3. Tutorium Systemdynamik und Regelungstechnik

Sommersemester 2013

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Stabilitätskriterien
Frequenzgangdarstellungen

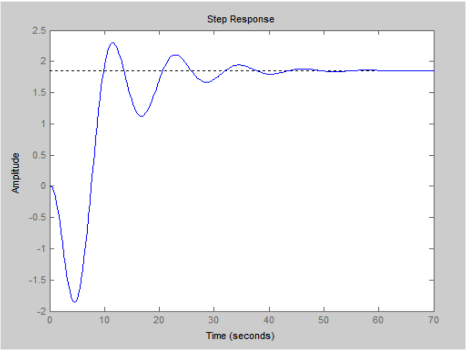
Inhalt und Themen

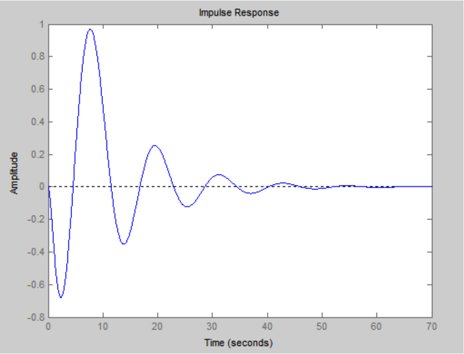
- **Übersicht der Stabilitätskriterien** (Aufgabe 20)
- Wiederholung der **Frequenzgangdarstellungen** (Nyquistortskurve und Bode-Diagramm) (Aufgabe 16)
- **Zuordnungsaufgabe** (Pole/Nullstellen, Nyquist, Bode, Sprungantwort) (Aufgabe 17)
- Untersuchung auf Stabilität - **Algebraisches Stabilitätskriterium** im zeitdiskreten Bereich (Aufgabe 19)

Grundlagen zur Stabilität
Übertragungsstabilität (BIBO)

- System heißt **übertragungsstabil**, wenn es auf jede **beschränkte Eingangsgröße** mit einer **beschränkten Ausgangsgröße** antwortet

- Ein LTI-System (gebrochen rationales Übertragungsglied) ist **stabil**, wenn:
  - **Sprungantwort** $h(t)$ für $t \to \infty$ gegen einen endlichen Endwert strebt
  - **Impulsantwort** $g(t)$ für $t \to \infty$ nach Null abklingt

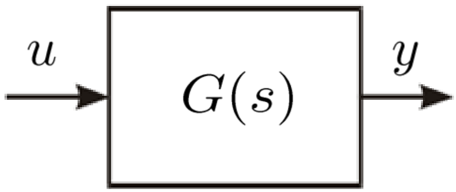




  - **Pole des Systems** links der imaginären Achse liegen

Untersuchung auf Stabilität (1)

- **Einfaches System:**

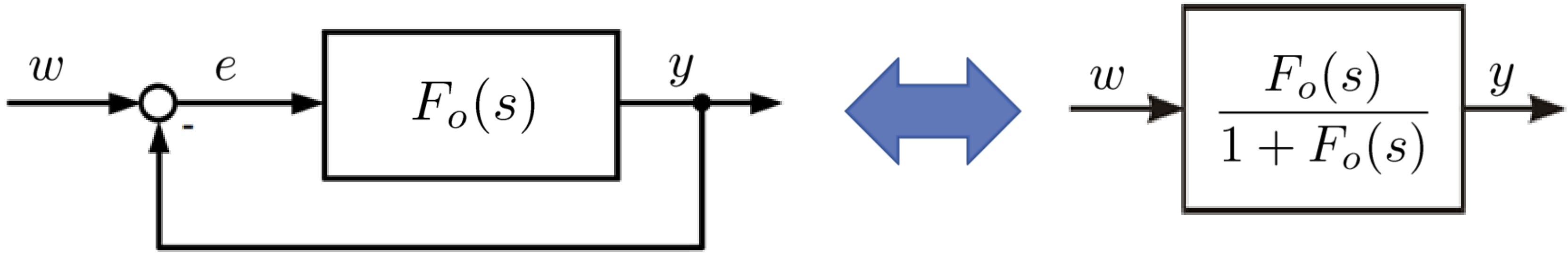


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

- System stabil, wenn
  - **alle Pole von** $G(s)$ **links** der imaginären Achse liegen (einen negativen Realteil haben) → Berechnung aller Pole manchmal aufwendig, deshalb:
  - Nennerpolynom $N(s)$ ein Hurwitz-Polynom (**Hurwitz-Kriterium**) ist
    → vgl. später

