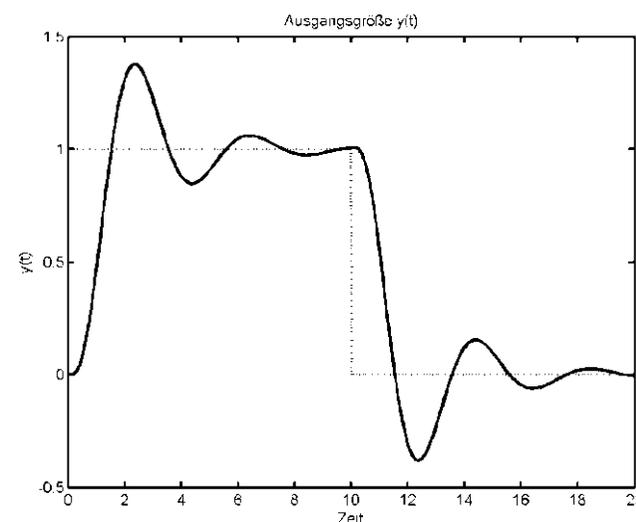
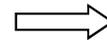
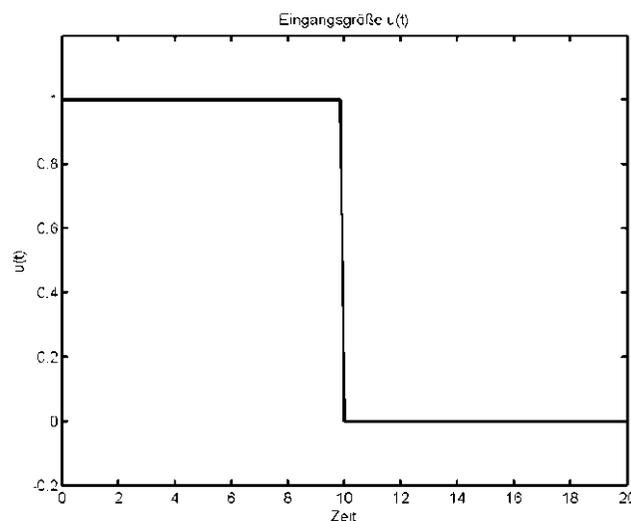
3.4.1 Definitionen (2)

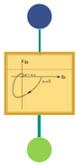
Def.: **Übertragungsstabilität (BIBO-Stabilität):**

Ein System heißt übertragungsstabil, wenn es auf jede betragsbeschränkte Eingangsgröße stets mit einer betragsbeschränkten Ausgangsgröße antwortet (BIBO: Bounded Input Bounded Output), d.h., wenn für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt:

$$|u(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq N \quad (M, N \text{ positiv, konstant } < \infty)$$

■ Beispiel:





3.4 Grundlagen zur Stabilität

3.4.2 Stabilitätsbedingungen

Stabilitätsbedingung I

Ein lineares zeitinvariantes (LTI-) System ist genau dann **übertragungsstabil**, wenn das **Integral über die Impulsantwort $g(t)$ absolut konvergent ist**:

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

- Ist ein System übertragungsstabil (Stabilitätsbedingung I erfüllt), so

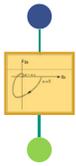
- strebt seine Sprungantwort $h(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einen endlichen Wert an:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau = \text{const} < \infty$$

- klingt seine Impulsantwort $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nach Null ab:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

- (Anmerkung: bei rationalen Übertragungsgliedern gilt auch die Umkehrung!)



3.4 Grundlagen zur Stabilität

3.4.2 Stabilitätsbedingungen (2)

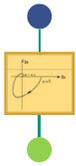
Stabilität gebrochen rationaler Übertragungsglieder: Stabilitätsbedingung II

Stellt die Systemübertragungsfunktion $G(s)$ eine gebrochen rationale Funktion mit

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \quad (Z, N \text{ teilerfremd, } m = \text{Grad}(Z) \leq \text{Grad}(N) = n)$$

dar, so ist das **System genau dann übertragungsstabil, wenn alle Pole einen negativen Realteil haben:**

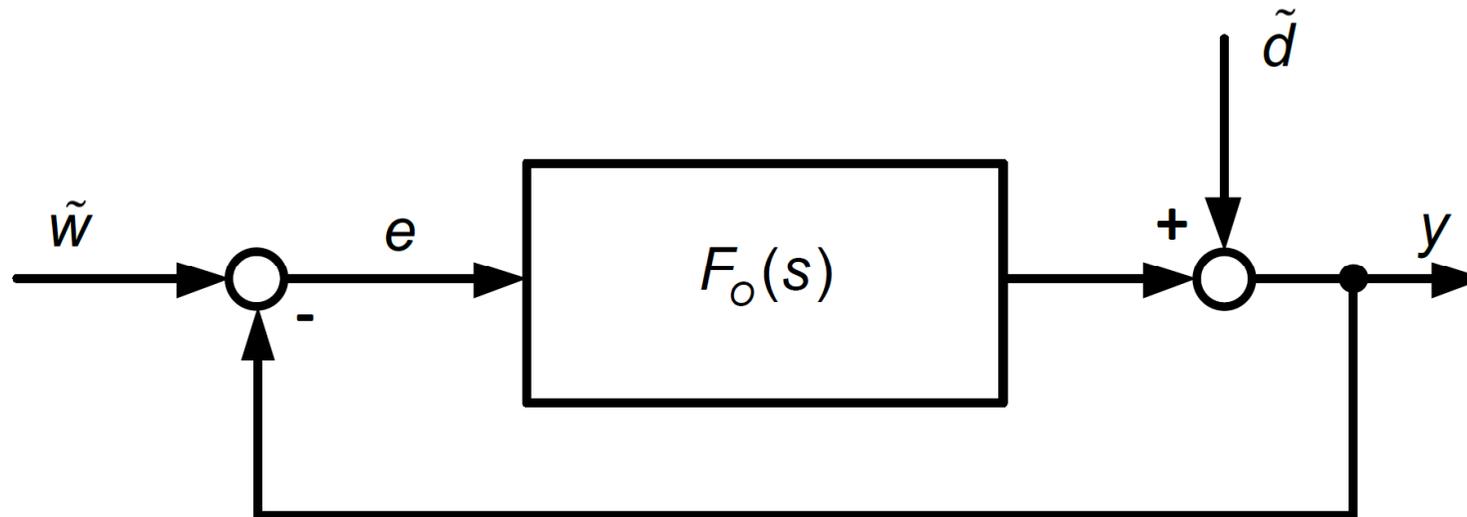
$$\text{Re}(s_k) = \sigma_k < 0 \quad k=1, \dots, n$$

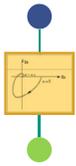


3.4 Grundlagen zur Stabilität

3.4.2 Stabilitätsbedingungen (3)

- Nun ist das System durch einen Regelkreis gegeben:





3.4 Grundlagen zur Stabilität

3.4.2 Stabilitätsbedingungen (4)

Stabilität bzgl. der Führungsgröße
als „Eingangsgröße“

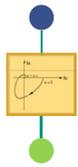
$$\frac{Y(s)}{\tilde{W}(s)} = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} = G_{\text{sys},\tilde{w}}(s)$$

Stabilität bzgl. der Störgröße als
„Eingangsgröße“

$$\frac{Y(s)}{\tilde{D}(s)} = \frac{1}{1 + F_o(s)} = G_{\text{sys},\tilde{d}}(s)$$

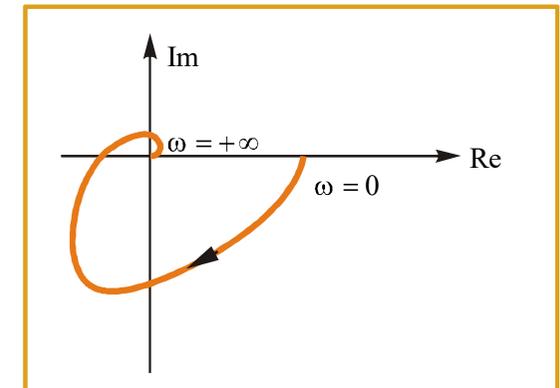


Stabil, wenn nach Bedingung II : Pole von $G_{\text{sys},w}(s)$ bzw. $G_{\text{sys},d}(s)$ einen negativen Realteil aufweisen, also **(in beiden Fällen !)** die Nullstellen von $1 + F_o(s)$ einen negativen Realteil haben.



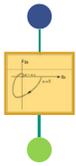
3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
- 5. Algebraische Stabilitätskriterien**
6. Graphische Stabilitätskriterien



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



3.5 Algebraische Stabilitätskriterien

Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895)

- Hierbei untersucht: Charakteristisches Polynom des **geschlossenen Kreises**

Def.: **Hurwitzpolynom:**

Ein Polynom

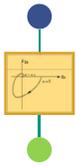
$$P_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_v \text{ reell, } a_n > 0$$

heißt **Hurwitz-Polynom (HP)**, wenn alle seine Wurzeln (= Nullstellen)

$$s_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

einen *negativen Realteil* haben.

⇒ **Stabilitätskriterium: Ein lineares dynamisches System ist genau dann stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz-Polynom ist.**



3.5 Algebraische Stabilitätskriterien

Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895) (2)

■ Bedingungen an $P_n(s)$:

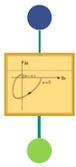
a) Notwendige Bedingung:

$$a_i > 0 \quad ; \quad i = 0, \dots, n$$

b) Notwendige und hinreichende Bedingung (**Hurwitz-Kriterium**):

- (• $a_n > 0$ Definition von $P_n(s)$)
- alle Hurwitz-Determinanten $D_k > 0$; $k = 1, \dots, n$

⇒ Dann folgt: $P_n(s)$ ist Hurwitz-Polynom



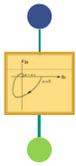
3.5 Algebraische Stabilitätskriterien

Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895) (3)

Def.: **Hurwitz-Determinante:**

Eine Hurwitz-Determinante ist eine der „nordwestlichen“ Unterdeterminanten D_1, \dots, D_n ($D_n = \det \underline{D}$) der Hurwitz-Matrix \underline{D}

$$\underline{D} = \begin{array}{ccccccc} \left[\begin{array}{ccccccc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{array} \right] & \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccc} \end{array}} \right\} \text{n Zeilen} \\ \underbrace{\hspace{10em}} & \text{n Spalten} \end{array}$$



3.5 Algebraische Stabilitätskriterien

Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895) (4)

- Aus dem Koeffizientenschema der Hurwitz-Determinante sind Bedingungen für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ableitbar:

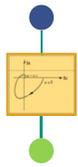
- **Hurwitz-Kriterium:**

Notwendig und hinreichend dafür, dass das charakteristische Polynom $P_n(s)$ ($n = 1, \dots, 4$) eines Systems ein **Hurwitz-Polynom** ist, ist die Erfüllung von den folgenden **algebraischen Beziehungen zwischen Koeffizienten a_i** :

| | |
|----------|--|
| $n = 1:$ | $a_0, a_1 > 0$ |
| $n = 2:$ | $a_0, a_1, a_2 > 0$ |
| $n = 3:$ | $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ |
| $n = 4:$ | $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0$ |

