

# Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

## Vorlesung: Systemdynamik und Regelungstechnik

### Kapitel 6

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann



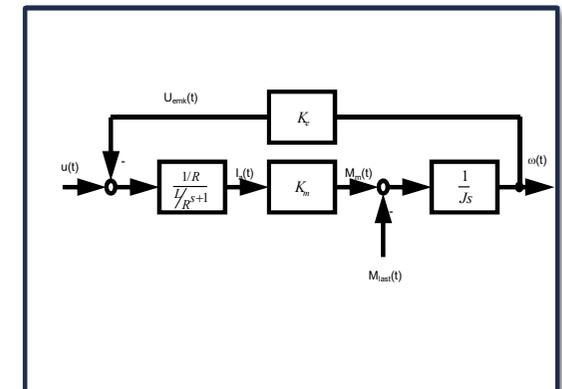
## 1. Einführung

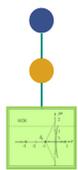
1. Motivation
2. Übersicht
3. Begriffsbildung und Modellierung
4. Steuerung und Regelung
5. Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



## 2. Klassifizierung und Beschreibung von linearen Regelkreisen

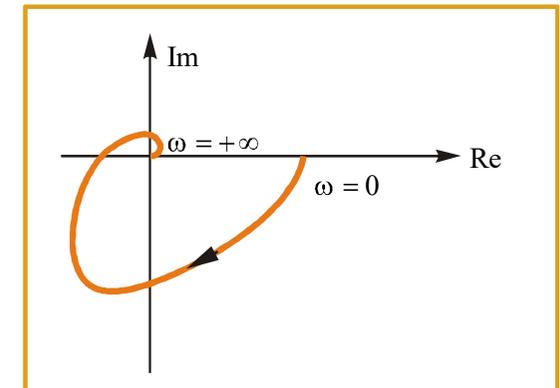
1. Einführung und Grundbegriffe
2. Das Signalflussbild
3. Verhalten elementarer zeitkont. Regelkreisglieder
4. Standardregelkreis und Signalflussbildumformungen
5. Aufbau digitaler Regelkreise
6. Beschreibung digitaler Regelkreise





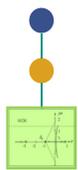
### 3. Analyse von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten und charakteristische Größen
2. Frequenzgang und Ortskurve
3. Frequenzkennlinie
4. Grundlagen zur Stabilität
5. Algebraische Stabilitätskriterien
6. Graphische Stabilitätskriterien



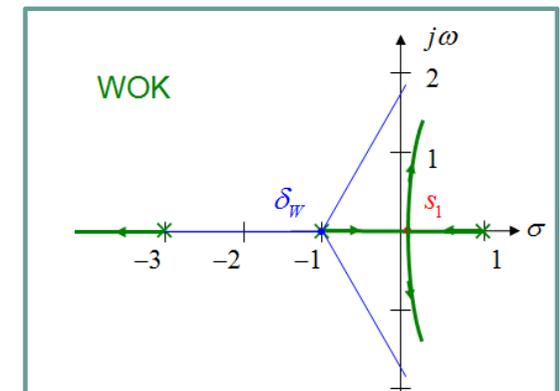
### 4. Analyse von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Stationäres Verhalten
2. Frequenzgang, Ortskurve und Frequenzkennlinie
3. Grundlagen zur Stabilität
4. Algebraische Stabilitätskriterien
5. Graphische Stabilitätskriterien



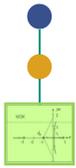
### 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



### 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

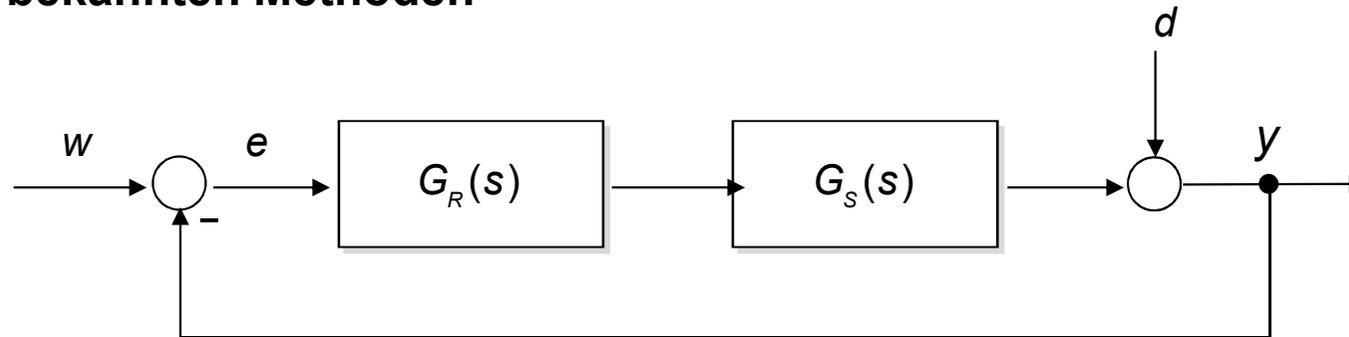
1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



# 6.1 Fast Sampling Design

## 6.1.1 Idee des Verfahrens

1) Entwurf des Reglers im Zeitkontinuierlichen für den zeitkontinuierlichen Regelkreis mit den bekannten Methoden



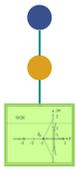
Ergebnis  $G_R(s)$

2) direkte Übertragung des zeitkontinuierlichen Reglers durch Zeitdiskretisierung

$$G_R(s) \xrightarrow{\hspace{2cm}} G_{Rz}(z)$$

### Verfahren

- Euler- und Tustin-Approximation
- (Weitere Simulationsverfahren)
- Zeitdiskretisierung durch Z-Transformation
- (Pol-Nullstellen-Abbildung)



# 6.1 Fast Sampling Design

## 6.1.2 Euler-Approximation

- **Prinzip:** Ermittlung der Z-ÜF des Reglers durch Approximation der Grundoperationen Integration bzw. Differentiation.
- Ausgangspunkt:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t)$$

$$\int_{y(k-1)}^{y(k)} dy = \int_{(k-1)T}^{kT} f(\tau) d\tau$$

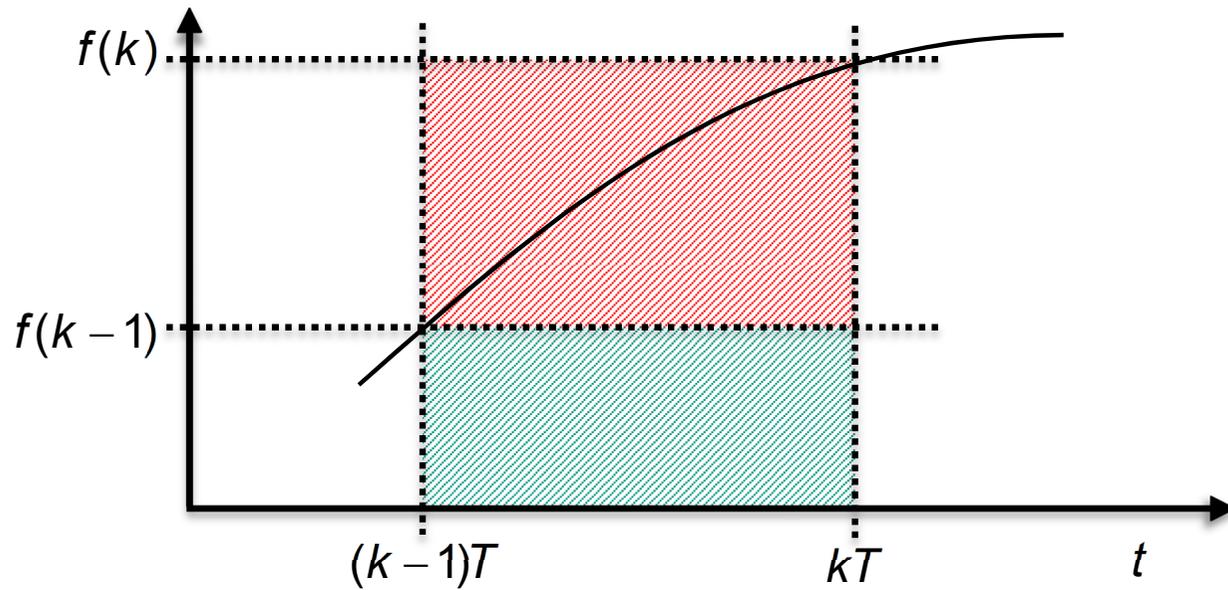
$$y(k) = y(k-1) + \underbrace{\int_{(k-1)T}^{kT} f(\tau) d\tau}$$



