

A) Korrespondenzen der Laplace- und z-Transformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad f(t)$$

$$f_k = f(t = kT) \quad \circ \xrightarrow{Z} \bullet \quad F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

	$F(s)$	$f(t)$	f_k	$F_z(z)$
1	$\frac{1}{s}$	1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$T^2 z \frac{z+1}{(z-1)^3}$
4	$\frac{3!}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$T^3 z \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}$
5	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n $n = 1, 2, \dots$	$(kT)^n$	$T^n z \frac{z^{n-1} + \dots}{(z-1)^{n+1}}$
6	$\frac{1}{s-\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$	$e^{\alpha t}$	$e^{\alpha kT}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
7	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, n = 1, 2, \dots$	$t^n e^{\alpha t}$	$(kT)^n e^{\alpha kT}$	$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{z}{z-e^{\alpha T}} \right) = T^n z e^{\alpha T} \frac{z^{n-1} + \dots}{(z-e^{\alpha T})^{n+1}}$
8	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$z \frac{\sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$z \frac{z - \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
10	$\frac{s \cdot \sin \phi + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \phi)$	$\sin(\omega kT + \phi)$	$z \frac{z \sin \phi + \sin(\omega T - \phi)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
11	$\frac{1}{s - \frac{1}{T} \ln a}, a \neq 0$	$e^{\frac{t}{T} \ln a} = a^{\frac{t}{T}}$	$e^{\frac{kT}{T} \ln a} = a^k$	$\frac{z}{z-a}$

B) Rechenregeln der Laplace-Transformation

Benennung der Operation	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Linearkombination der Originalfunktionen	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ c_1, c_2 beliebig	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Gewöhnliche Differentiation der Originalfunktion	$f'(t)$ $f^{(n)}(t), n = 1, 2, \dots$	$sF(s) - f(+0)$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$
Integration der Originalfunktion	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Dämpfung der Originalfunktion	$f(t)e^{\alpha t}, \alpha$ beliebig	$F(s - \alpha)$
Faltung der Originalfunktionen	$f_1(t) * f_2(t) =$ $= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Verschiebung der Originalfunktion nach rechts	$f(t - t_0), t_0 > 0$	$e^{-t_0 s} \left(F(s) + \int_{-t_0}^0 f(t) e^{-st} dt \right)$
Verschiebung der Originalfunktion nach links	$f(t + t_0), t_0 > 0$	$e^{t_0 s} \left(F(s) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-st} dt \right)$
Differentiation der Bildfunktion	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s), n = 1, 2, \dots$
Multiplikation der Originalfunktionen (Faltung der Bildfunktionen)	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z) F_2(s-z) dz =$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-z) F_2(z) dz$

C) Einige Rechenregeln der z-Transformation

Benennung der Operation	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Verschiebung der Originalfunktion nach rechts	$f(t - mT)$ $(f(k - m))$	$z^{-m} \left[F_z(z) + \sum_{v=1}^m f(-v)z^v \right], \quad m = 1, 2, \dots$
Verschiebung der Originalfunktion nach links	$f(t + mT)$ $(f(k + m))$	$z^m \left[F_z(z) - \sum_{v=0}^{m-1} f(v)z^{-v} \right], \quad m = 1, 2, \dots$
Dämpfung der Originalfunktion	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$ $(f(k) \cdot e^{\alpha kT})$	$F_z(e^{-\alpha T} z), \quad \alpha \text{ beliebig komplex}$
Differentiation der Bildfunktion	$t \cdot f(t)$ $(kT \cdot f(k))$	$-Tz \cdot F_z'(z)$

D) Approximationsverfahren zur Zeitdiskretisierung

- Euler explizit/vorwärts:** $y_k = y_{k-1} + T \cdot f(k-1) \Rightarrow s \rightarrow \frac{z-1}{T}$
- Euler implizit/rückwärts:** $y_k = y_{k-1} + T \cdot f(k) \Rightarrow s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$
- Tustin:** $y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2} (f(k) + f(k-1)) \Rightarrow s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

E) Algebraische Stabilitätskriterien

- **Zeitkontinuierlich: Hurwitzkriterium**

$P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$ ist Hurwitz-Polynom für $a_n > 0$, $D_k > 0 \forall k = 1, \dots, n$

mit

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \dots & 0 \end{vmatrix}, \text{ mit } D_1 = |a_{n-1}|, D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \dots$$

Dabei gilt für Determinanten:

$$|A| = |(a_{ij})| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

wobei A_{ij} aus A durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte hervorgeht

- **Zeitdiskret:**

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Einheitskreispolynome

- Polynom 2. Grades: $N(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, ($a_2 > 0$)
 $N(1) > 0$, $N(-1) > 0$, $a_2 > |a_0|$

- Polynom 3. Grades: $N(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, ($a_3 > 0$)
 $N(1) > 0$, $N(-1) < 0$, $a_3 > |a_0|$, $a_1a_3 - a_0a_2 < a_3^2 - a_0^2$

- Polynom 4. Grades: $N(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, ($a_4 > 0$)
 $N(1) > 0$, $N(-1) > 0$, $a_4 > |a_0|$, $|a_1a_4 - a_0a_3| < a_4^2 - a_0^2$
 $(a_4 - a_0)^2 (a_4 - a_2 + a_0) + (a_3 - a_1)(a_1a_4 - a_0a_3) > 0$