Untersuchung auf Stabilität (2)

- **Regelkreis:**



- **Offener Kreis:** $$F_o(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = R(s) \cdot G(s)$$

- **Geschlossener Kreis:** $$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}$$

- **Geschl. Kreis stabil**, wenn
  alle Pole der **Führungsüfkt.** $G_w(s)$ links liegen, d.h. wenn,
  alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung $1 + F_o(s)$ **links der imaginären Achse** liegen.

→ aufwendig, deshalb: Algebraische und graphische Stabilitätskriterien

Untersuchung auf Stabilität
Stabilitätskriterien (1)

- **Algebraisch (Hurwitz-Kriterium):**

- **Hurwitz-Kriterium (nicht bei Totzeit!)**

  Charakteristisches Polynom ($N(s)$ oder $1 + F_o(s)$) wird untersucht:

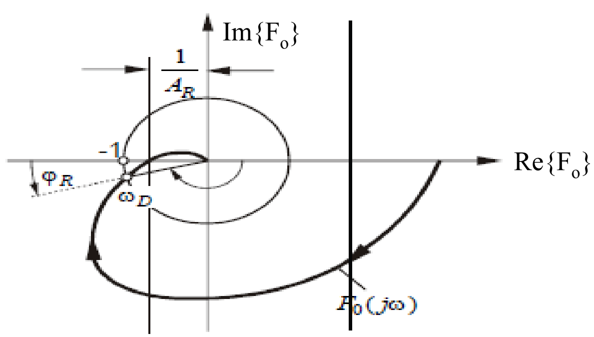
  - **Notwendige Bedingung:**
    alle Koeffizienten $a_i \ (i = 0, \ldots, n)$ des charakteristischen Polynoms sind positiv.
  - **Notwendige und hinreichende Bedingung:**
    zusätzlich sind alle Hurwitz-Determinanten $D_k \ (k = 1, \ldots, n)$ positiv

$$D_1 = a_{n-1}, \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \cdots$$

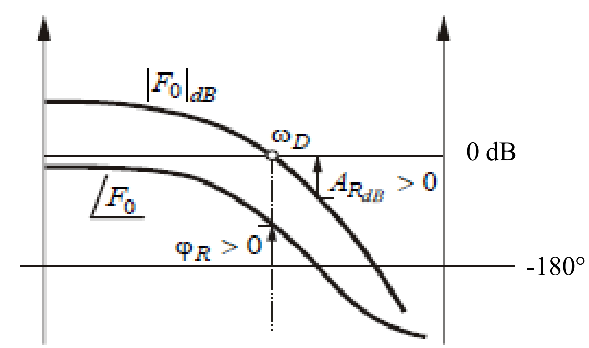
Untersuchung auf Stabilität
Stabilitätskriterien (2)

- Graphisch (Nyquist-Kriterium): $F_o(s)$ wird untersucht!
- Vorteil: Vom **offenen Kreis kann auf die Stabilität des geschl. Kreises** geschlossen werden und Totzeiten behandelbar!
  - **Spezielle Form des Nyquist-Kriteriums**
  - Voraussetzung für Anwendbarkeit:
    Maximal 2 Pole im Ursprung, sonst liegen alle Pole von $F_o(s)$ in der linken s-Halbebene