# 6.1 Fast Sampling Design



## 6.1.2 Euler-Approximation (2)



damit

$$y_k = y_{k-1} + Tf(k-1)$$

$$y_k = y_{k-1} + Tf(k)$$

$$Y_z(z) = z^{-1}Y_z(z) + Tz^{-1}F_z(z)$$

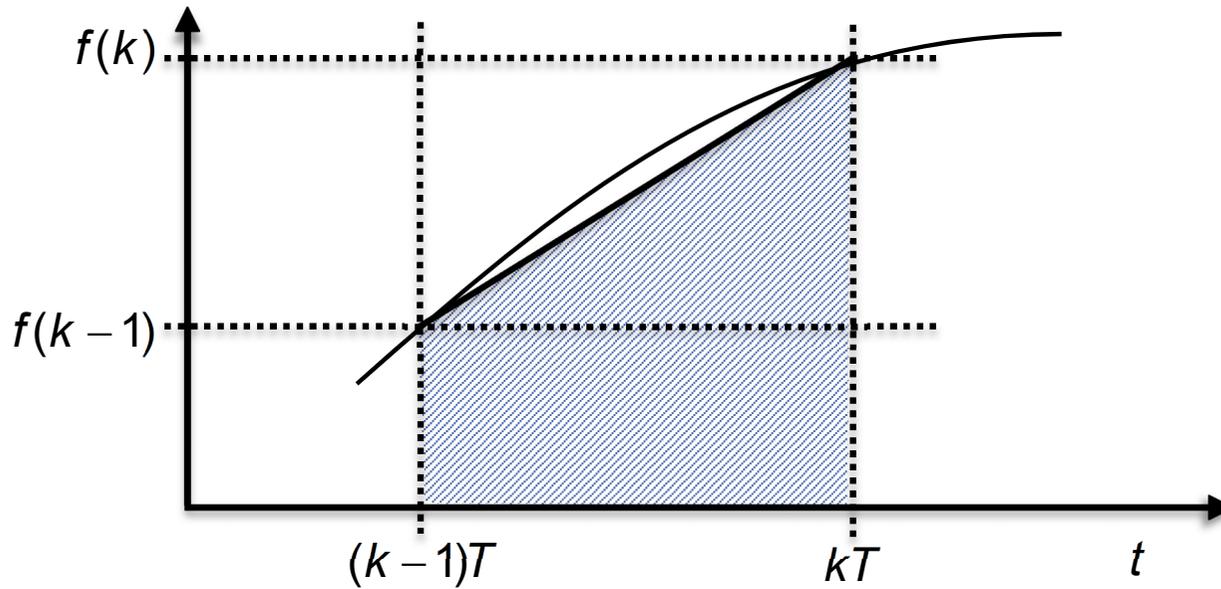
$$\frac{Y_z(z)}{F_z(z)} = T \frac{1}{z-1}$$

„Merkregel“



## 6.1 Fast Sampling Design

### 6.1.3 Tustin-Approximation



damit

$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}T(f(k) + f(k-1))$$

$$Y_z(z) = z^{-1}Y_z(z) + \frac{1}{2}T(F_z(z) + z^{-1}F_z(z)) \quad \frac{Y_z(z)}{F_z(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

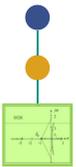
„Merkregel“



# Tafelanschrieb 6.1 (1)

## Beispiel PID-Regler

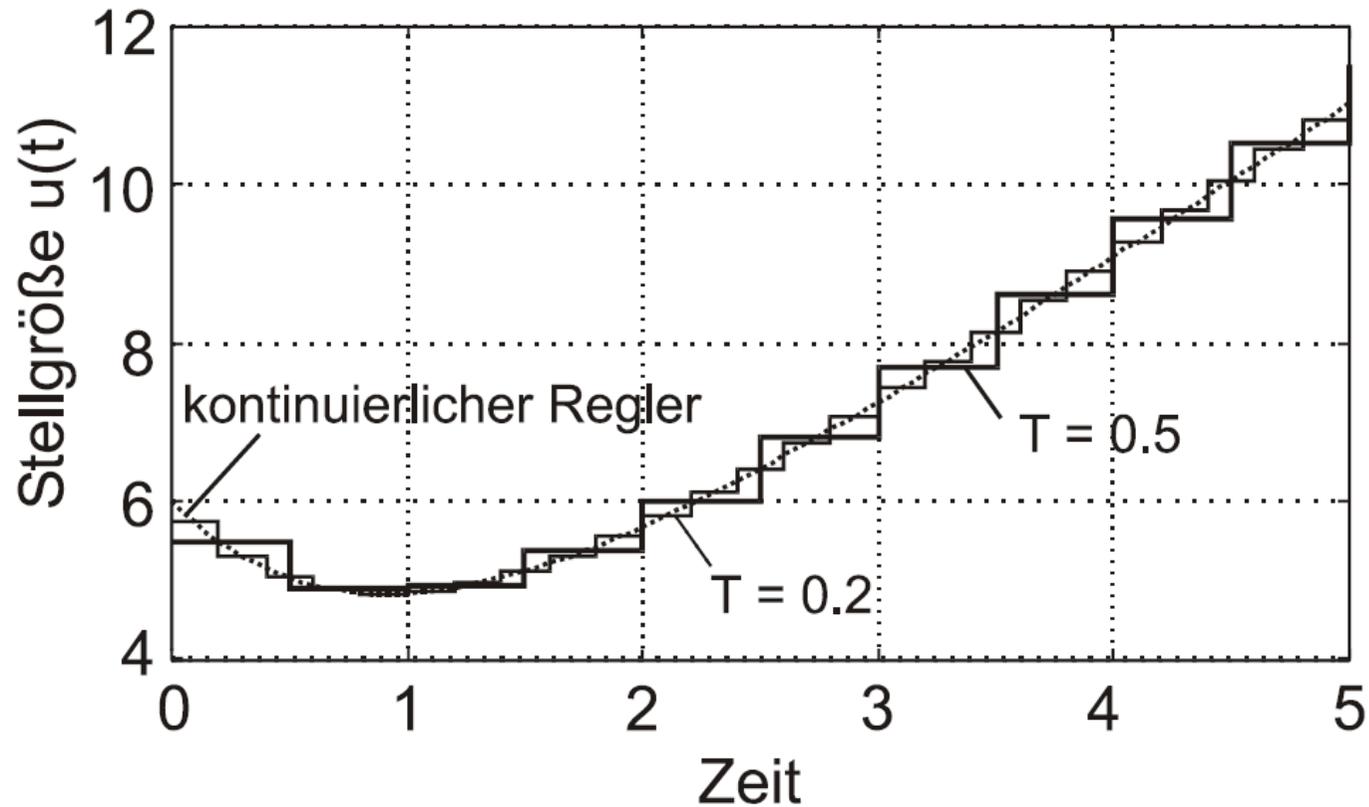


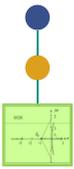


## 6.1 Fast Sampling Design

### 6.1.3 Tustin-Approximation: Beispiel

### Sprungantworten des Tustin-approximierten Reglers

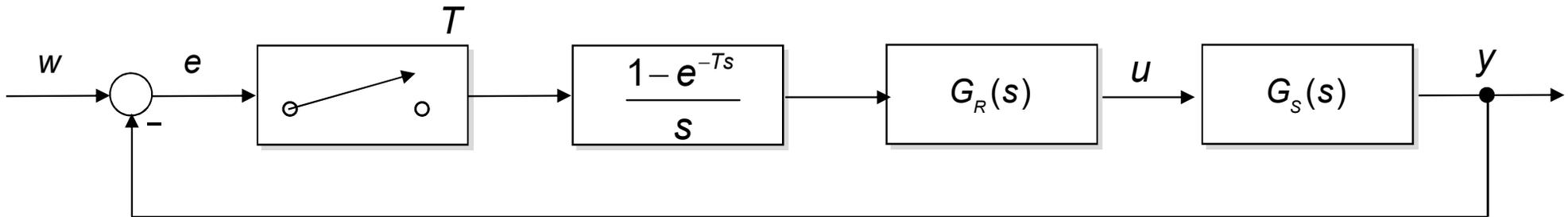
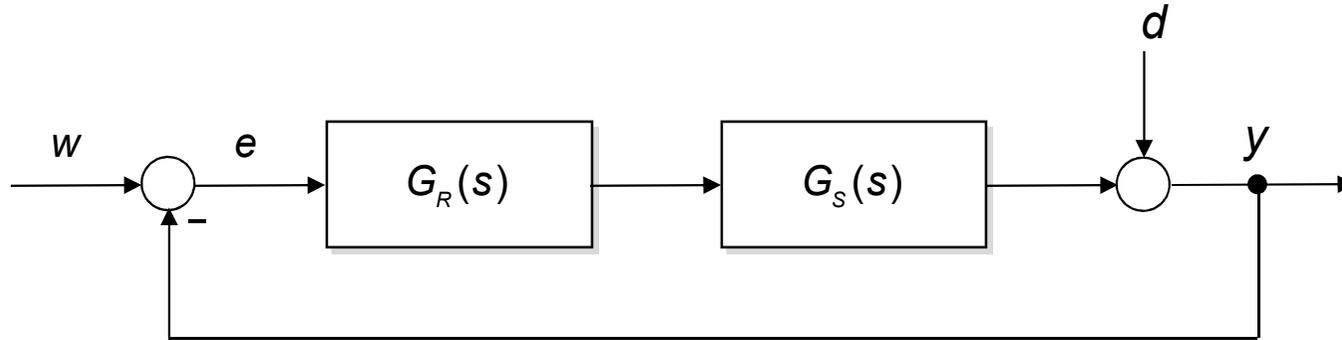




# 6.1 Fast Sampling Design

## 6.1.4 Anwendung der Z-Transformation

Grundidee: Zeitdiskrete Betrachtung des geregelten Systems



$$U_z(z) = \mathfrak{L} \left\{ G_R(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right\} E_z(z)$$