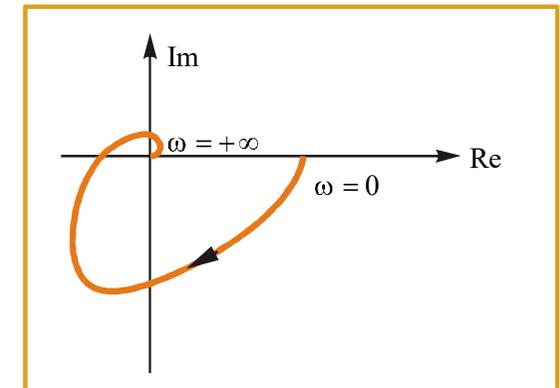
Tafelanschrieb 3.5 (1)

Algebraische Stabilitätskriterien



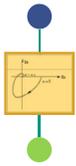
3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. **Graphische Stabilitätskriterien**



4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien

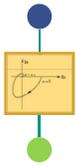


3.6 Graphische Stabilitätskriterien

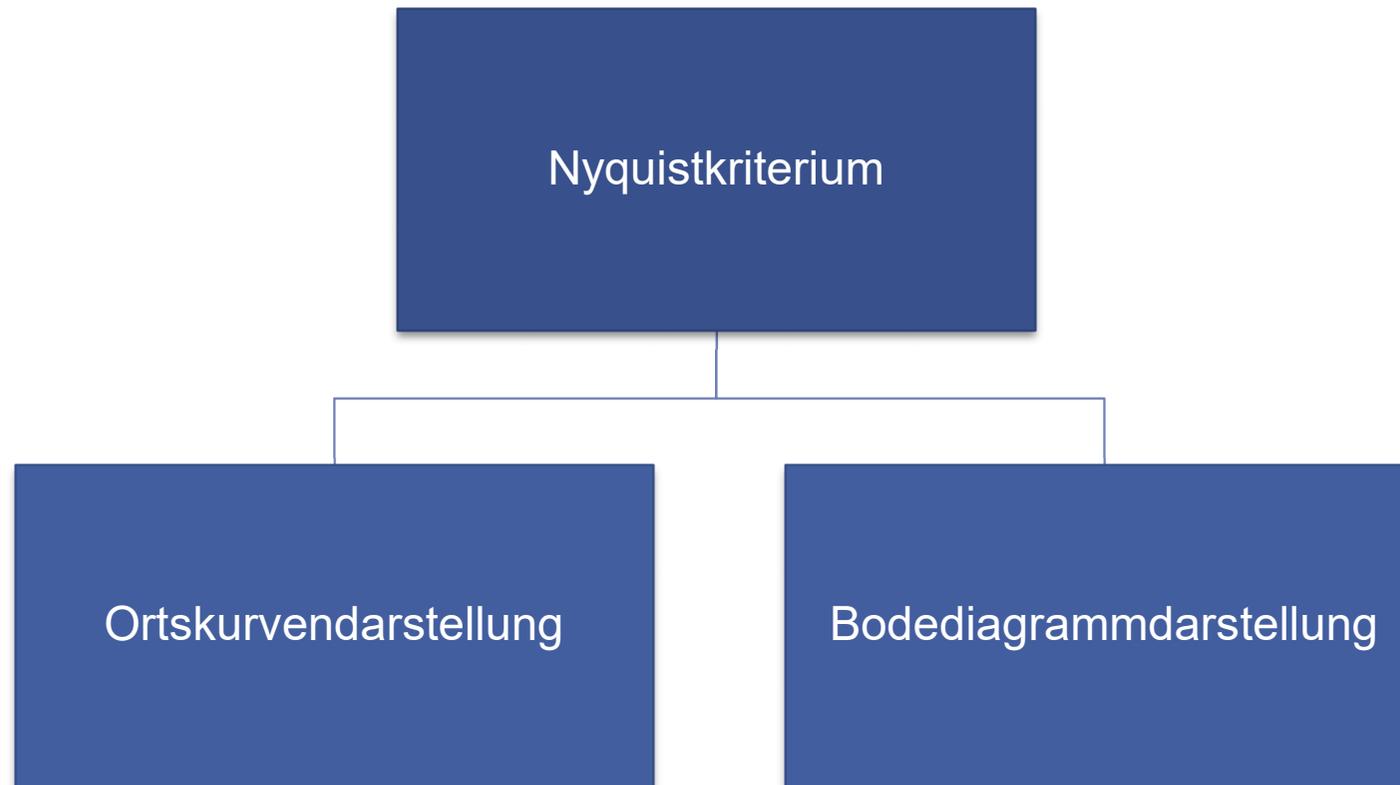
- **Problem bei algebraischen Kriterien:**
 - Geschlossener Kreis muss explizit berechnet werden.
 - Auswirkung des Regelgesetzes auf Nullstellen von $1 + F_o(s)$ nur in einfachen Fällen zu überblicken.

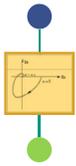


- **Nyquistkriterium**
(nach Nyquist [ny:kvist], geb. in Schweden, später in die USA ausgewandert (1889-1976))
- Vom **offenen Kreis** kann auf die Stabilität des geschlossenen Kreises geschlossen werden
- Anwendung auch auf nichtrationale Übertragungsglieder (z.B. Totzeitglieder)



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

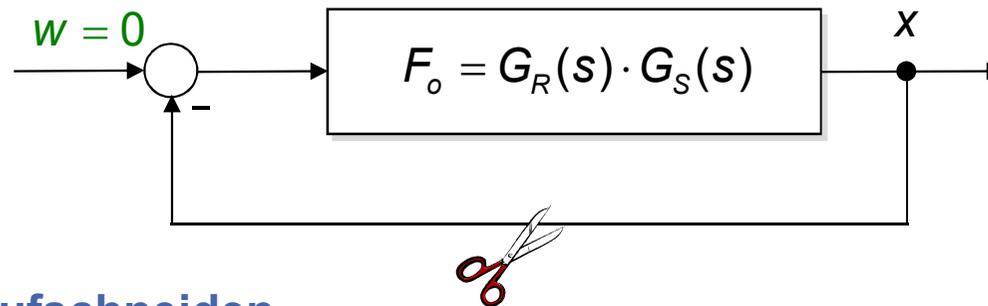




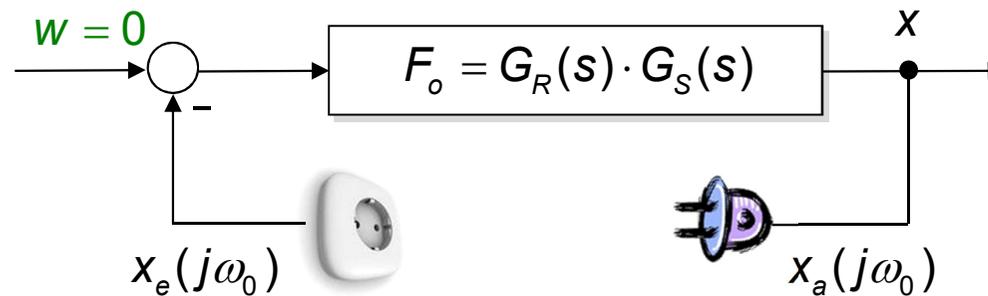
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

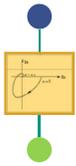
- Bedingung für das Auftreten einer Schwingung:
 - Ausgangspunkt: geschlossener Regelkreis:



- Kreis aufschneiden



$$x_a(j\omega_0) = -F_o(j\omega_0)x_e(j\omega_0)$$

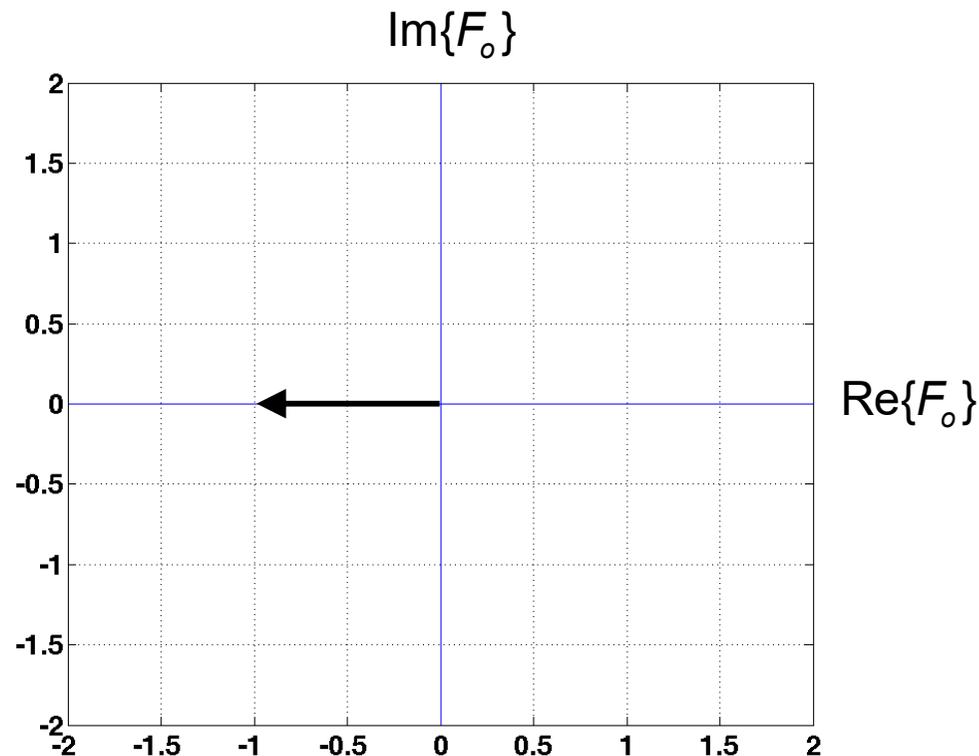


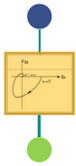
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

- Bedingung für das Auftreten einer Schwingung:

Für Dauerschwingung muss offensichtlich gelten: $x_e(j\omega_0) = x_a(j\omega_0) = -F_o(j\omega_0)x_e(j\omega_0)$
 $\Rightarrow F_o(j\omega_0) = -1$





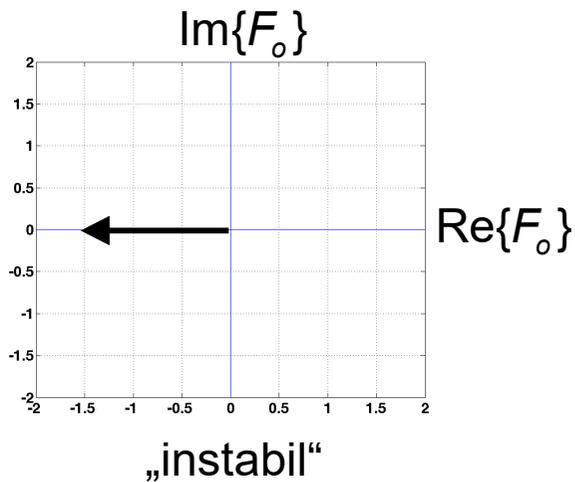
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

- Bedingung für das Auftreten einer Schwingung:

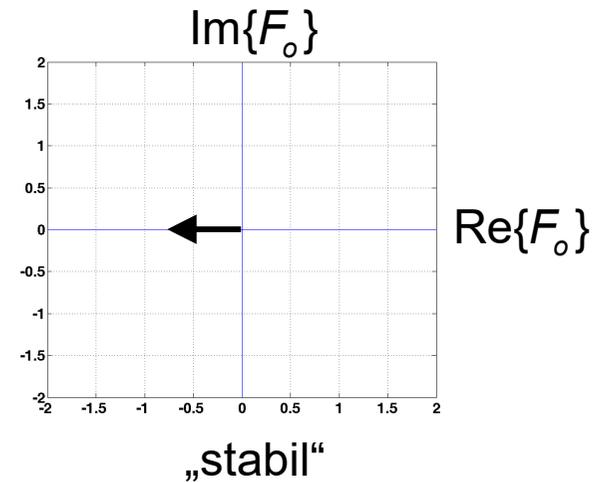
Dauerschwingung klingt auf, falls

$$|x_e(j\omega_0)| < |x_a(j\omega_0)|$$

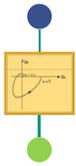


Dauerschwingung klingt ab, falls

$$|x_e(j\omega_0)| > |x_a(j\omega_0)|$$



- Folgerung: Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn bei dem Phasenwinkel $\varphi = 0$ zwischen \underline{x}_a und \underline{x}_e gilt: $|x_a| < |x_e|$

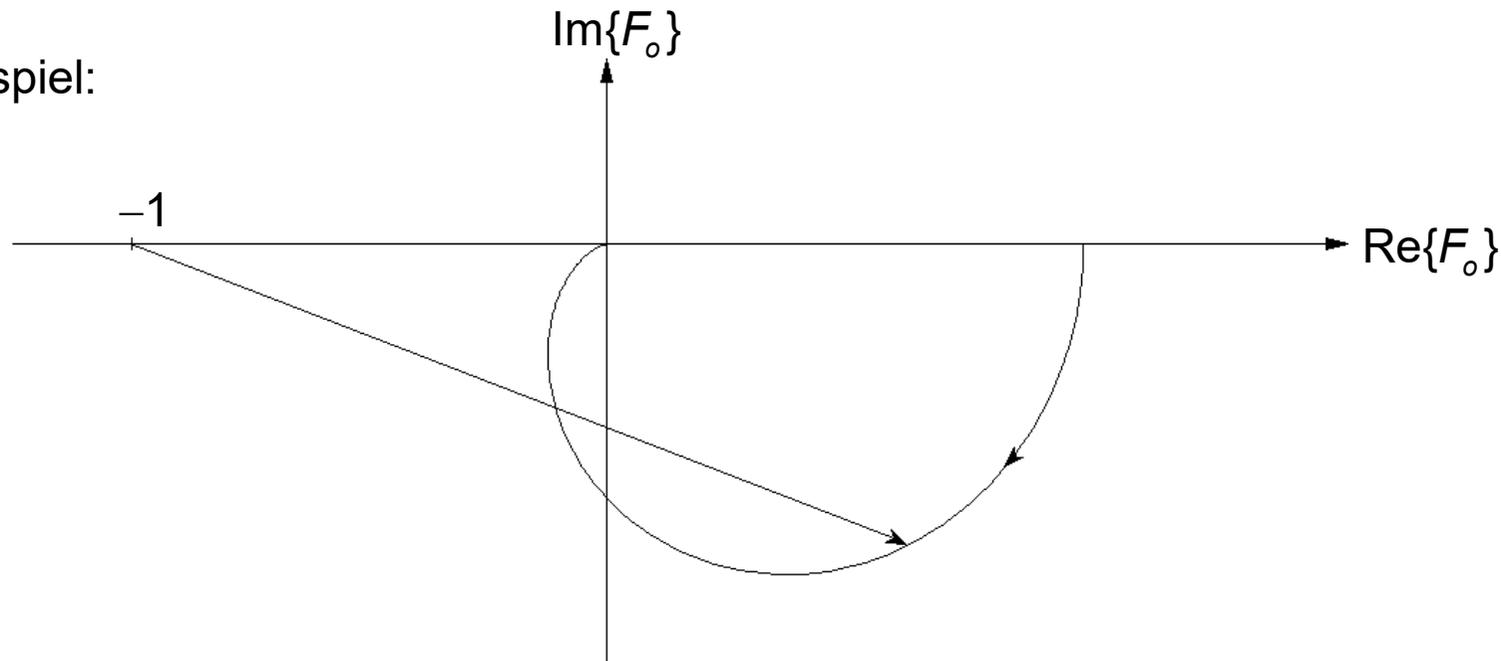


3.6 Graphische Stabilitätskriterien

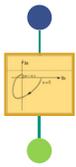
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

- Wie verhält es sich bei anderen Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}^+$?
→ Betrachten der Frequenzgangs-Ortskurve:

- Beispiel:



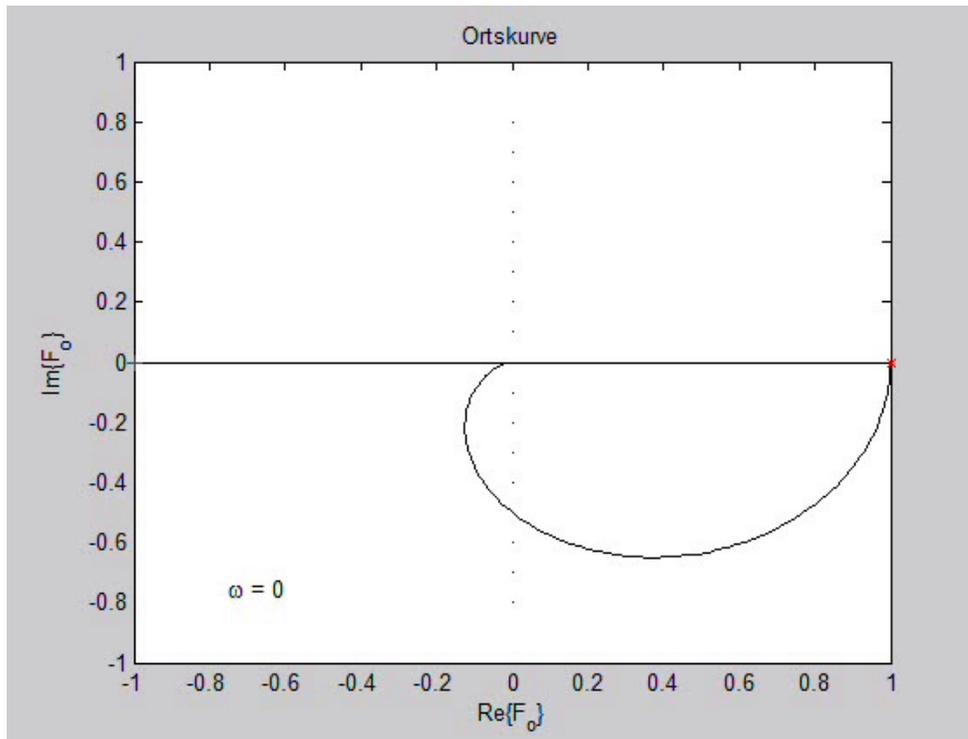
⇒ Vermutung: System stabil, wenn Punkt -1 links der Ortskurve liegt, bzw. wenn die Netto-Winkeländerung des Fahrstrahls vom Punkt -1 auf die Ortskurve Null beträgt.



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

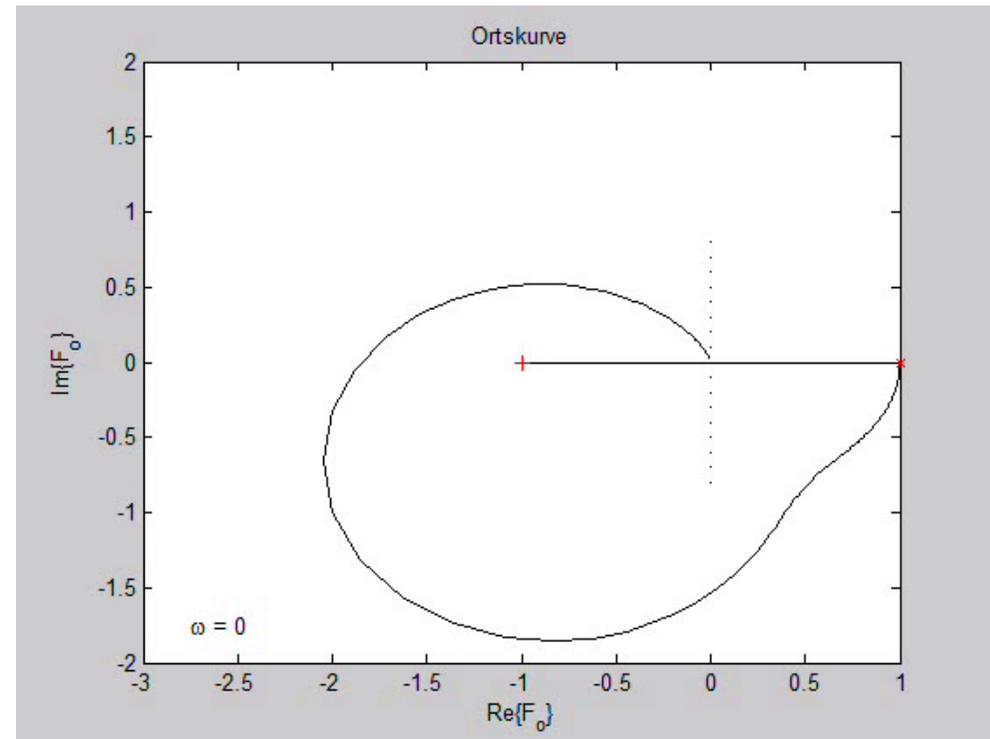
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