- **Ortskurve** von $F_o(s)$



- **Bode-Diagramm** von $F_o(s)$

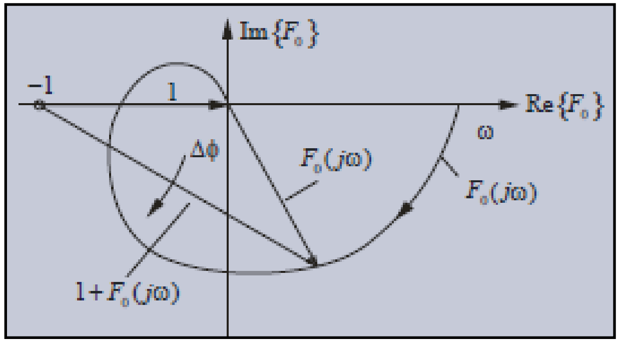


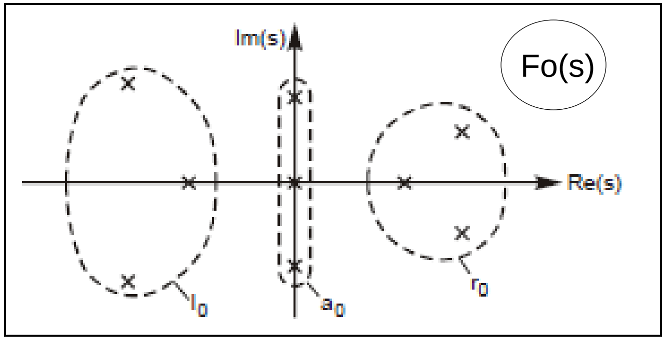
Untersuchung auf Stabilität
Stabilitätskriterien (3)

- **<u>Allgemeine Form des Nyquist-Kriteriums</u>** (in NOK-Darstellung):

- **Geschlossener Kreis stabil**, wenn die stetige Winkeländerung $\Delta\Phi_{ist}$ vom kritischen Punkt -1 zur F_o(jω)-Ortskurve von $\omega \rightarrow 0$ bis $\omega \rightarrow \infty$ den Wert $\Delta\Phi_{stabil} = r_0 \cdot \pi + a_0 \cdot \frac{\pi}{2}$ annimmt.

- D.h. wenn, $\Delta\Phi_{ist} = \Delta\Phi_{stabil}$ erfüllt ➡ **Geschl. Kreis stabil**



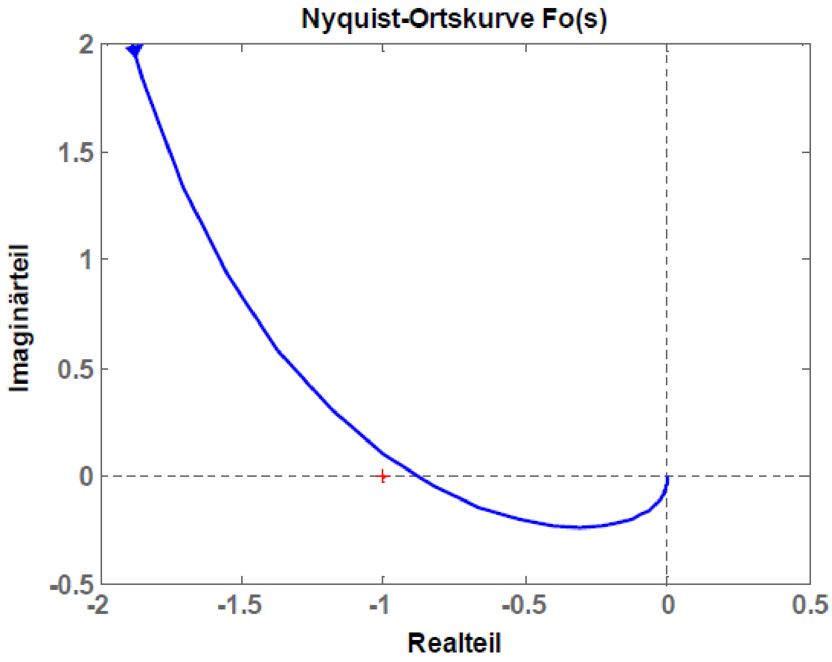


Stabilitätsuntersuchung
Aufgabe 20

Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 3s^2 - 4s}$

werde zunächst mit einem P-Regler $R(s) = 1$ geregelt. Zum offenen Regelkreis $F_o(s) = G(s)R(s)$ gehört die unten stehende Ortskurve.