### Approximationsvorschrift

$$G_{Rz}(z) = \frac{z-1}{z} \mathfrak{L} \left\{ \frac{G_R(s)}{s} \right\}$$

# Tafelanschrieb 6.1 (2)

## Beispiel PID-Regler

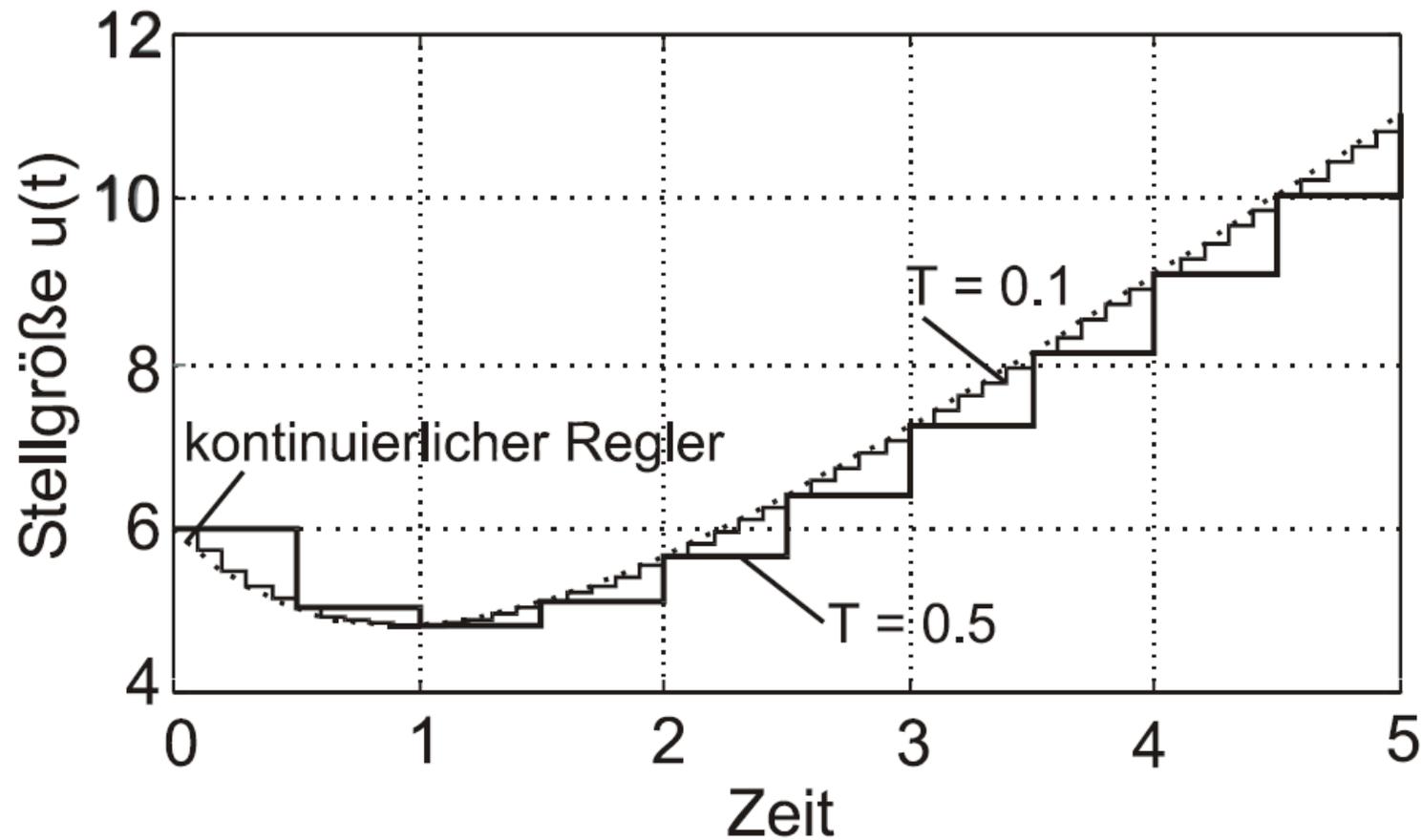


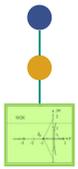


## 6.1 Fast Sampling Design

### 6.1.4 Z-Trafo-Approximation: Beispiel

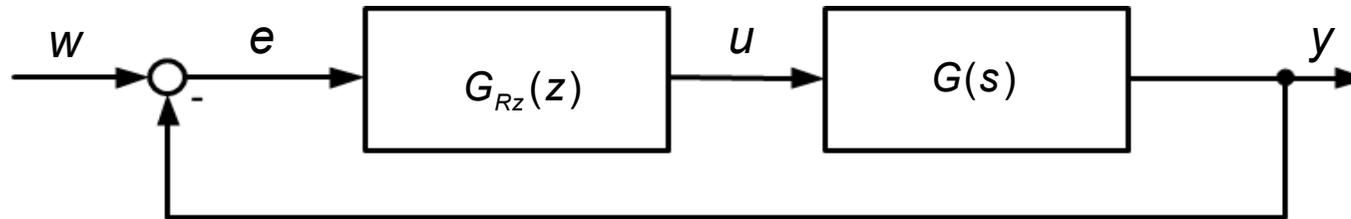
## Sprungantworten des z-Transformierten Reglers





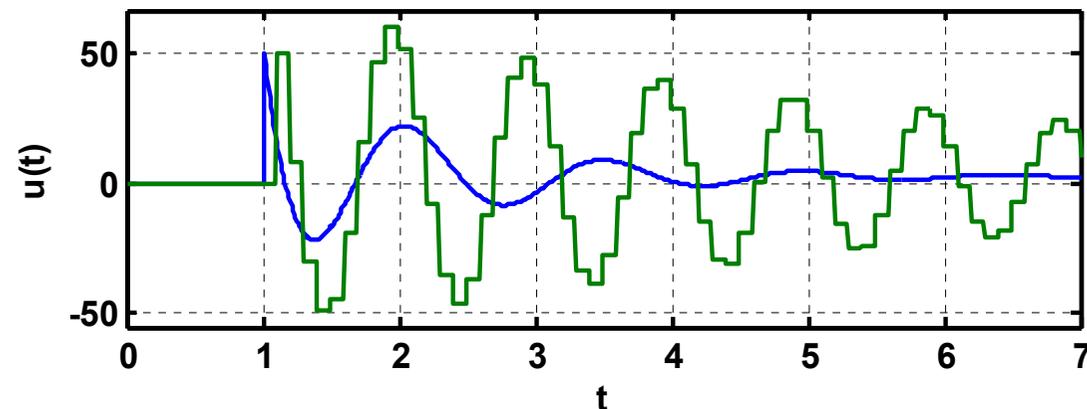
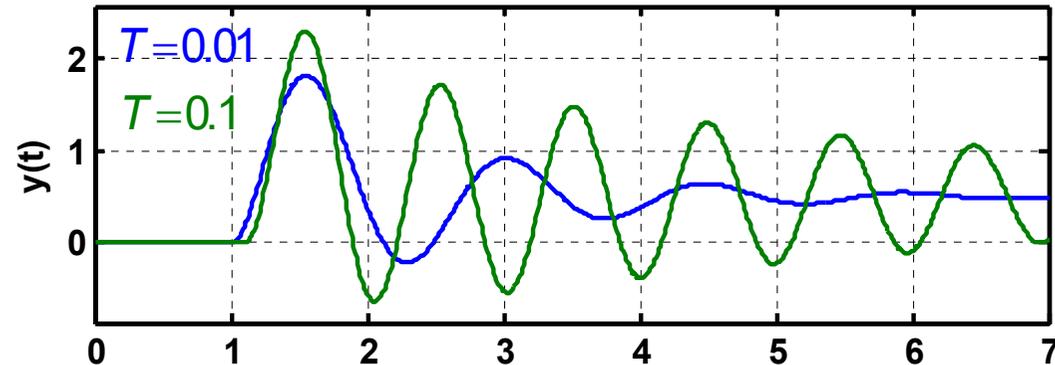
# 6.1 Fast Sampling Design

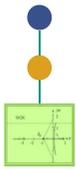
## 6.1.4 Randbedingungen



$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 5}$$

$$G_R(s) = 50 \frac{s + 1}{s + 10}$$





# 6.1 Fast Sampling Design

## 6.1.4 Randbedingungen (2)

### Offensichtlich:

- Güte der Regelung stark abhängig von Abtastzeit
- Je kleiner T, desto besser

### Wahl der Abtastzeit:

- Abtasttheorem von Shannon:  $f > 2 \cdot f_{\max}$

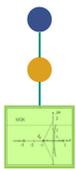
mit  $f_{\max} = \frac{|s_{\max}|}{2\pi}$  (wobei  $|s_{\max}|$  : größter Betrag eines **Streckenpols**)

folgt:  $\frac{1}{T} = f > 2 \frac{|s_{\max}|}{2\pi} \Rightarrow T < \frac{\pi}{|s_{\max}|}$

- ABER nicht ausreichend, da Strecke kontinuierlich ist

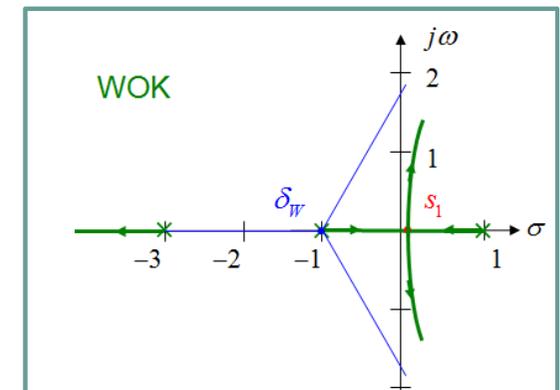
- Faustformel:

$$T < \frac{\pi}{|s_{\max}| \cdot (10 \dots 40)}$$



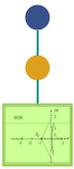
### 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