Netto-Winkeländerung des Fahrstrahls von -1 auf die Ortskurve:



$$F_o(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

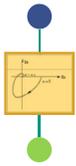
Netto-Winkeländerung = 0



$$F_o(s) = \frac{5}{(2s+1)(5s^2+s+5)}$$

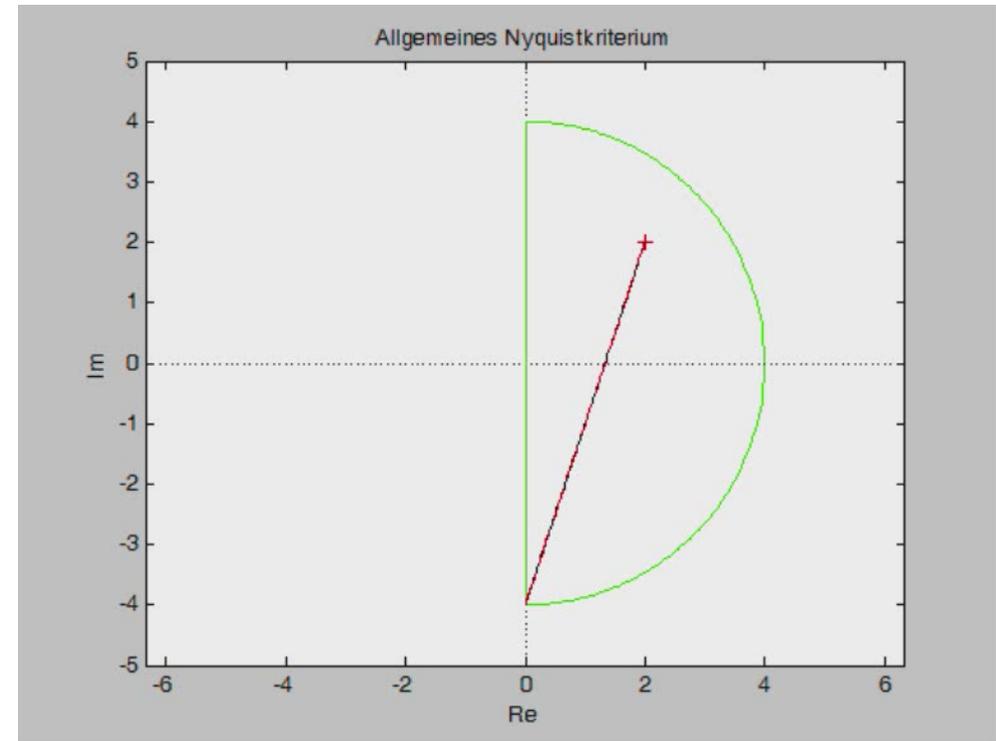
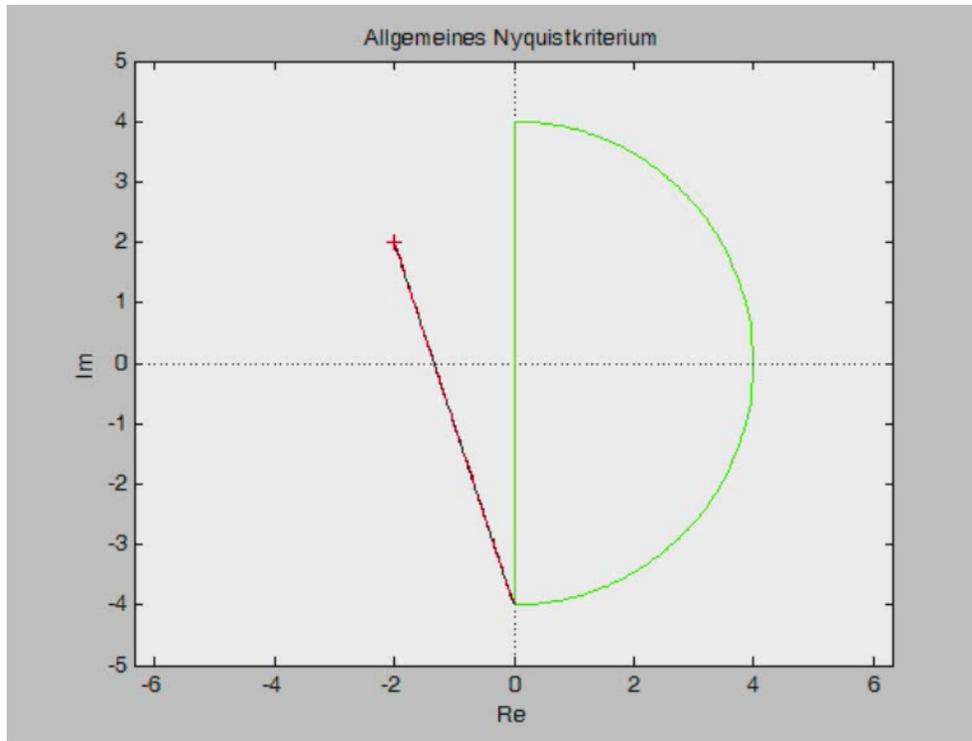
Netto-Winkeländerung = -2π

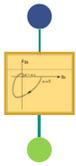
Tafelanschrieb 3.6 (1)



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung





3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

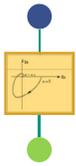
■ Voraussetzungen:

Für die Übertragungsfunktion $F_o(s)$ des offenen Kreises gelte:

$$F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} \cdot e^{-T_t s}, \quad T_t \geq 0$$

$$\text{Grad}\{Z_o(s)\} = m, \quad \text{Grad}\{N_o(s)\} = n, \quad n > m$$

$Z_o(s)$, $N_o(s)$ teilerfremd



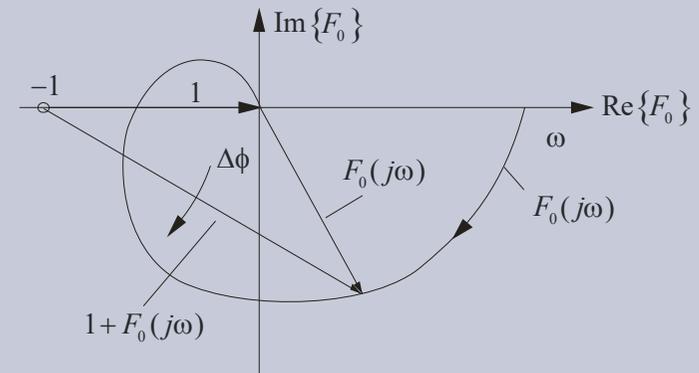
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

Allgemeines Stabilitätskriterium nach Nyquist (auch für instabile offene Kette):

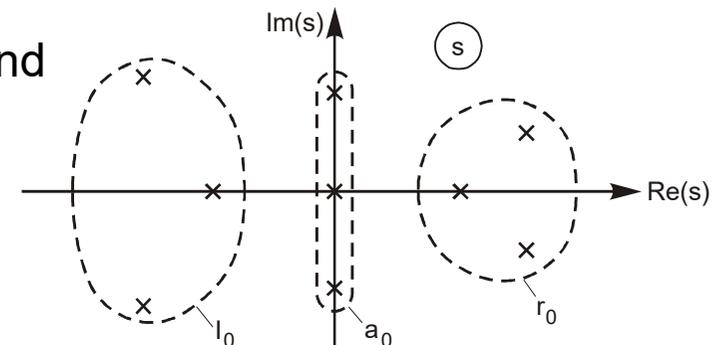
Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn die stetige Winkeländerung $\Delta\Phi$ des Fahrstrahls vom kritischen Punkt $P_k = -1 + j0$ zur $F_o(s)$ -Ortskurve für $\omega = 0$ bis $\omega \rightarrow \infty$ den folgenden Wert annimmt:

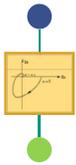
$$\Delta\Phi_{\text{stabil}} = r_o \cdot \pi + a_o \cdot \frac{\pi}{2}$$



Dabei sind r_o und a_o die Anzahl der Pole von $F_o(s)$ auf und rechts der imaginären Achse, für die zusammen mit den l_o Polen links der imaginären Achse also gilt:

$$l_o + a_o + r_o = n$$





3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

- Verhalten bei instabilem offenes System:
Bsp. mit stabilem geschlossenen Kreis:

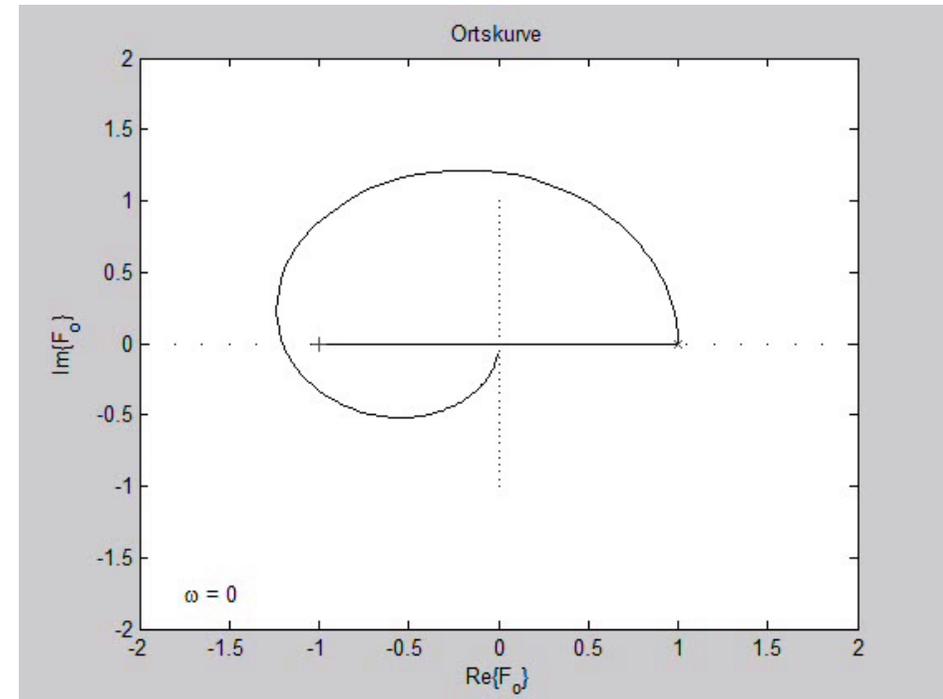
$$F_o(s) = \frac{6 \cdot (s+1)(s+2)}{(s-3)(s-2)(s+2)}$$

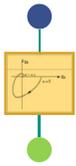
→ 2 instabile Pole

Winkeländerung des Fahrstrahls $\Delta\Phi = 2\pi$

geschlossener Kreis:

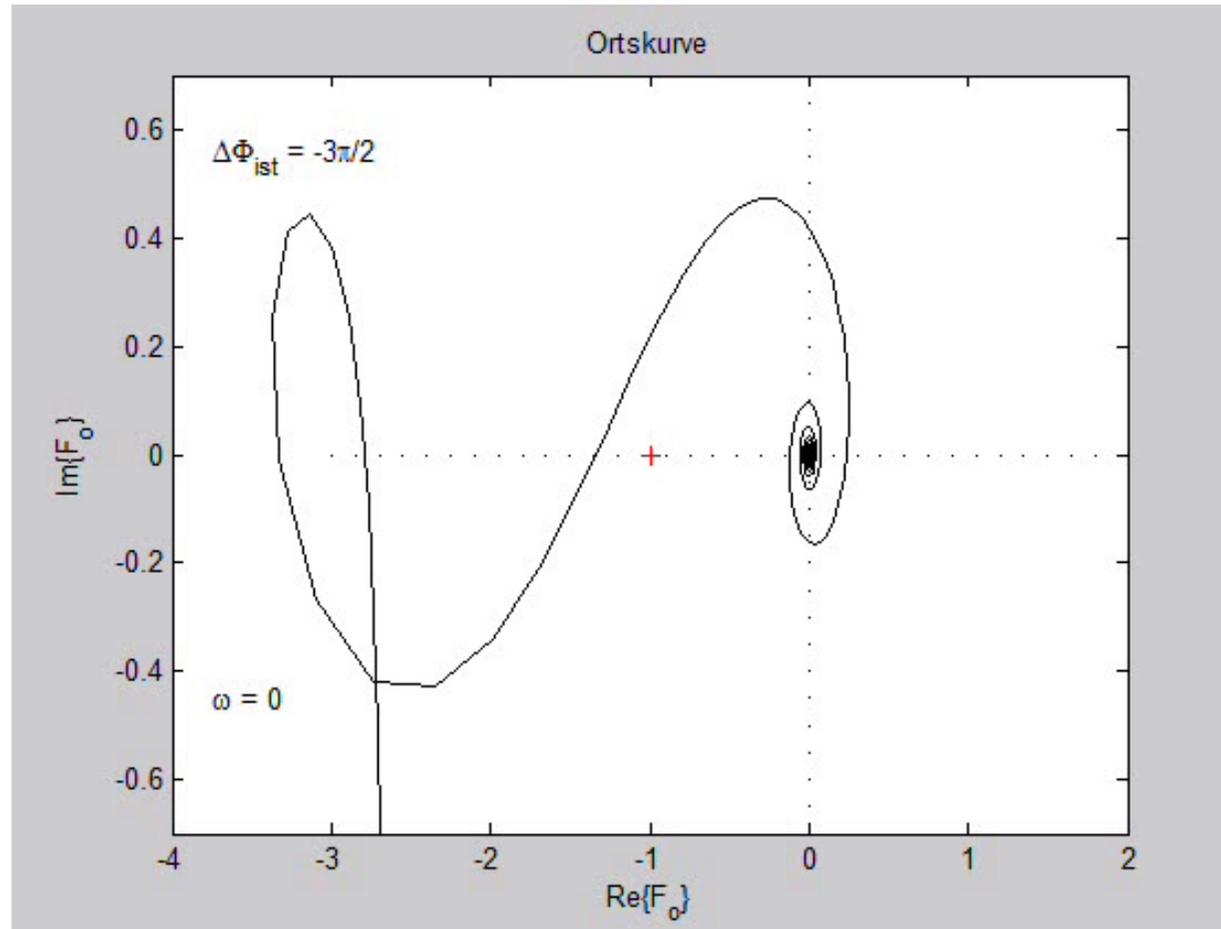
$$G_W(s) = \frac{6 \cdot (s+1)(s+2)}{(s+2)(s^2 + s + 12)} \rightarrow \text{stabil}$$