- a) **Spezielle Form des Nyquist-Kriteriums**
- b) Instabilität des geschl. RKes mit **Hurwitz-Kriterium** und **allgemeinen Nyquist-Kriteriums** zeigen



Stabilitätsuntersuchung
Aufgabe 20

- <u>Nun:</u> PD-Regler $R(s) = 4s + 4$

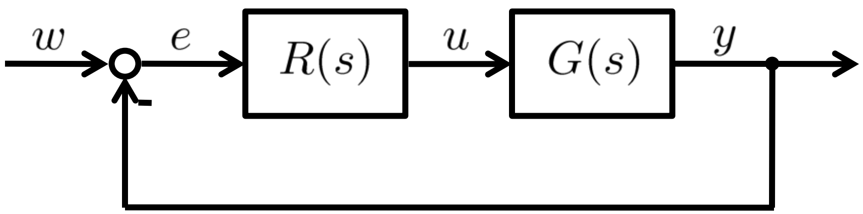
  → **neuer offener und geschlossener Kreis**

- c) Hurwitz-Kriterium zur Stabilitätsuntersuchung des neuen geschlossenen Regelkreises

  Mit welcher Form des graphischen Nyquist-Kriteriums ließe sich die Stabilität auch zeigen?

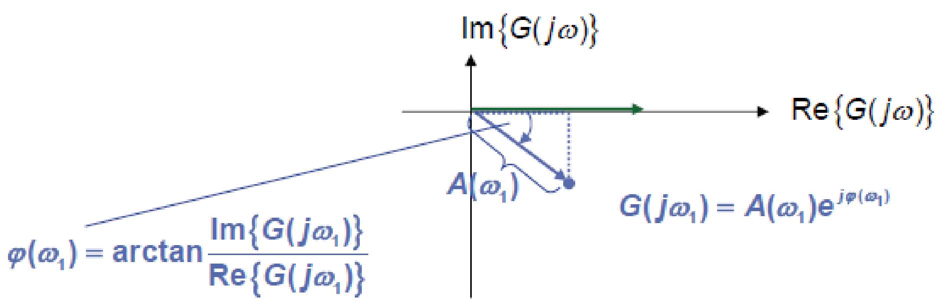
- d) **Stationärer Endwert** der Regelabweichung $e(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$ bei $w(t) = \sigma(t)$ → EWS

- e) Ausgangsgröße $y(t)$ für $t = +0$ → AWS

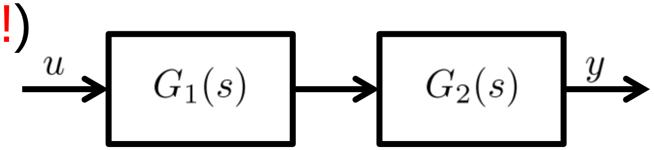


Nyquist-Ortskurve (1)

- Kurve, die durch den Verlauf der Zeigerspitzen von $G(j\omega)$ von $\omega \to 0$ bis $\omega \to \infty$ entsteht.
  - Betrag: Länge des Zeigers
  - Phase: eingeschlossener Winkel zwischen Zeiger und reelle Achse



- **Konstruktion:** Betrag und Phase für Anfangs- ($\omega = 0$) und Endpunkte ($\omega = \infty$)
- Nyquist-Kurve bei Reihenschaltung mehrerer Glieder:
  - Multiplikation der Beträge (umständlich!)
  - Addition der Phasen



Nyquist-Ortskurve (2)

- Faustregel für die **Berechnung der Phase**

$$\varphi = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}$$

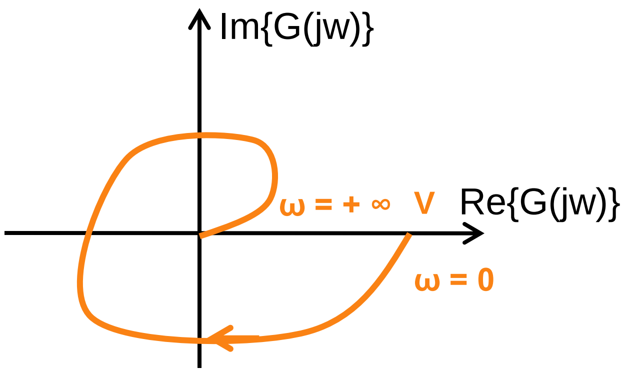
  - **P-Glied:** Konstante Phase: 0°, $\Delta\Phi = 0°$
  - **I-Glied:** Konstante Phase: -90°, $\Delta\Phi = 0°$
  - **D-Glied:** Konstante Phase: +90°, $\Delta\Phi = 0°$
  - **PT$_1$-Glied** mit **Pol** in **linker** / **rechter** s-Halbebene: Phasendrehung $\Delta\Phi$ von 0° nach **-90°** / **+90°**
    - n PT$_1$-Glieder: $\Delta\Phi = n \cdot (\pm 90°)$
  - Übertragungsglied mit **Nullstelle** in **linker** / **rechter** s-Halbebene: Phasendrehung $\Delta\Phi$ von 0° nach **+90°** / **-90°**
    - n Ü-Glieder mit Nullstelle: $\Delta\Phi = n \cdot (\pm 90°)$
  - Bei zusammengesetzten Übertragungsgliedern: → **Phase und Phasendrehung aller Glieder addieren**