### 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

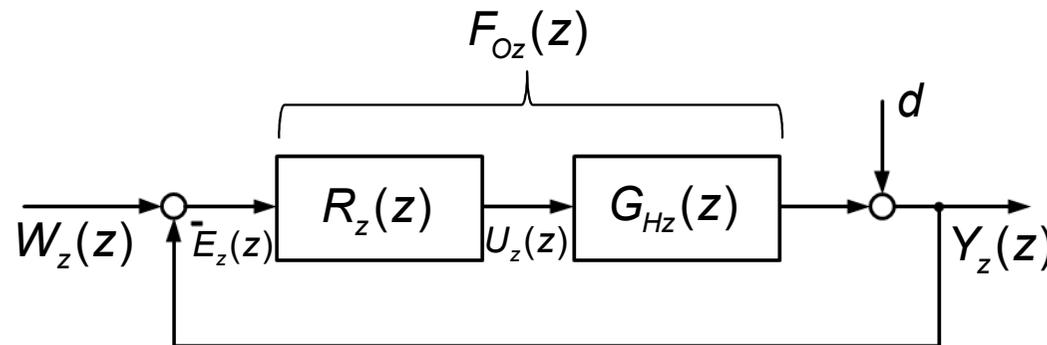
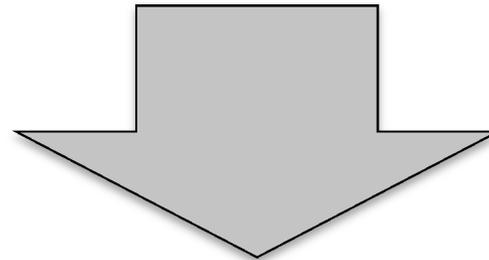
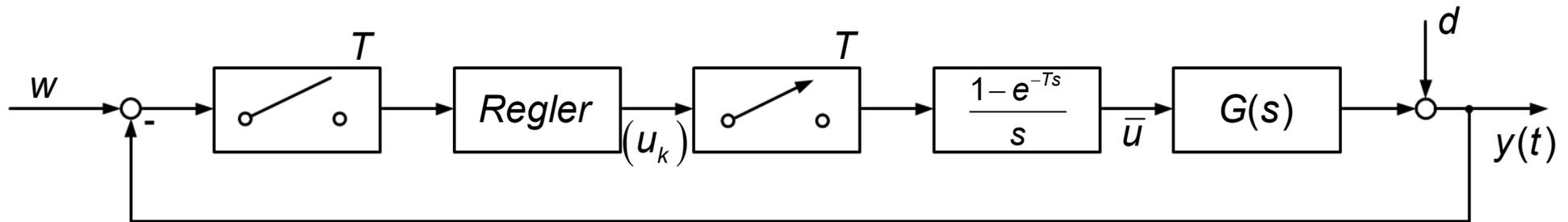
1. Fast Sampling Design
2. **Direkte Verfahren**
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren

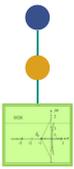


## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.1 Zeitdiskrete Betrachtung der Strecke

**Vorteil:** Bei einer zeitdiskreter Betrachtung der Strecke erfolgt eine in den Abtastzeitpunkten exakte Beschreibung des Systems! D.h. Diese Verfahrensweise eignet sich insbesondere für große Abtastzeiten





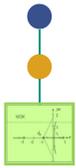
## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.1 Zeitdiskrete Betrachtung der Strecke

#### Faustformel für die Wahl der Abtastzeit

- Notwendige Abtastzeit nach Shannon:  $T < \frac{\pi}{|s_{\max}|}$
- In praktischen Regelkreisen jedoch vorteilhaft (Regelgüte [Isermann: Abtastregelung]):

$$T < \frac{\pi}{|s_{\max}| \cdot 4}$$

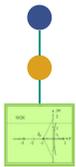


## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.1 Zeitdiskrete Betrachtung der Strecke

#### Vorgehensweise:

- 1) Modellieren der zeitkontinuierlichen Strecke
- 2) Zeitdiskretisieren der zeitkontinuierlichen Strecke
- 3) Berechnen des Reglers auf Basis der zeitdiskretisierten Strecke
- 4) Simulation des zeitdiskreten Reglers am zeitdiskreten System
- 5) Simulation des zeitdiskreten Reglers am zeitkontinuierlichen System
- 6) Betrachtung der Stellgröße in der Simulation



# 6.2 Direkte Verfahren

## 6.2.2 Grundanforderungen (1)

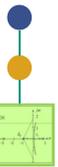
### I. Stabilität

Führungs- und Störsprungantworten müssen für  $t \rightarrow \infty$  einem festen (endlichen) Wert zustreben

⇒ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $1 + F_{oz}(z) = 0$  müssen im Einheitskreis liegen

### II. Stationäre Genauigkeit

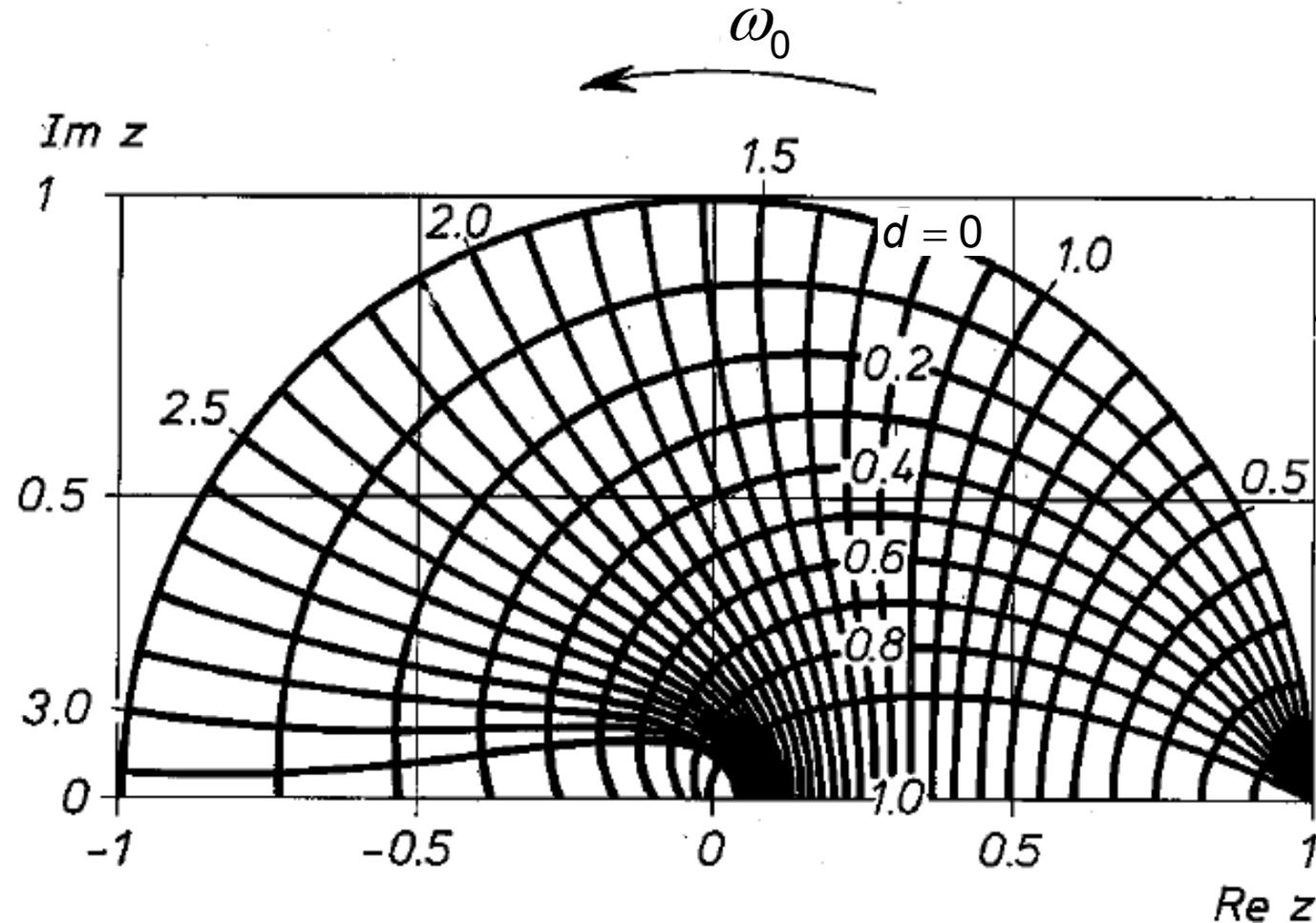
Systemtyp $F_{oz}(z)$		$P$	$I$	$I^2$
		$(q = 0)$	$(q = 1)$	$(q = 2)$
Anregung	$w(t)$			
Sprung	$w_0 \sigma(t)$ $w_0 \frac{z}{z-1}$	$w_0 \frac{1 + \sum_j b_j}{2 + \sum_j b_j + \sum_i a_i}$	0	0
Rampe	$w_1 t \sigma(t)$ $w_1 \frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\infty$	$w_1 T \frac{1 + \sum_j b_j}{1 + \sum_i a_i}$	0
Beschleunigungsfunktion	$\frac{w_2}{2} t^2 \sigma(t)$ $\frac{w_2 T^2}{2} z \frac{z+1}{(z-1)^3}$	$\infty$	$\infty$	$w_2 T^2 \frac{1 + \sum_j b_j}{1 + \sum_i a_i}$