3.6 Graphische Stabilitätskriterien

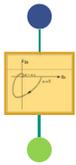
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung



$$F_o(s) = \frac{-0.6375 \cdot (s-4)(s^2 - 2s + 1.25)}{s(s+3)(s^2 - 0.5s + 1.063)} \cdot e^{-1 \cdot s}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi_{\text{stabil}} = \frac{5}{2}\pi \neq \Delta\Phi_{\text{ist}}$$

\Rightarrow geschlossener Kreis instabil



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

■ Formalisierung:

Für die Übertragungsfunktion $F_o(s)$ des offenen Kreises gelte:

$$F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} \cdot e^{-T_t s}, \quad T_t \geq 0$$

$$\text{Grad}\{Z_o(s)\} = m, \quad \text{Grad}\{N_o(s)\} = n, \quad n > m$$

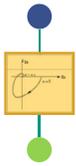
$Z_o(s)$, $N_o(s)$ teilerfremd

■ Voraussetzung:

Bis auf maximal zwei Pole im Ursprung liegen alle Pole von $F_o(s)$ links von der imaginären Achse der komplexen Ebene.

Nyquist-Kriterium für **stabile offene Kette**:

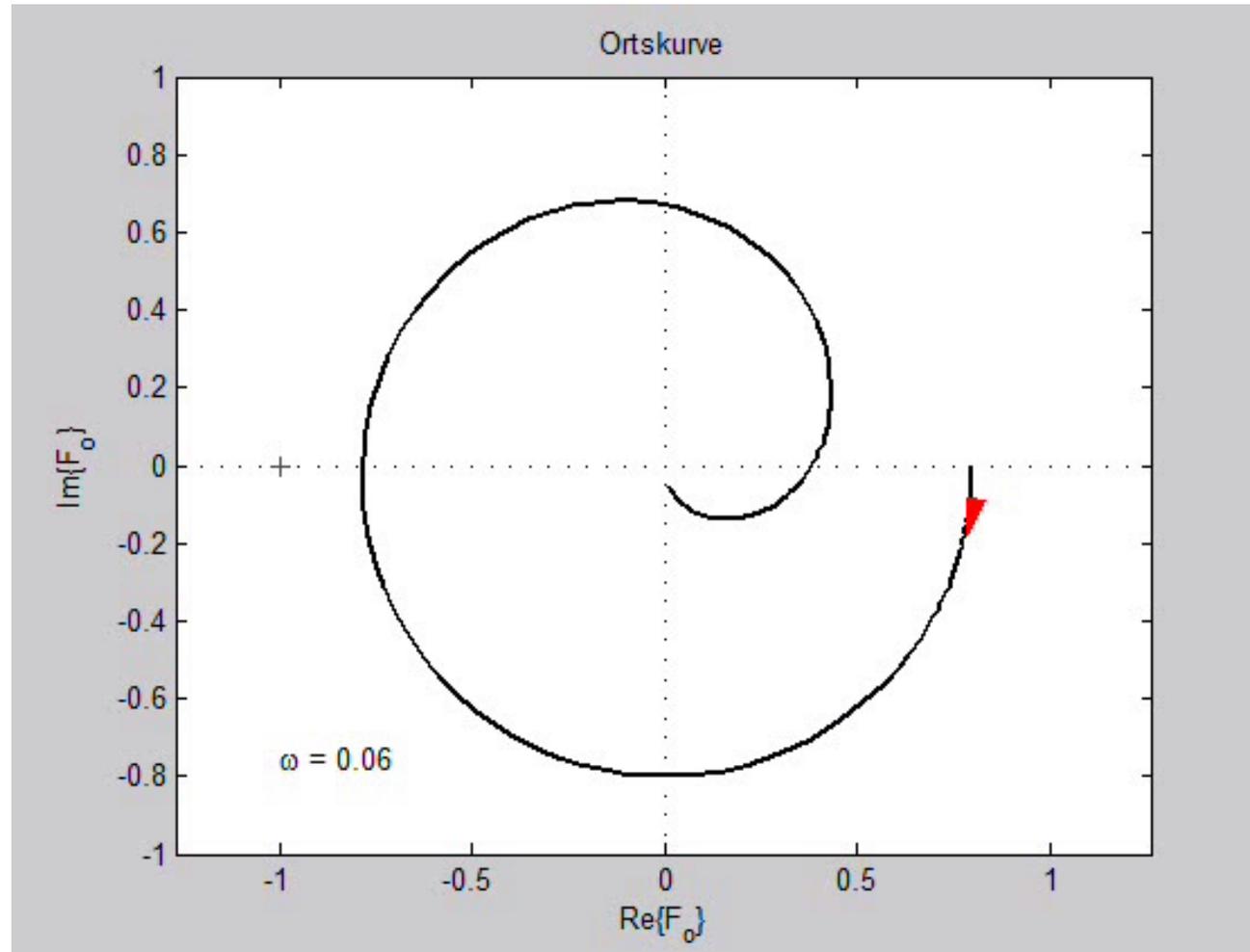
Der geschlossene Kreis ist genau dann **stabil, wenn** die Ortskurve $F_o(j\omega)$ (von $\omega = 0$ nach $\omega \rightarrow \infty$) **den kritischen Punkt $P_k = -1 + j0$ weder umkreist noch umschließt** („sie ihn links liegen lässt“).

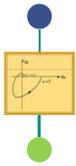


3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

■ Beispiel: stabiles System $F_o(s) = \frac{2 \cdot (s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2+j)(s+2-j)}$





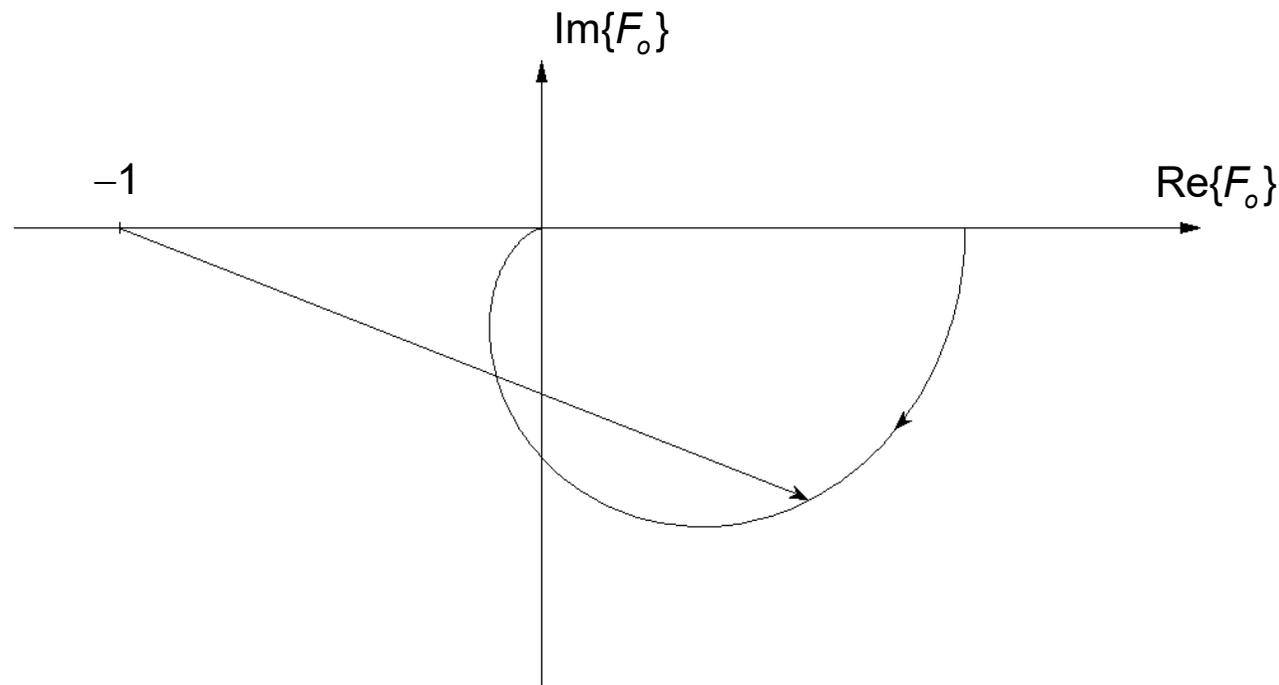
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

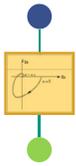
3.6.1 Nyquistkriterium in Ortskurvendarstellung

- Für ein stabiles offenes System gilt also tatsächlich:

Die Netto-Winkeländerung des Fahrstrahls von -1 auf die Ortskurve ist Null

- Dies bedeutet offensichtlich, dass die Ortskurve den Punkt -1 nicht umwickelt:

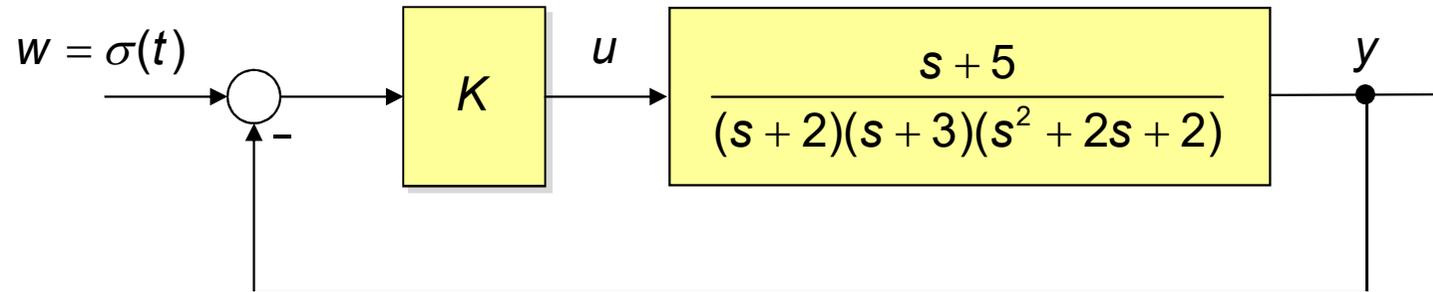




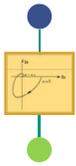
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.1 PC-Demo: Nyquistkriterium

- Beispiel 1: spezielles Nyquist-Kriterium:



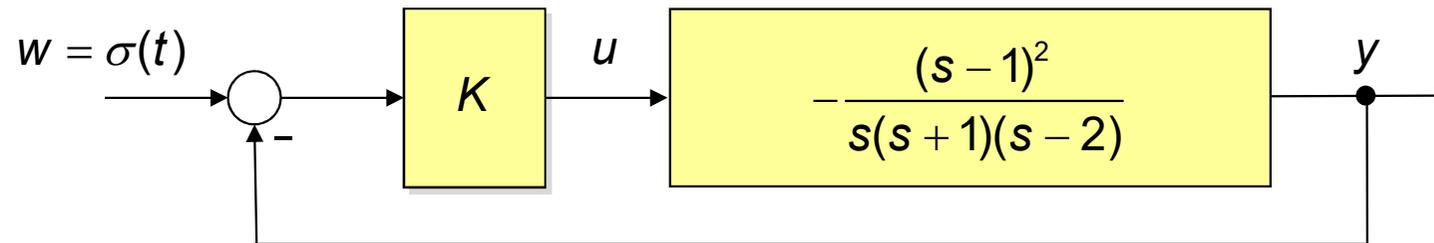
PC-Demo 3: Nyquistkriterium

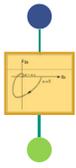


3.6 Graphische Stabilitätskriterien

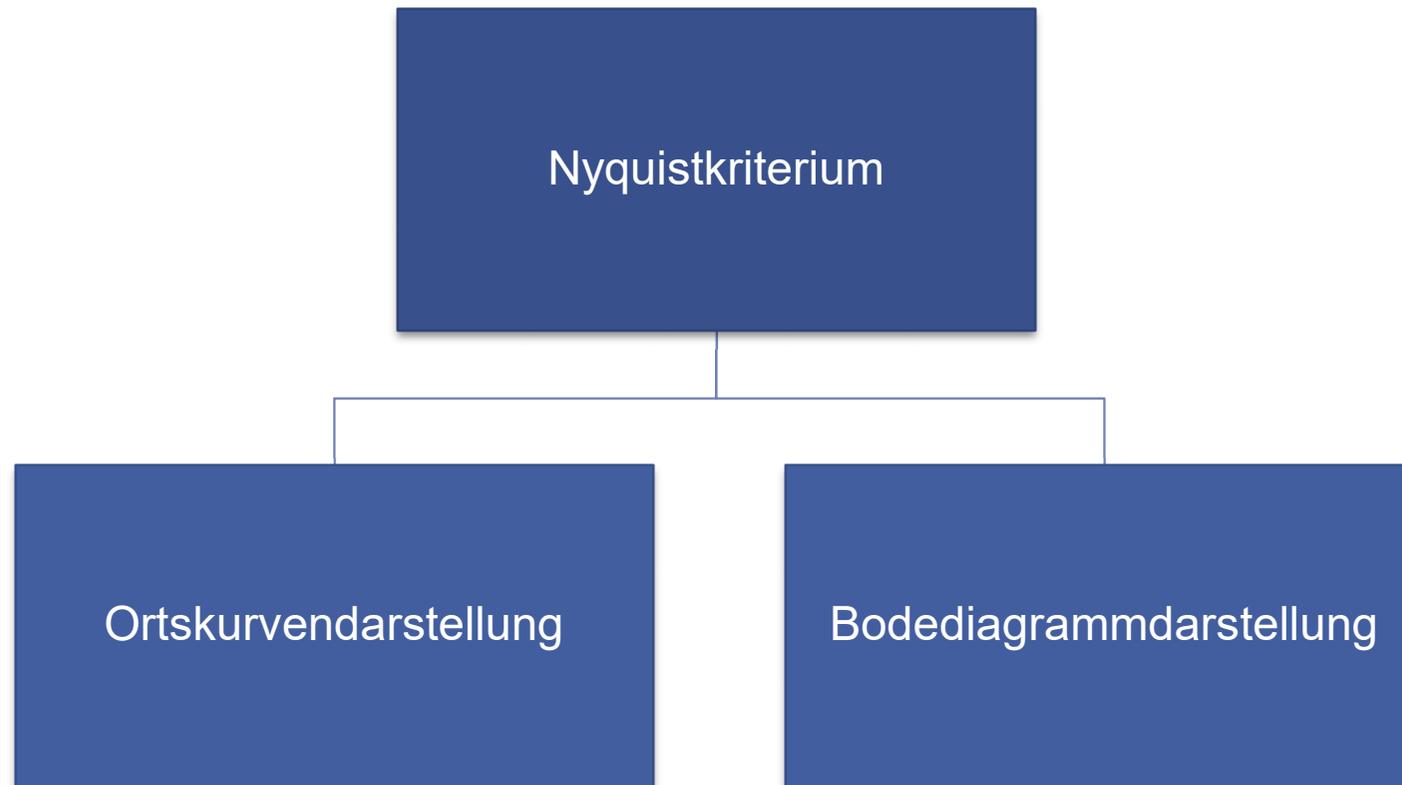
3.6.1 PC-Demo: Nyquistkriterium (2)

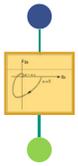
- Beispiel 2: allgemeines Nyquist-Kriterium (spezielles Nyquist-Kriterium nicht anwendbar):





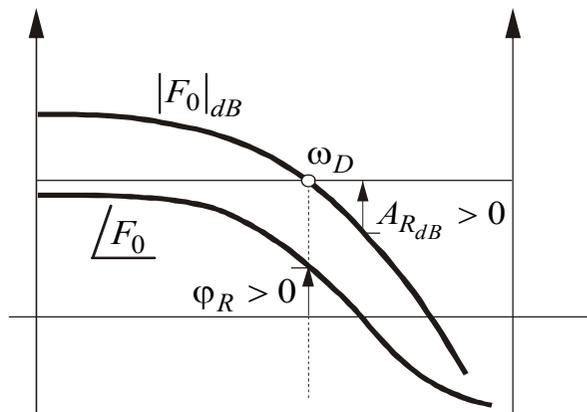
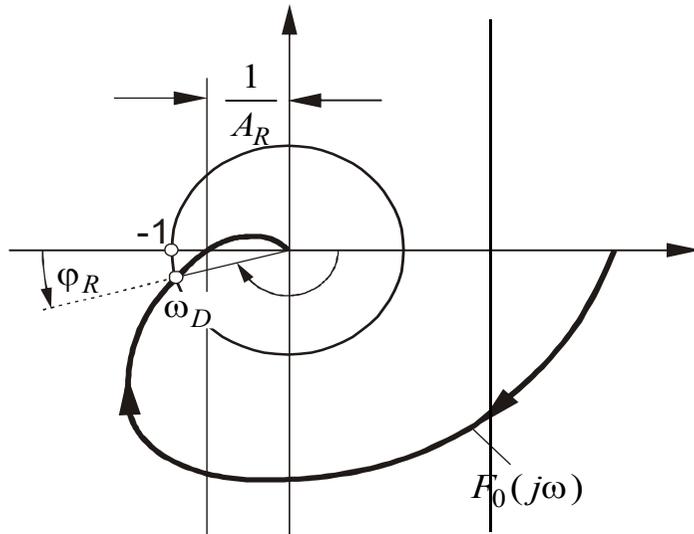
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

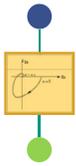




3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.2 Spezielles Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung





3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.2 Spezielles Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (2)

■ Voraussetzungen für das **spezielle Nyquistkriterium** in Frequenzkennlinienform:

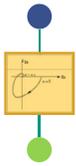
- $$F_o(s) = \frac{K}{s^q} \frac{1 + \dots}{1 + \dots} e^{-T_t s} = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} e^{-T_t s}, \quad T_t \geq 0$$

sei die Übertragungsfunktion des offenen Kreises mit $K > 0$;

$q = 0, 1, 2$ und $\text{Grad}(Z_o(s)) < \text{Grad}(N_o(s))$

$Z_o(s), N_o(s)$ teilerfremd

- Bis auf **maximal zwei Pole im Ursprung** liegen **alle Pole von $F_o(s)$ links** der imaginären Achse der komplexen Ebene und die Betragskennlinie $|F_o(j\omega)|_{dB}$ gehe **genau einmal** durch 0 dB.
- Für $|F_o(j\omega)|_{dB} \geq 0$ gelte $-540^\circ < \angle F_o(j\omega) < 180^\circ$.



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.2 Spezielles Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (3)

Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung für eine stabile offene Kette:

Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn $F_o(j\omega)$ für die Durchtrittsfrequenz ω_D d.h. bei $|F_o(j\omega)|_{dB} = 0$, den Phasenwinkel $\varphi_D(\omega_D) = \arg\{F_o(j\omega_D)\} > -180^\circ$ hat.

Das ist gleichbedeutend damit, dass der **Phasenrand** $\varphi_R > 0$ bzw. der **Amplitudenrand** $A_R > 1$ ist.

- Dabei gelten folgende Definitionen:

Def.: **Phasenrand (Phasenreserve):**

Der Phasenrand φ_R ist der auf -180° bezogene Phasenwinkel von $F_o(j\omega)$ für die Durchtrittsfrequenz ω_D .

Def.: **Amplitudenrand (Amplitudenreserve):**

Der Amplitudenrand A_R ist die zusätzliche Verstärkung des offenen Kreises, die den geschlossenen Kreis an die Stabilitätsgrenze bringt, d.h. $|F_o(j\omega)|_{\varphi=-180^\circ} \cdot A_R = 1$.