Nyquist-Ortskurve (3)

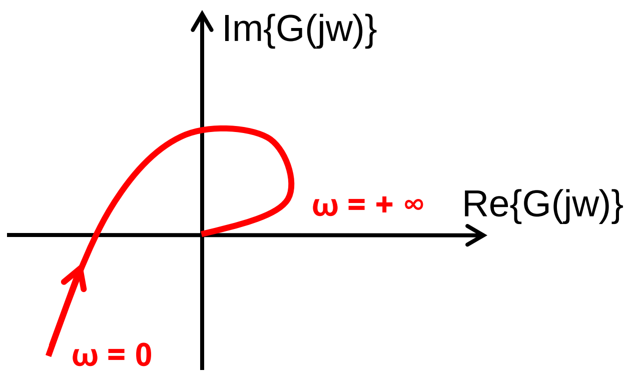
- Verzögerungsglied 4. Ordnung

$$G(jw) = \frac{V}{(jw)^q} \cdot \frac{1}{1 + a_1 \cdot (jw) + \cdots + a_4 \cdot (jw)^{4-q}}$$

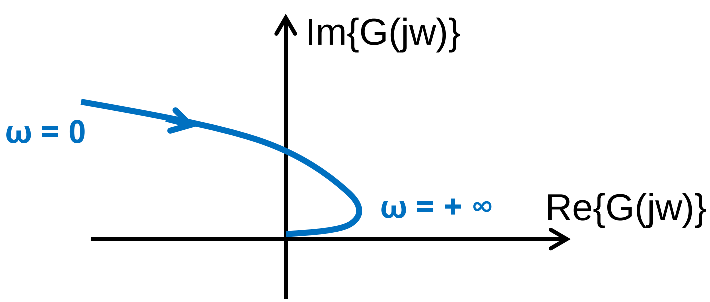
q = 0 (P-Verhalten)



q = 1 (I-Verhalten)



q = 2 (Doppel-I-Verhalten)