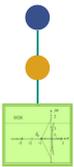
## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Grundanforderungen (2): Dämpfung

$$\frac{1}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$



Linien konstanter Dämpfung bzw. konstanter Eigenfrequenz für zeitdiskrete konjugiert-komplexe Polpaare



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Grundanforderungen (3): Empfindlichkeit

Die Empfindlichkeit ist vergleichbar zum zeitkontinuierlichen Fall definiert zu:

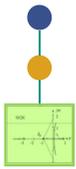
$$S_{G_S}^{G_w}(z) = \frac{E_{mit}(z)}{E_{ohne}(z)} = \frac{1}{1 + F_{Oz}(z)}$$

#### Gleichgewichtstheorem

$$\int_0^{\pi/T} \ln |S_{G_S}^{G_w}(e^{j\omega T})| d\omega = \sum_{i=1}^q \ln |z_{ui}|$$

$z_{ui}$  instabile Polstellen

#### ■ Unterschiede zum zeitkontinuierlichen Fall



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Kompensationsansatz

#### Prinzip:

- Wie im zeitkontinuierlichen: Kompensation des Streckenverhaltens und Vorgabe einer gewünschten Dynamik für das Führungsverhalten

Gegeben sei die Strecke in der Form

$$G_{Hz}(z) = \frac{Q(z)}{N(z)} z^{-d}$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}$$

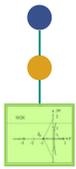
$$N(z) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}$$

Damit ergibt sich der offene Kreis

$$F_{Oz}(z) = G_{Rz}(z)G_{Hz}(z) = G_{Rz}(z) \frac{Q(z)}{N(z)} z^{-d}$$

Und der geschlossene Kreis zu

$$\frac{F_{Oz}(z)}{1 + F_{Oz}(z)} = \frac{G_{Rz}(z)G_{Hz}(z)}{1 + G_{Rz}(z)G_{Hz}(z)}$$



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Kompensationsansatz

Wahl des Reglers so, dass sich Wunschverhalten ergibt

$$\frac{G_{Rz}(z)G_{Hz}(z)}{1 + G_{Rz}(z)G_{Hz}(z)} \stackrel{!}{=} F_{Wz}(z)$$

Damit ergibt sich der Kompensationsregler

$$G_{Rz}(z) = \frac{1}{G_{Hz}(z)} \underbrace{\frac{F_{Wz}(z)}{1 - F_{Wz}(z)}}_{M_z(z)}$$

**Randbedingungen:**

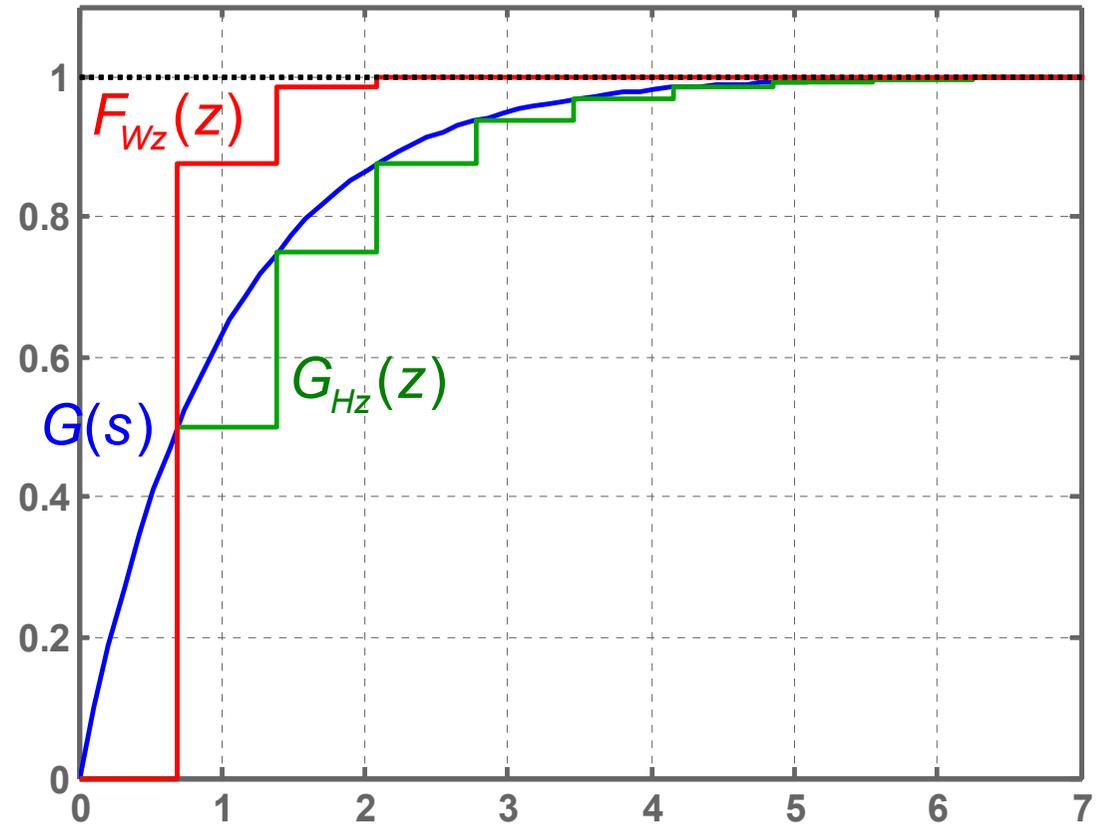
1. Strecke muss stabil sein
2. Die Strecke muss minimalphasig sein (Achtung: für viele zeitdiskrete System nicht der Fall (siehe Analysekapitel))
3. Die Mitkopplung  $M_z(z)$  der Wunschübertragungsfunktion muss stabil sein
4. Für kausalen Regler: Totzeit muss in Wunschübertragungsfunktion enthalten sein



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Kompensationsansatz: Beispiel 1

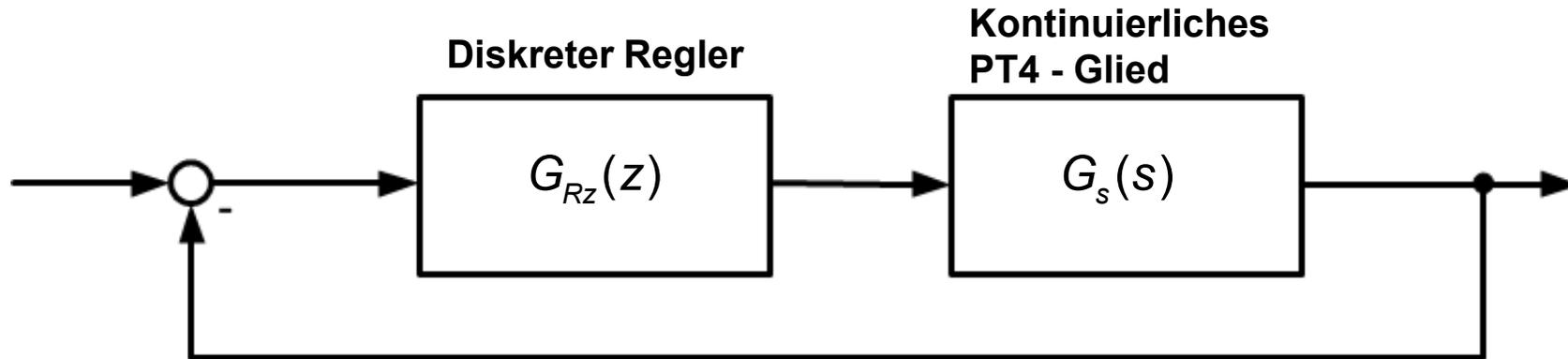
$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad T = \ln(2)$$
$$\Rightarrow G_{Hz}(z) = \frac{1}{2z-1}$$





## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Kompensationsansatz: Beispiel 2