F) Einige Konstruktionsregeln von Wurzelortskurven:

$$F_0(s) = k \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - n_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu})} = k \cdot \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} \quad , \quad k > 0 \quad , \quad m < n \quad , \quad n_{\mu} \neq p_{\nu} \quad .$$

- Die Asymptoten der ins Unendliche strebenden Äste der WOK schneiden sich alle in einem Punkt der reellen Achse, dem **Wurzelschwerpunkt**. Seine Abszisse ist

$$\delta_w = \frac{\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re} \{ p_{\nu} \} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re} \{ n_{\mu} \}}{n - m} \quad .$$

- Die Anstiegswinkel der Asymptoten der WOK sind

$$\varphi_i = (2i + 1) \cdot \frac{\pi}{n - m} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad .$$

- Die von den Nullstellen und Polen des offenen Kreises verschiedenen Verzweigungspunkte der WOK erhält man aus der Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - n_{\mu}} - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - p_{\nu}} = 0 \quad .$$

- Ist s_{ρ} ein Pol oder eine Nullstelle des offenen Kreises mit der Ordnung r_{ρ} , so sind die Neigungswinkel der r_{ρ} Wurzelortskurvenäste mit der reellen Achse, die dort beginnen oder enden

$$\varphi_{\rho i} = -\frac{1}{\varepsilon_{\rho} r_{\rho}} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ s_{\lambda} \neq s_{\rho}}}^{m+n} \varepsilon_{\lambda} \angle(s_{\rho} - s_{\lambda}) + (2i + 1) \frac{\pi}{\varepsilon_{\rho} r_{\rho}} \quad ,$$

$$i = 0, 1, \dots, r_{\rho} - 1 \quad , \quad \varepsilon_{\lambda} = \begin{cases} +1 \quad , & \text{falls } s_{\lambda} \text{ eine Nullstelle } n_{\mu} \text{ ist} \\ -1 \quad , & \text{falls } s_{\lambda} \text{ eine Polstelle } p_{\nu} \text{ ist} \end{cases} \quad .$$

G) Einstellregeln zum Betragsoptimum

Strecke $G(s)$	Regler $R(s)$	Einstellregeln
$\frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \dots}$	PI : $\frac{r_0 + r_1 s}{2s}$	$r_0 = a_0 \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_1 a_2 - a_0 a_3}$, $r_1 = a_1 \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - a_0$
$\frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}$	PID : $\frac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2}{2s}$	$r_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_0^2 & -a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2a_0 a_2 & -a_2 & a_1 \\ a_2^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_0^2 & 0 \\ a_3 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 & a_1 \\ a_5 & a_2^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & a_0^2 \\ a_3 & -a_2 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 \\ a_5 & -a_4 & a_2^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$
$\frac{k_S}{\prod_{v=1}^n (1 + T_v s)}$ 1 große Zeitkonstante: $T_1 \gg T_\Sigma = \sum_{v=2}^n T_v$	PI : $k_R \frac{1 + T_R s}{s}$	$k_R = \frac{1}{2k_S T_\Sigma}$, $T_R = T_1$
$\frac{k_S}{\prod_{v=1}^n (1 + T_v s)}$ 2 große Zeitkonstanten: $T_1, T_2 \gg T_\Sigma = \sum_{v=3}^n T_v$	PI : $k_R \frac{1 + T_R s}{s}$ PID : $k_R \frac{(1 + T_{R1} s)(1 + T_{R2} s)}{s}$	$k_R = \frac{1}{2k_S} \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{(T_1 + T_2) T_1 T_2}$, $T_R = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}$ $k_R = \frac{1}{2k_S T_\Sigma}$, $T_{R1} = T_1$, $T_{R2} = T_2$

H) Minimale quadratische Regelfläche

Gütemaße bis n=4:

$$J_1 = \frac{c_0^2}{2d_0d_1}$$

$$J_2 = \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}$$

$$J_3 = \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}$$

$$J_4 = \frac{c_3^2(d_0d_1d_2 - d_0^2d_3) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0d_1d_4 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3d_4 + c_0^2(d_2d_3d_4 - d_1d_4^2)}{2d_0d_4(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_1^2d_4)}$$

I) Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

Reglertyp	K_R	T_N	T_V
P-Regler: $R(s) = K_R$	$0.5 \cdot K_{R,krit}$	-	-
PI-Regler: $R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} \right)$	$0.45 \cdot K_{R,krit}$	$0.85 \cdot T_{krit}$	-
PID-Regler: $R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} + T_V \cdot s \right)$	$0.6 \cdot K_{R,krit}$	$0.5 \cdot T_{krit}$	$0.12 \cdot T_{krit}$

J) Regler mit endlicher Einstellzeit (Deadbeat-Regler)

$$R_z(z) = \frac{N_z(z)}{\sum_{i=0}^m q_i - Q_z(z) \cdot z^{-d}}$$

(für die zeitdiskrete Strecke $G_z(z) = \frac{Q_z(z)}{N_z(z)} z^{-d}$)