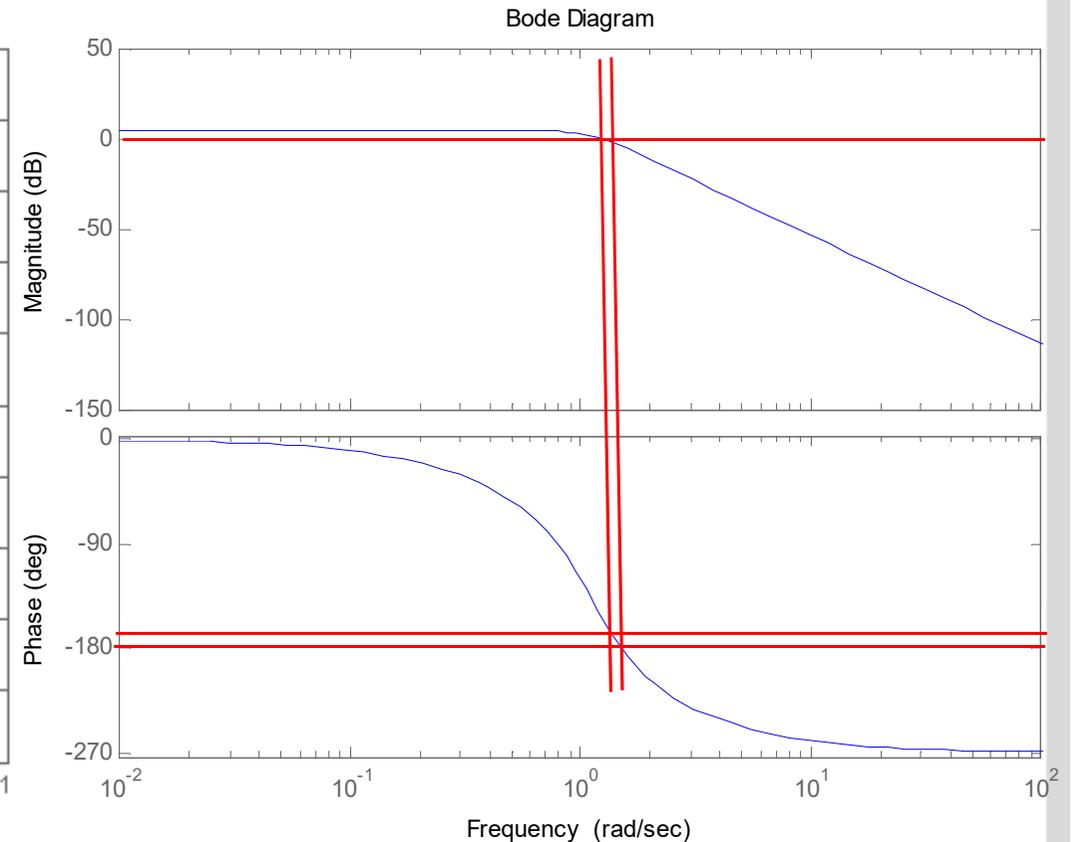
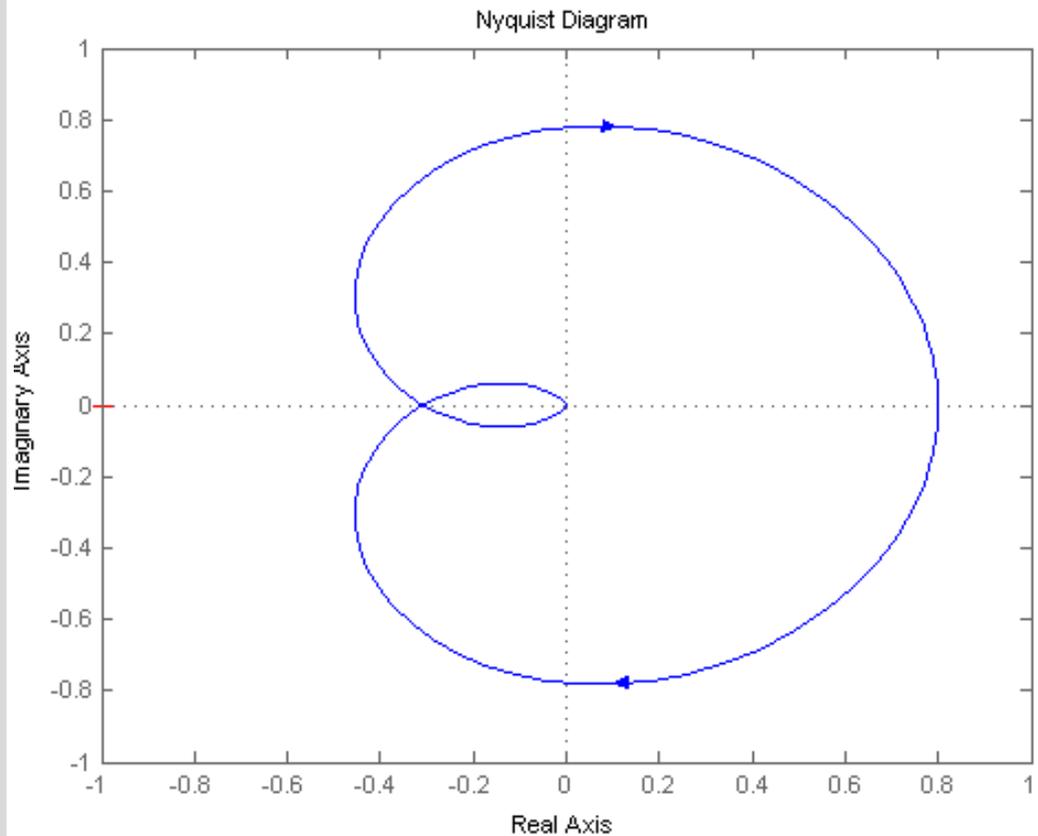


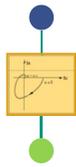
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.3 Bsp: Anwendung des Nyquist-Kriteriums

■ Beispiel für ein stabiles System

$$F_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0,5-j)(s+0,5+j)}$$



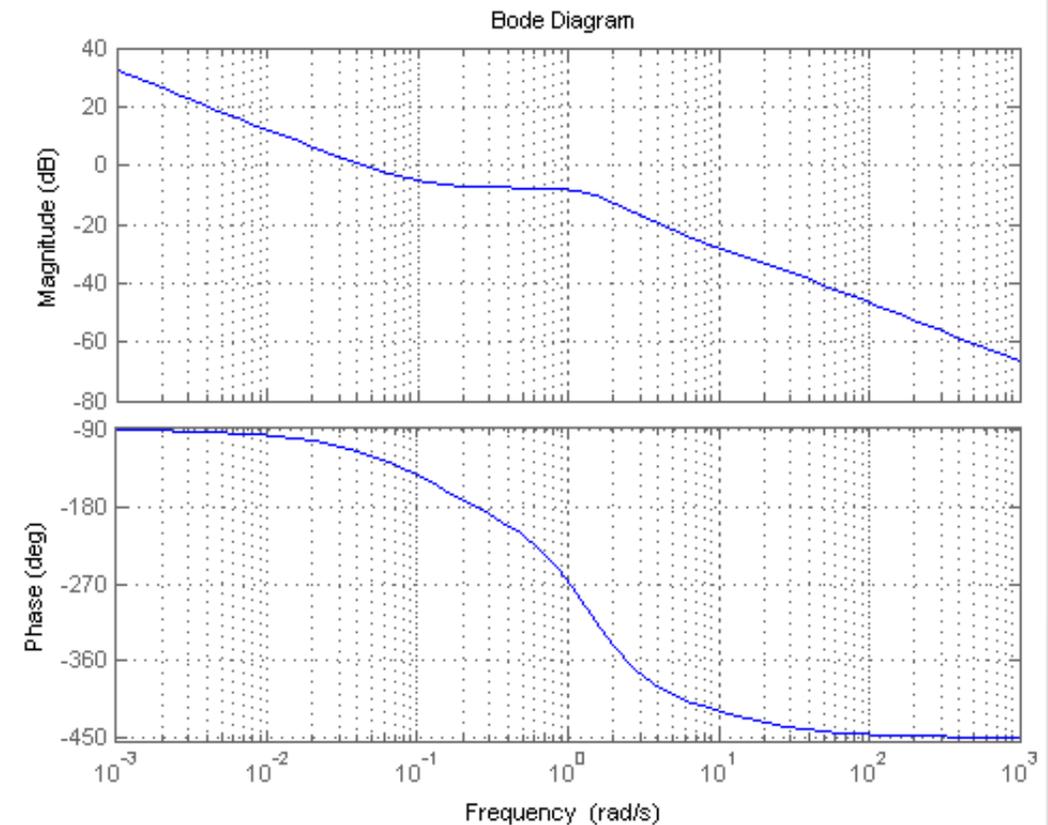
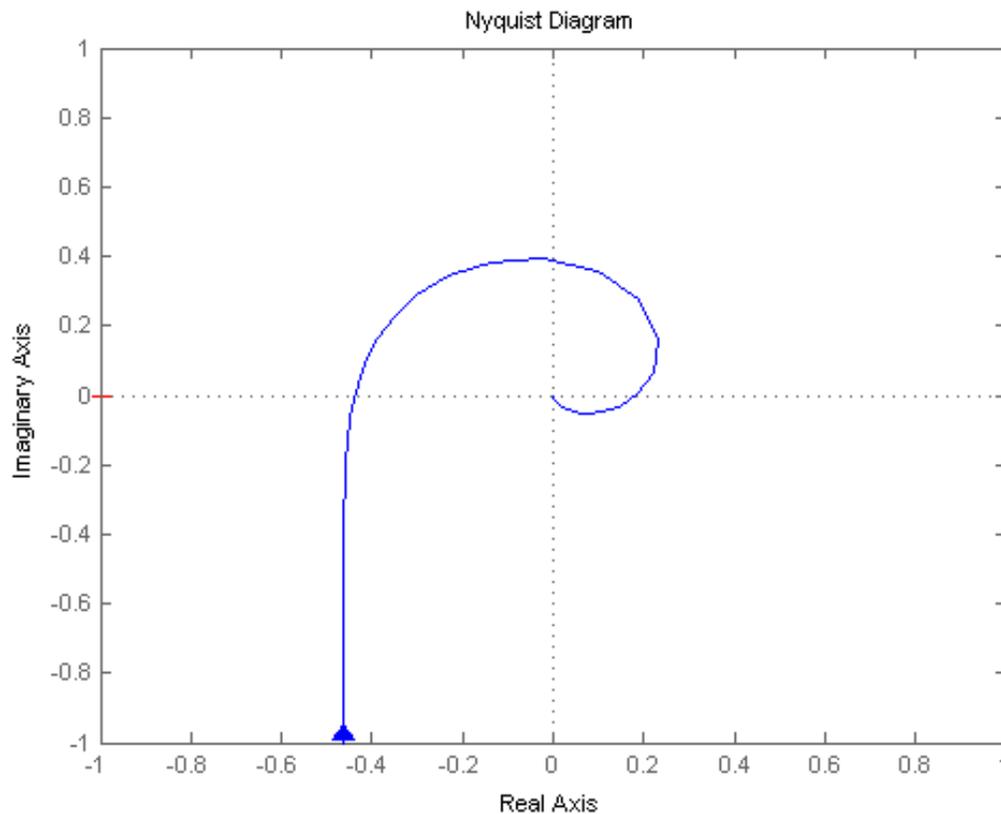


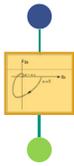
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.3 Bsp: Anwendung des Nyquist-Kriteriums (2)

- Beispiel für ein kompliziertes, nichtminimalphasiges System

$$F_o(s) = 0.5 \frac{(s - 0.1)(s - 2)(s + 5 - j)(s + 5 + j)}{s(s + 10)(s + 3)(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$