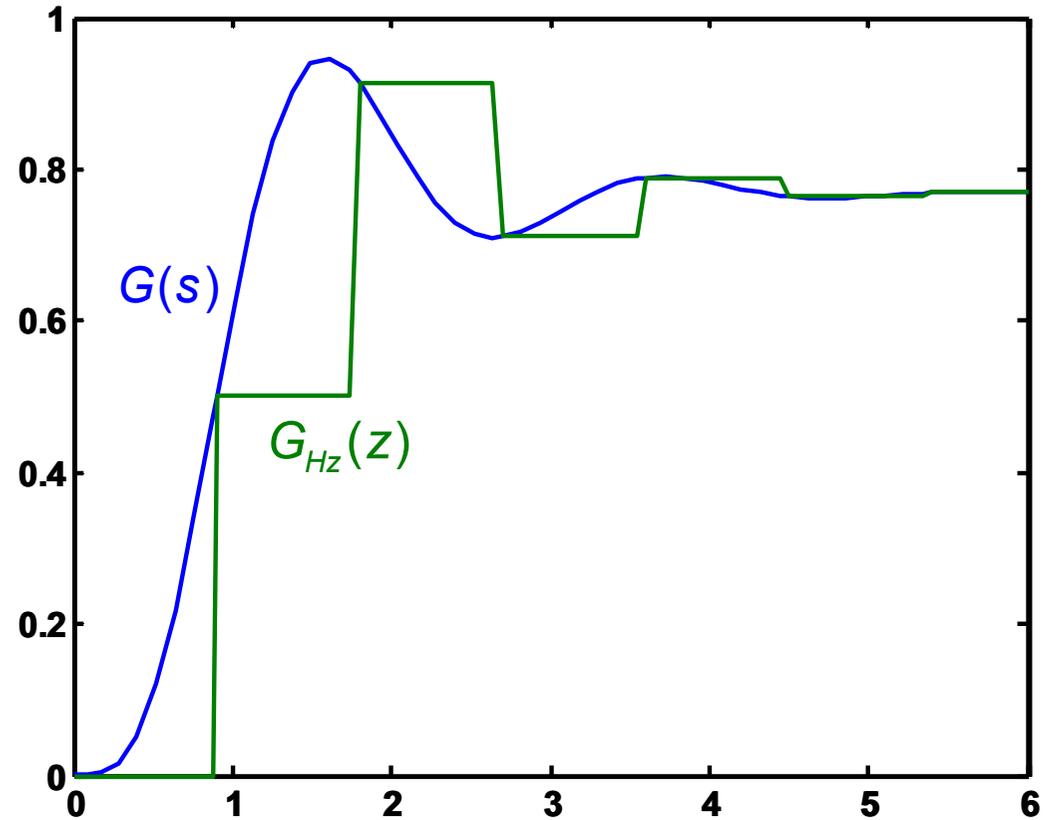
$$G(s) = \frac{100}{(s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 13)} \rightarrow \text{stabil}$$



## 6.2 Direkte Verfahren



### 6.2.2 Kompensationsansatz: Beispiel 2 (2)



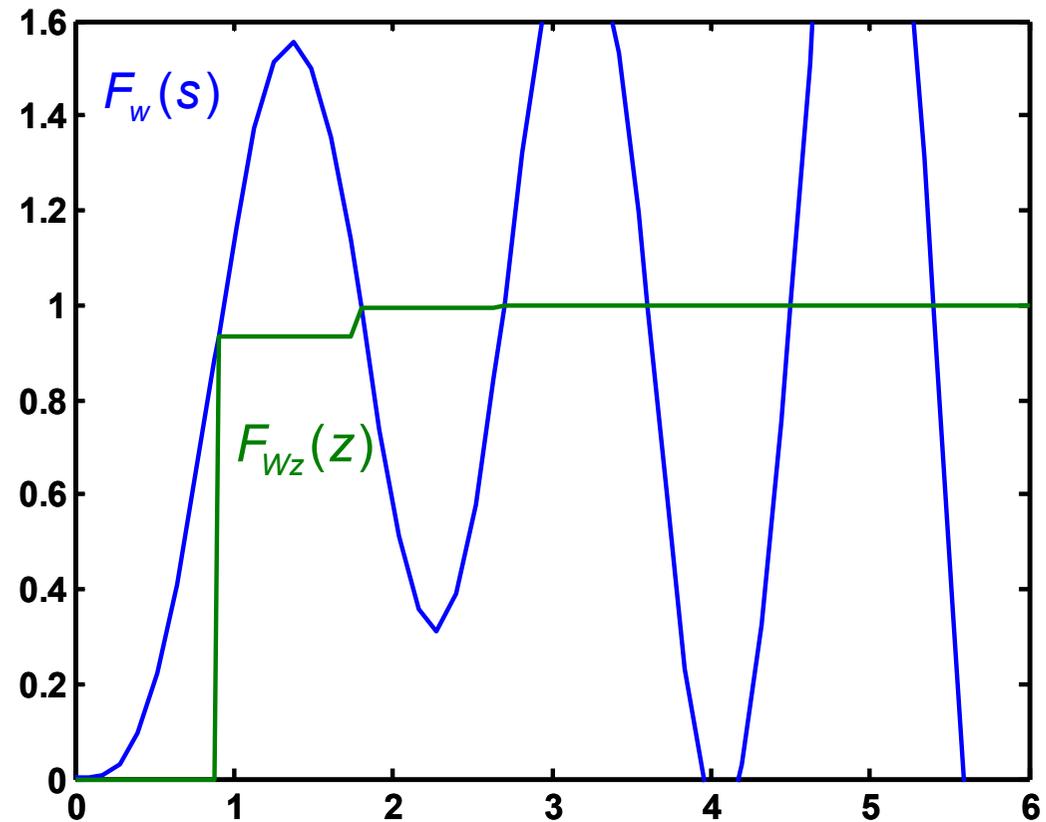
$$G(s) = \frac{100}{(s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 13)}, \quad T = 0,9$$

$$\Rightarrow G_{Hz}(z) = \frac{0,5(z + 1,267)(z + 0,286)(z + 0,036)}{(z^2 + 0,031z + 0,005)(z^2 + 0,375z + 0,165)} \rightarrow \text{nichtminimalphasig}$$



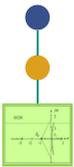
## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Kompensationsansatz: Beispiel 2 (3)



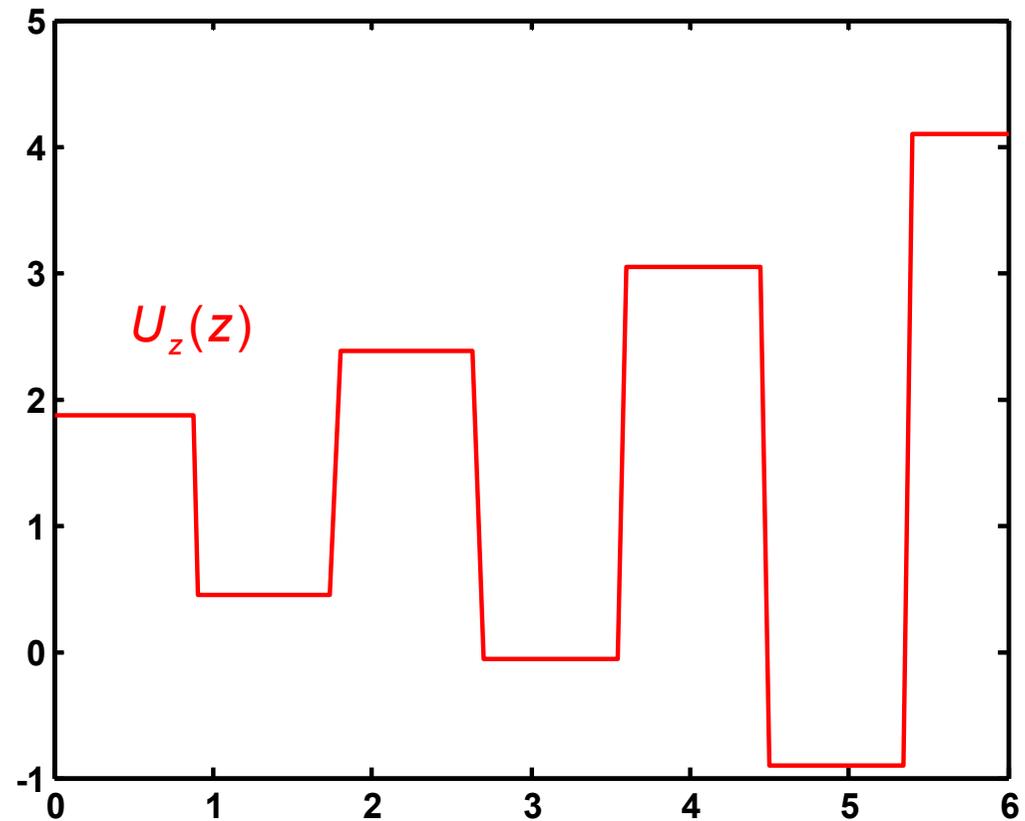
$$F_{Wz}(z) = \frac{0,933}{z - 0,067}$$

$$\Rightarrow R_z(z) = \frac{1}{G_{Hz}(z)} \frac{F_{Wz}(z)}{1 - F_{Wz}(z)} = \frac{1,863(z^2 + 0,035z + 0,004)(z^2 + 0,735z + 0,165)}{(z + 1,267)(z - 1)(z + 0,286)(z + 0,036)}$$



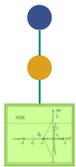
## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.2 Kompensationsansatz: Beispiel 2 (4)



$$R_z(z) = \frac{1,863(z^2 + 0,035z + 0,004)(z^2 + 0,735z + 0,165)}{(z + 1,267)(z - 1)(z + 0,286)(z + 0,036)}$$

$$\Rightarrow u_k = -0,59u_{k-1} + 1,17u_{k-2} + 0,41u_{k-3} + 0,013u_{k-4} \\ + 1,86e_k + 1,43e_{k-1} + 0,36e_{k-2} + 0,016e_{k-3} + 0,0014e_{k-4}$$



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.3 Deadbeatentwurf (1)

**Ziel:** Zeitdiskreter Regler, der die Regelgröße bei sprungförmiger Anregung ab einem Zeitpunkt  $t_e$  auf den Sollwert ohne Regelabweichung einregelt und dort festhält