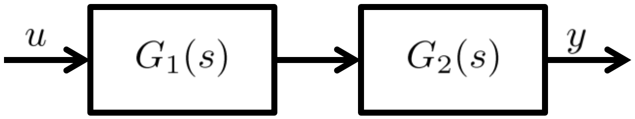


Frequenzkennlinie / Bode-Diagramm

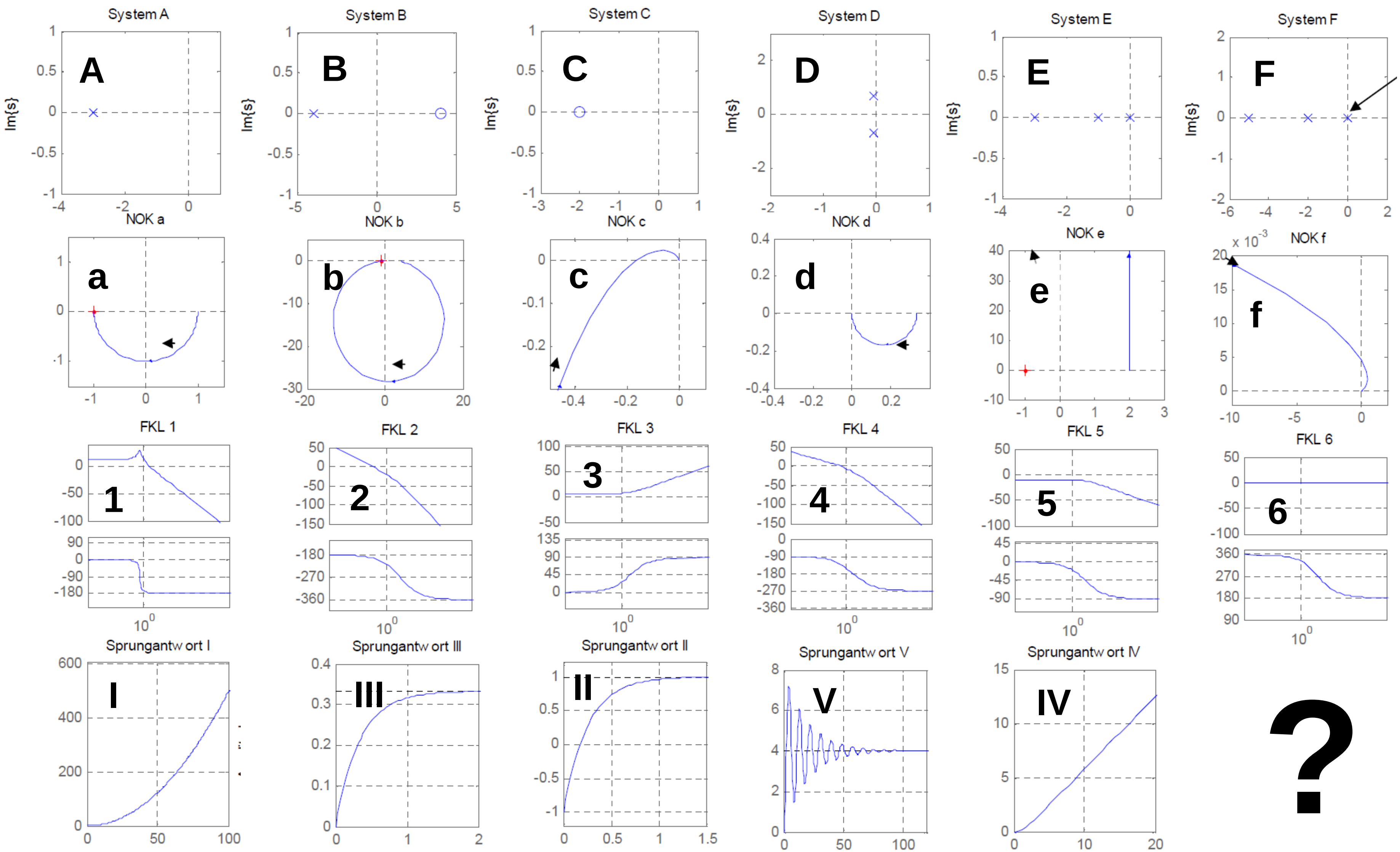
- Getrennte Diagramme für Betrag und Phase von $G(j\omega)$
- Betrag (<u>logarithmisch</u>): $G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |G(j\omega)|$
- Phase:

$$\varphi = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}$$

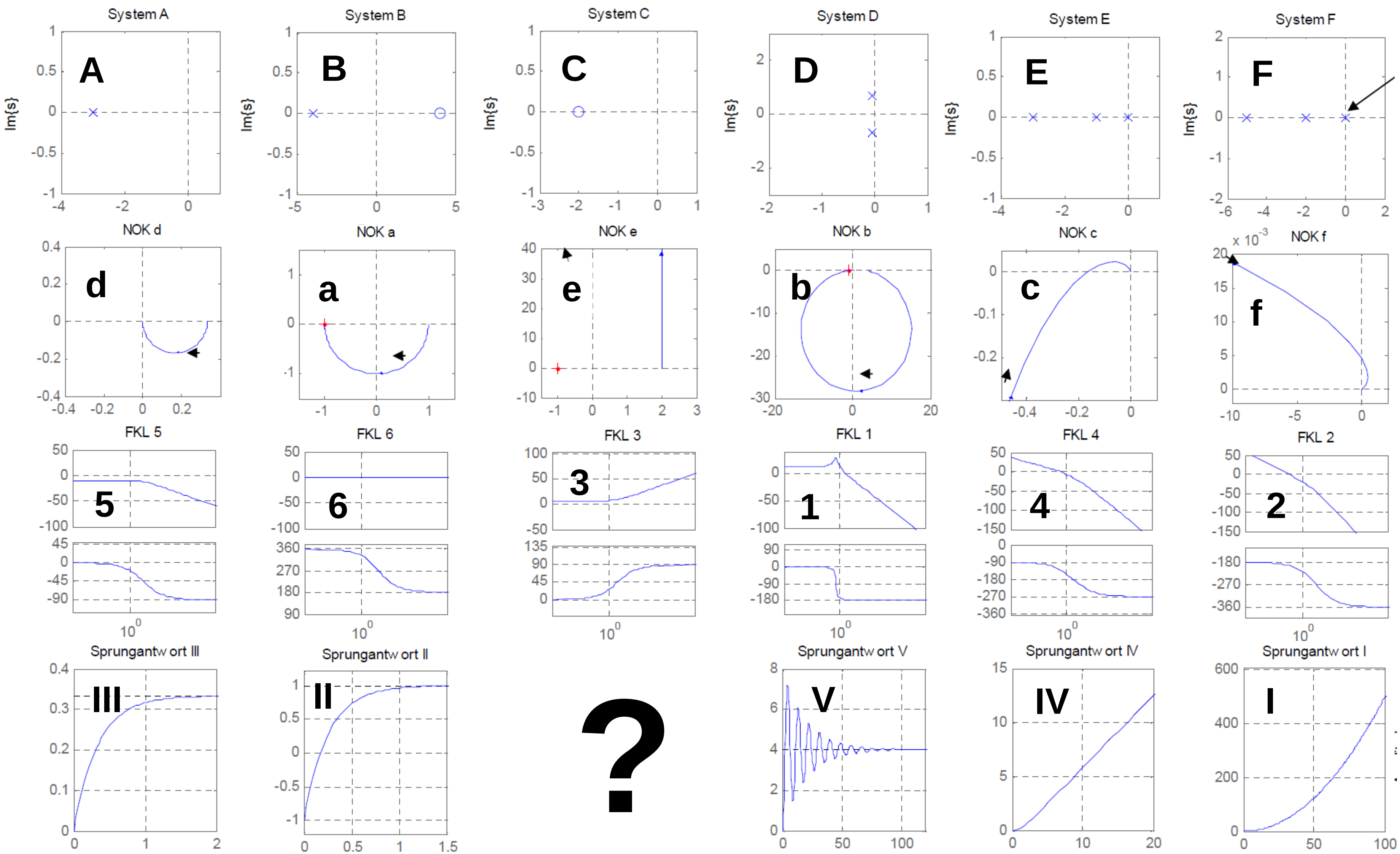
- Konstruktionsregeln:
  - Phase: Wie bei Nyquist-Ortskurve
  - Betragsverlauf knickt pro **Polstelle** / **Nullstelle** um 20dB/Dekade nach **unten** / **oben** ab (Knick bei Knickfrequenz $\omega_E = \frac{1}{T}$)
- Vorteil gegenüber Nyquist-Ortskurve:
  - Bei Reihenschaltung mehrerer Glieder **Addition von Betrag und Phase**



Aufgabe 17


System A
System B
System C
System D
System E
System F
A
B
C
D
E
F
Im{s}
NOK a
NOK b
NOK c
NOK d
NOK e
NOK f
a
b
c
d
e
f
FKL 1
FKL 2
FKL 3
FKL 4
FKL 5
FKL 6
1
2
3
4
5
6
Sprungantwort I
Sprungantwort III
Sprungantwort II
Sprungantwort V
Sprungantwort IV
I
III
II
V
IV
?