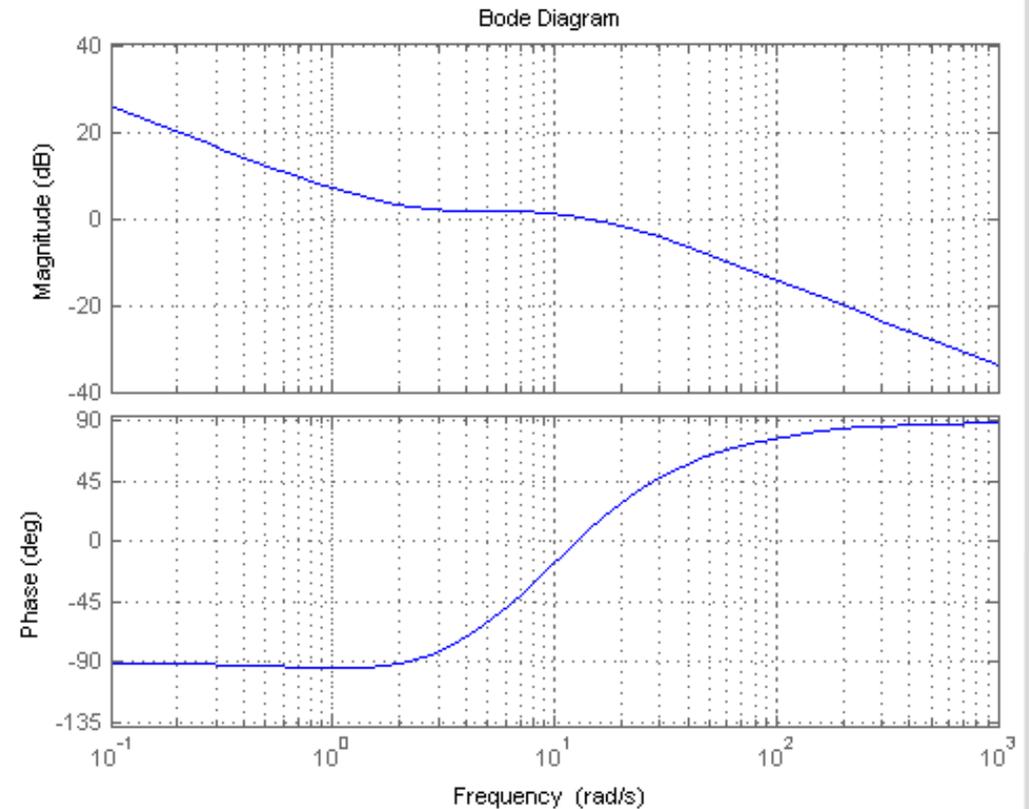
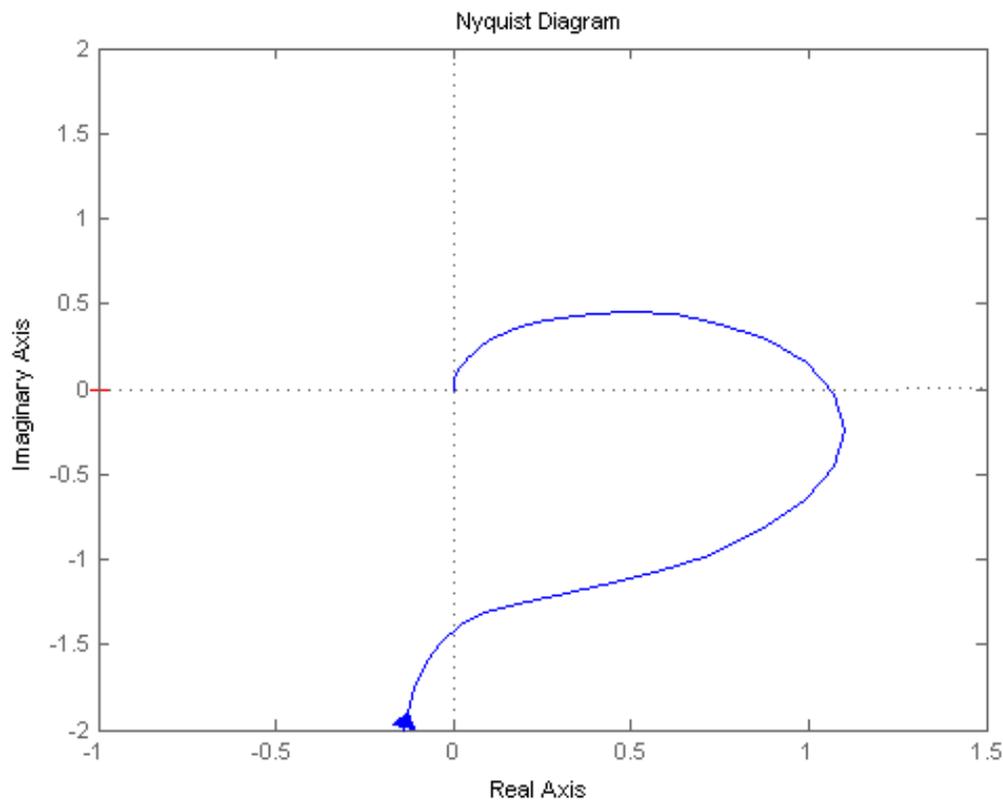


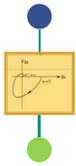
3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.3 Bsp: Anwendung des Nyquist-Kriteriums (3)

■ Beispiel für ein instabiles System

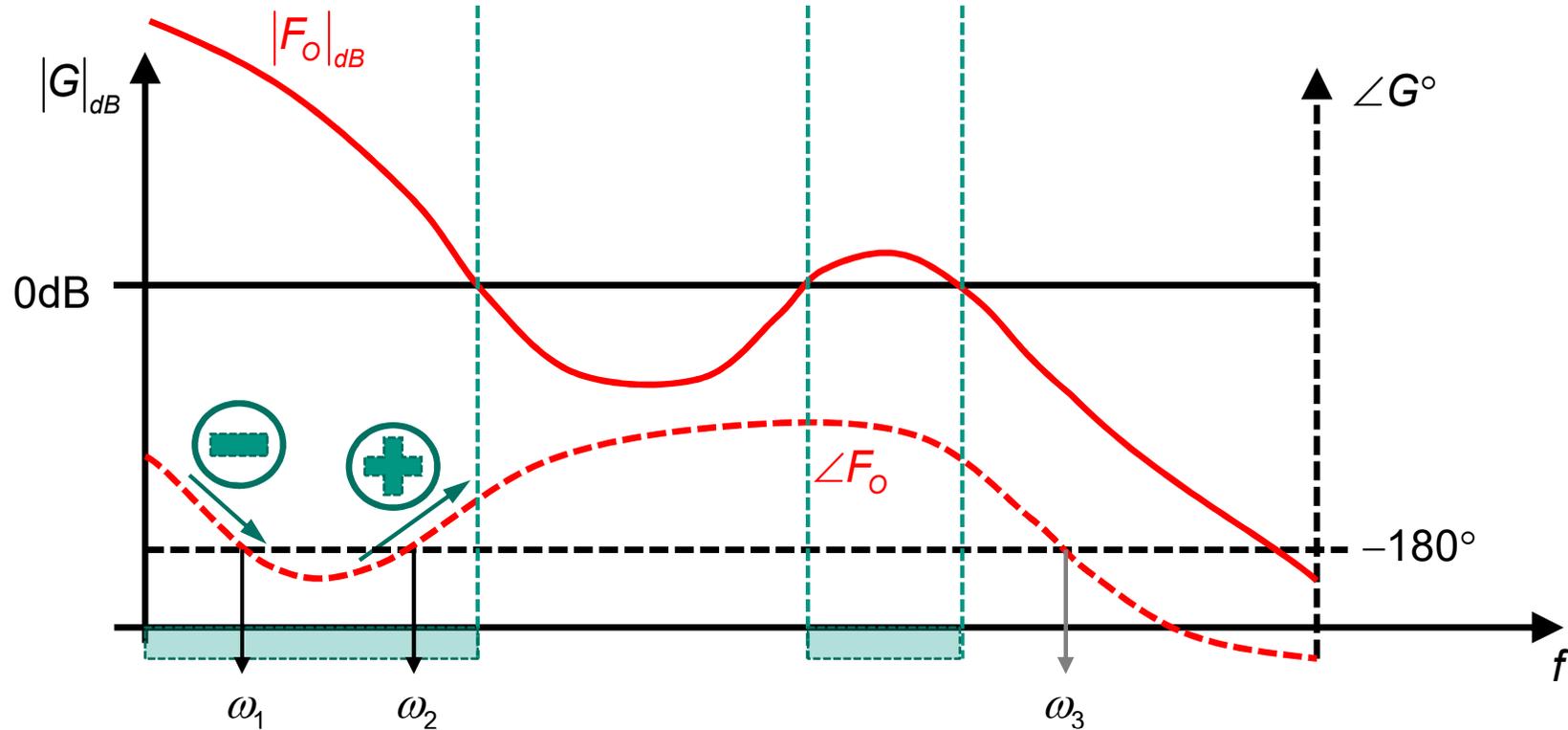
$$F_o(s) = \frac{-20(s+5)(s-2)}{s(s-10-j)(s-10+j)}$$





3.6 Graphische Stabilitätskriterien

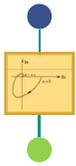
3.6.4 Allgemeines Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung



Def.: **positive (negative) Schnitte:**

Ein positiver (negativer) Schnitt liegt vor, wenn $|F_0|_{dB} > 0$ und die Phase $\angle F_0$ die -180° -Linie mit steigender (fallender) Tangente schneidet.

Bei Systemen mit I^2 -Verhalten (beginnen bei -180°) zählt der Startpunkt als halber Schnitt



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.4 Allgemeines Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (2)

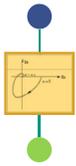
- Voraussetzung für das allgemeine Nyquistkriterium in Frequenzkennlinienform:

$$F_o(s) = \frac{K}{s^q} \frac{1 + \dots}{1 + \dots} e^{-T_t s} = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} e^{-T_t s}$$

sei die Übertragungsfunktion des offenen Kreises mit

$$K > 0; \quad q = 0, 1, 2 \quad \text{und} \quad \text{Grad}(Z_o(s)) < \text{Grad}(N_o(s))$$

Bis auf maximal zwei Pole im Ursprung liegen alle Pole von $F_o(s)$ links oder rechts der imaginären Achse (jedoch nicht auf ihr)



3.6 Graphische Stabilitätskriterien

3.6.4 Allgemeines Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung (3)

Das **allgemeine Nyquistkriterium** in Frequenzkennlinienform:

Der Regelkreis unter den Voraussetzungen ist stabil, wenn:

1. Für $|F_o(j\omega)|_{dB} = 0$ niemals $\angle F_o(j\omega) = (2\nu + 1)180^\circ$ mit ν ganzzahlig
2. Die Differenz der Anzahl positiver und negativer Schnittpunkte

$$\frac{r_o}{2} \quad \text{falls } q = 0, 1,$$

$$\frac{r_o + 1}{2} \quad \text{falls } q = 2,$$

wobei r_o die Anzahl der Pole der offenen Kette rechts der imaginären Achse bezeichnet.

Andernfalls ist er instabil !

⇒ Der Regelkreis ist sicher instabil, wenn die Anzahl der instabilen Pole des offenen Kreises eine ungerade Zahl ist.