**Ansatz:** Kompensationsreglers mit „geschicktem“  $F_{Wz}(z)$  so, dass die Regelgröße nach  $k = n_e$  Abtastschritten genau der sprungförmigen Führungsgröße entspricht:

$$y(k) = w(k) = w_0 \quad k \geq n_e$$

**Wahl von  $F_{Wz}(z)$**

$$F_{Wz}(z) = P_W(z)z^{-d} \quad \text{Mit dem Polynom } P_W(z) \quad \Rightarrow n_e = r + d$$

**Regelkreis möglichst schnell**

$$F_{Wz}(z) = z^{-d}$$

Deadbeat-Regler mit maximaler Geschwindigkeit

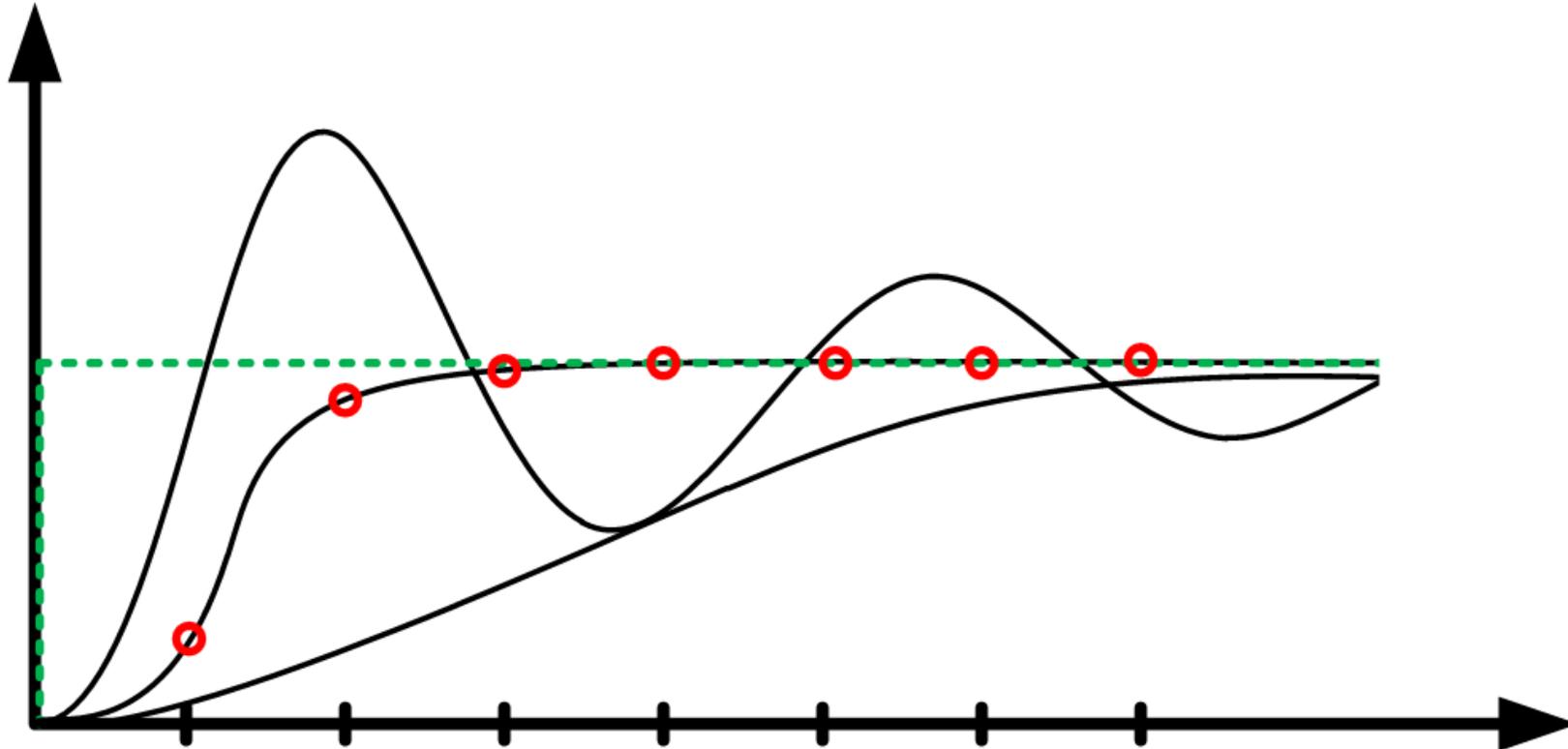
$$G_{Rz}(z) = \frac{1}{G_{Hz}(z)} \frac{F_{Wz}(z)}{1 - F_{Wz}(z)} = \frac{N(z)}{Q(z)} \frac{1}{z^{-d}} \frac{z^{-d}}{1 - z^{-d}} = \frac{N(z)}{Q(z)} \frac{1}{1 - z^{-d}}$$

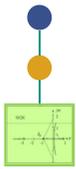


## 6.2 Direkte Verfahren



### 6.2.3 Deadbeatentwurf (2)





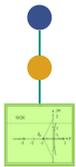
## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.3 Deadbeatentwurf (3)

#### ■ Rechnerdemonstration

PC-Demo 7: Deadbeat-Entwurf

- **Fazit:** Verhalten in den Abtastzeitpunkten für die Ausgangsgröße zufriedenstellend, aber zwischen den Abtastzeitpunkten schwingend
- **Ursache: Stellgröße nicht eingeschwungen**



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.3 Deadbeatentwurf (4)

- **Konsequenz: Zahlenfolge für  $u(k)$  muss endliches Polynom sein**

$$U(z) = \frac{F_{Wz}(z)}{G_{Hz}(z)} W(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \frac{1}{z^{-d}} F_{Wz}(z) W(z)$$

- **somit**

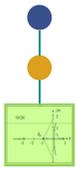
$$F_{Wz}(z) = Q(z)z^{-d} \quad n_e = m + d$$

- **Problem: bei dieser Wahl RK nicht stationär genau, deswegen:**

$$F_{Wz}(z) = \frac{Q(z)}{\sum_{i=0}^m q_i} z^{-d}$$

Dead-Beat-Regler

$$G_{Rz}(z) = \frac{N(z)}{\sum_{i=0}^m q_i - Q(z)z^{-d}}$$



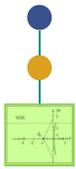
## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.3 Deadbeatentwurf (5)

#### ■ Rechnerdemonstration

PC-Demo 7: Deadbeat-Entwurf

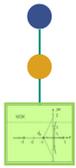
- **Fazit:** Deadbeat-Regler zwar erst zu einem etwas späteren Abtastzeitpunkt im stationären Endwert als schneller Deadbeat, aber dafür eingeschwungen (auch zwischen Abtastzeitpunkten)



## 6.2 Direkte Verfahren

### 6.2.3 Deadbeatentwurf (6)

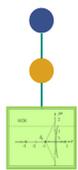
- **Deadbeatentwurf führt die Ausgangsgröße auch zwischen den Abtastzeitpunkten auf den Sollwert**
- **Deadbeatentwurf kompensiert die Nullstellen nicht → Einsatz auch bei nichtminimalphasigen Strecken möglich**
- **Deadbeatentwurf führt auf einen  $n_e$  fachen Pol in  $z = 0$**
- **Deadbeatentwurf führt auf hohe Stellsignalamplituden bei kleinen Abtastzeiten**



## 6.2 Direkte Verfahren

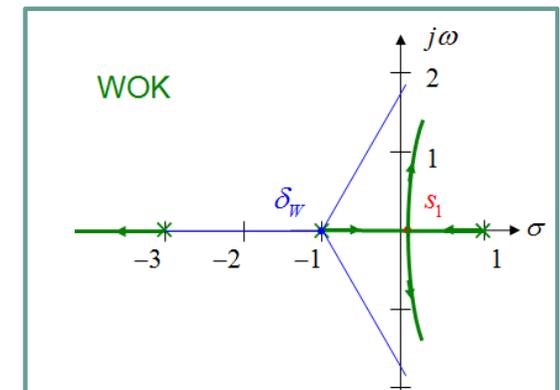
### 6.2.3 Deadbeatentwurf (7)

- **Deadbeatentwurf ist empfindlich gegenüber:**
  - Störungen
  - Parameterschwankungen
  - Stark schwingenden Systemen
- **Deadbeatentwurf nur für stabile Systeme möglich**
- **Deadbeatentwurf nicht möglich für Systeme mit Durchgriff ( $q_0 \neq 0$ )**  
der Form 
$$G_{Hz}(z) = \frac{q_0}{N(z)} \quad (\text{d.h. mit } d=0)$$



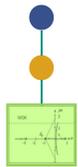
### 5. Synthese von linearen zeitkontinuierlichen Regelkreisen

1. Anforderungen an den Regelkreis
2. Heuristische Verfahren
3. Direkte Verfahren
4. Frequenzkennlinienverfahren
5. Wurzelortskurvenverfahren
6. Parameteroptimierung
7. Vermaschung und Vorsteuerung