Aufgabe 17 - Lösung



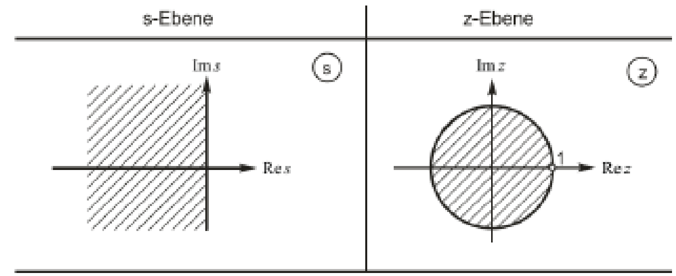
Stabilität im zeitdiskreten Bereich

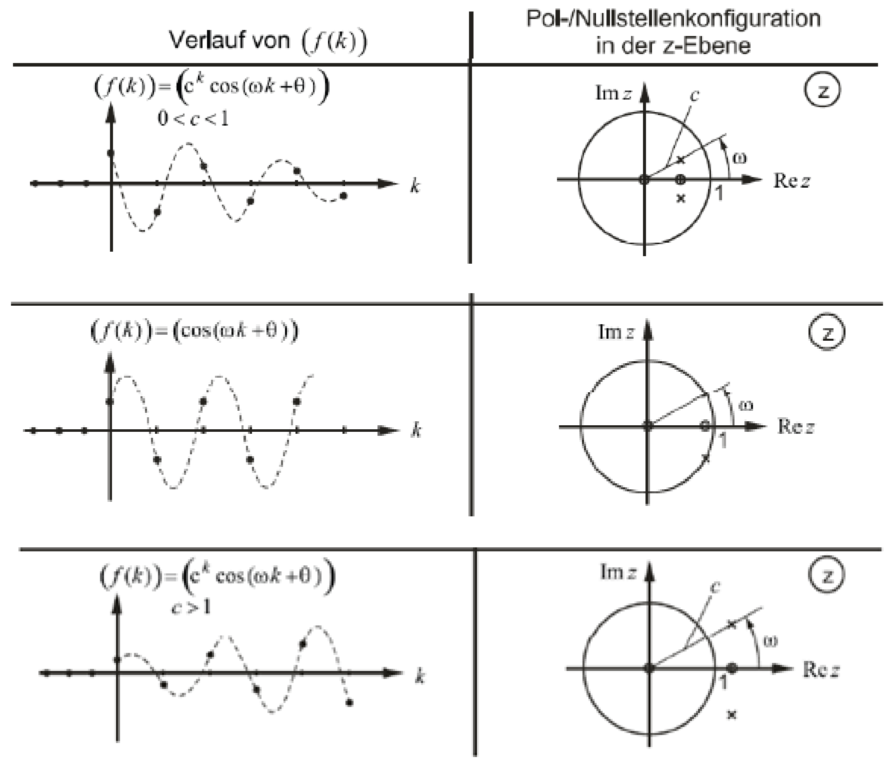
- BIBO-Stabilität analog zum zeitkontinuierlichen Fall
- Zeitdiskretes kausales System **übertragungsstabil**, wenn:
  - System auf eine begrenzte Eingangsfolge mit einer **begrenzten Ausgangsfolge** antwortet

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$$

  - Pole der gebrochen rationalen Üfkt. $G_z(z)$ innerhalb des EKes liegen

$$|z_{\infty i}| < 1$$





Stabilität im zeitdiskreten Bereich
Algebraisches Stabilitätskriterium

- Einheitskreispolynom (charakt. Polynom) $N(z)$ wird untersucht
  - $N(z)$ ist der Nenner von $G_z(z)$, falls einfaches System betrachtet
  - Falls **geschlossener RK** untersucht, ist das charakt. Polynom

$$1 + F_{oz}(z) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad N(z) = N_{oz}(z) + Z_{oz}(z)$$

  - <u>Relevant:</u> Spezialfälle für Polynome niedriger Ordnung (vgl. FS)

Polynom 2. Grades: $N(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \; (a_2 > 0)$

$\rightarrow$ $N(1) > 0, \quad N(-1) > 0, \quad a_2 > |a_0|$

Polynom 3. Grades: $N(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \; (a_3 > 0)$

$\rightarrow$ $N(1) > 0, \quad N(-1) < 0, \quad a_3 > |a_0|, \quad a_1 a_3 - a_0 a_2 < a_3^2 - a_0^2$

Polynom 4. Grades: $N(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \; (a_4 > 0)$

$\rightarrow$ $N(1) > 0, \quad N(-1) > 0, \quad a_4 > |a_0|, \quad |a_1 a_4 - a_0 a_3| < a_4^2 - a_0^2$

$(a_4 - a_0)^2 (a_4 - a_2 + a_0) + (a_3 - a_1)(a_1 a_4 - a_0 a_3) > 0$

Nächstes Tut

- Am 18. Juni
- Im IRS Raum 003