### 6. Synthese von linearen zeitdiskreten Regelkreisen

1. Fast Sampling Design
2. Direkte Verfahren
3. Frequenzkennlinienverfahren und Wurzelortskurvenverfahren



## 6.3 Frequenzkennlinienverfahren und WOK

### 6.3.1 Frequenzkennlinienverfahren

- Das Frequenzkennlinienverfahren für zeitdiskrete Systeme wird ähnlich angewendet, wie für zeitkontinuierliche Systeme.
- Aber: Die „Faustregeln“ für die Phasenreserve (Dämpfung) lassen sich nicht mehr übertragen. In Literatur daher sog. Anpassbedingungen abgeleitet [Dörrscheidt]



1. Auswahl der Reglerstruktur gemäß vorliegendem Streckentyp
2. Bestimmung der Reglerparameter gemäß den einfachen Einstellregeln
3. Zeichnen des Bodediagramms mit der Gesamtverstärkung 1
4. Wahl der Verstärkung aus Bodediagramm so, dass RK stabil ist (Phasenreserve bei der Durchtrittsfrequenz)
5. Überprüfung des Zeitverhaltens durch Simulation, je nach Ergebnis ggf. weitere Iteration mit Schritt 4 (durch Einfügen (seriell) weiterer phasenhebender oder –absenkender Glieder )
6. Berechnung der Reglerverstärkung aus der ermittelten Verstärkung

## 6.3 Frequenzkennlinienverfahren und WOK

### 6.3.2 WOK-Verfahren



Die WOK eines zeitdiskreten Systems ist in gleicher Weise definiert wie für zeitkontinuierliche Systeme. Es gelten die gleichen Konstruktionsregeln:

#### Def.: Wurzelortskurve (WOK):

Die Wurzelortskurve (WOK) besteht aus den  $n$  Bahnen, die die  $n$  Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises durchlaufen, wenn der Verstärkungsfaktor  $k$  des offenen Regelkreises von 0 gegen  $+\infty$  läuft.

Die WOK wird ermittelt als Menge aller Punkte der komplexen  $z$ -Ebene, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$F_{oz}(z) = k \frac{P_o(z)}{Q_o(z)} = k \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - n_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (z - p_{\nu})} = -1, \quad k > 0$$

Der Regelkreis ist stabilisierbar, wenn es einen Verstärkungsfaktor  $k$  gibt, bei dem alle Pole des geschlossenen Kreises innerhalb des Einheitskreises liegen.

# 6.3 Frequenzkennlinienverfahren und WOK

## 6.3.2 WOK-Verfahren: Beispiel (1)

■ **Beispiel:**  $F_{oz}(z) = \frac{K}{z^2(z-1)}$

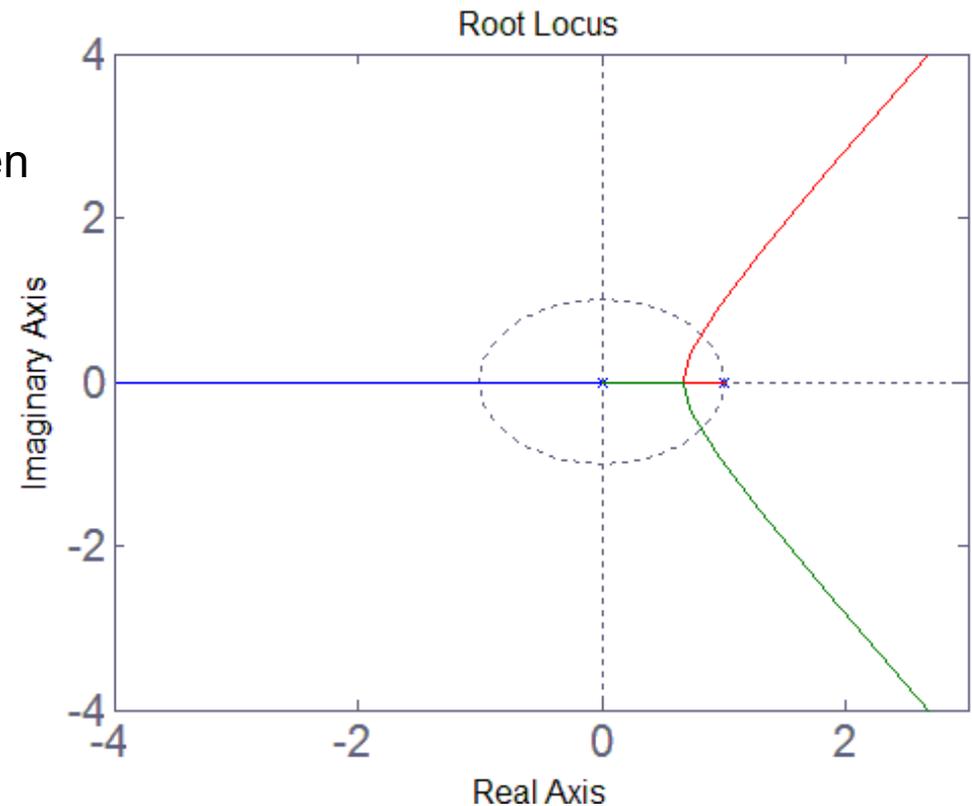
R1  $\implies$  Pole:  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$

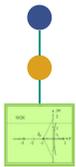
R3  $\implies$  WOK auf reeller Achse zwischen den Punkten 1 und 0 sowie zwischen 0 und  $-\infty$

R4  $\implies$  Wurzelschwerpunkt als Schnittpunkt der Asymptoten:  $\delta_w = \frac{1}{3}$

R5  $\implies$  Asymptotenwinkel:  $\varphi_i = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

R6  $\implies$  Verzweigungspunkt:  $s_1 = \frac{2}{3}$





## 6.3 Frequenzkennlinienverfahren und WOK

### 6.3.2 WOK-Verfahren: Beispiel (2)

■ **Beispiel:**  $F_{oz}(z) = \frac{K}{z^2(z-1)}$

#### Berechnung der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis:

■ Auf dem Einheitskreis ist  $z = e^{j\varphi}$

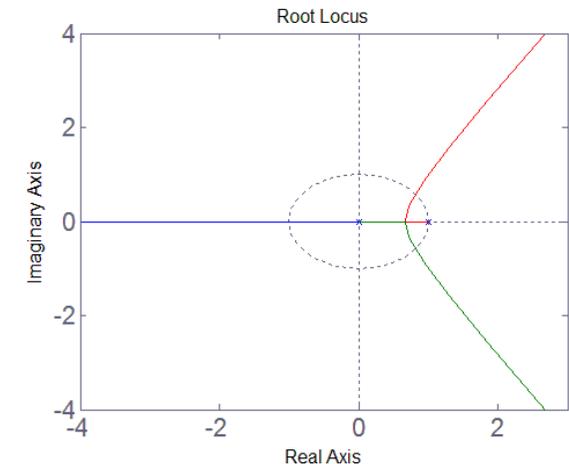
■ Einsetzen in die charakteristische Gleichung  $1 + F_{oz}(z) = 0 \Rightarrow z^3 - z^2 + K = 0$

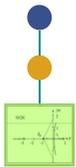
führt zu :  $e^{j3\varphi} - e^{j2\varphi} + K = 0$

■ Eulersche Formel:  $\cos(3\varphi) + j \sin(3\varphi) - \cos(2\varphi) - j \sin(2\varphi) + K = 0$

1) Realteil:  $\cos(3\varphi) - \cos(2\varphi) + K = 0$

2) Imaginärteil:  $j(\sin(3\varphi) - \sin(2\varphi)) = 0$





## 6.3 Frequenzkennlinienverfahren und WOK

### 6.3.2 WOK-Verfahren: Beispiel (3)

■ **Beispiel:**  $F_{oz}(z) = \frac{K}{z^2(z-1)}$

#### Berechnung der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis:

- Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

(1) Realteil:  $\cos(3\varphi) - \cos(2\varphi) + K = 0$

(2) Imaginärteil:  $j(\sin(3\varphi) - \sin(2\varphi)) = 0$

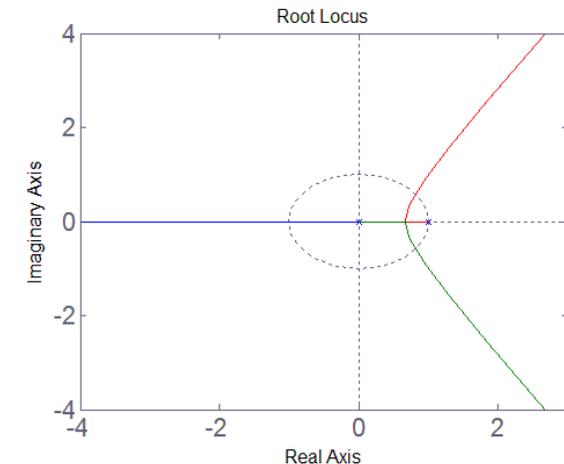
- Aus (2) folgt:  $\varphi_{1,2,3} = 0^\circ, \pm 36^\circ, 180^\circ$

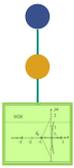
- Für  $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$  (negative reelle Achse) und  $\pm 36^\circ$  erhält man die Schnittpunkte der Wurzelortskurve mit dem Einheitskreis. Die zugehörigen Verstärkungsfaktoren  $K$  erhält man aus (1):

$$K = 0,618 \quad \text{für } \varphi = 36^\circ \text{ (rechter oberer Ast)}$$

$$K = 2 \quad \text{für } \varphi = 180^\circ \text{ (negative reelle Achse)}$$

⇒ Stabilitätsbereich:  $K < 0,618$





# Einordnung in den Gesamtentwurf

## Übersicht

