

5. Tutorium Systemdynamik und Regelungstechnik

Sommersemester 2013

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Analyse und Reglerentwurf mit Matlab

Inhalt und Themen

- Stabilitätskriterien – **Analyse eines Regelkreises mit Matlab** (Aufgabe 28)
- **Betragsoptimum** (Aufgabe 32)
- Konstruktion von **Wurzelortskurven (WOK)** (Aufgabe 30)
- **Kompensationsregler** (Aufgabe 31 a))
- **Reglerentwurf mit Matlab (SISO-Tool)** (Aufgabe 31)

Untersuchung auf Stabilität

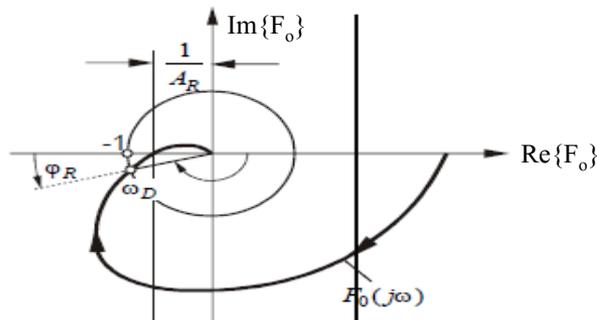
Stabilitätskriterien (1)

- **Graphisch (Nyquist-Kriterium):** $F_o(s)$ wird untersucht!
- **Vorteil:** Vom **offenen Kreis** kann auf die **Stabilität des geschl. Kreises** geschlossen werden und Totzeiten behandelbar!

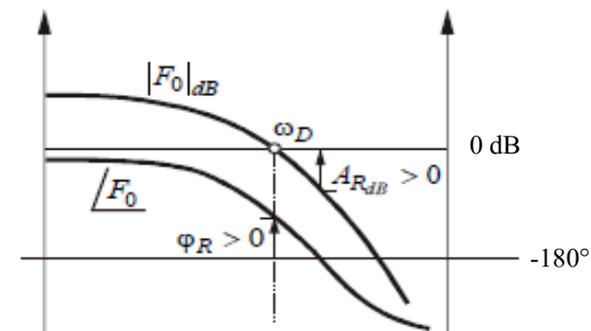
■ Spezielle Form des Nyquist-Kriteriums

- Voraussetzung für Anwendbarkeit:
Maximal 2 Pole im Ursprung, sonst liegen alle Pole von $F_o(s)$ in der linken s-Halbebene

■ Ortskurve von $F_o(s)$



■ Bode-Diagramm von $F_o(s)$



Untersuchung auf Stabilität

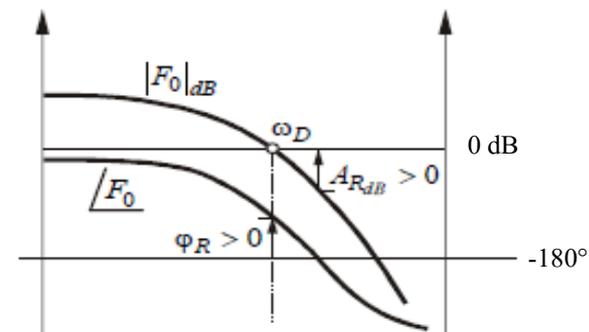
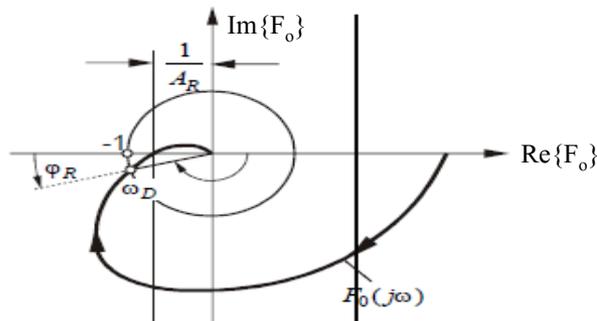
Stabilitätskriterien (2)

- Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen:
 - Bei der Durchtrittsfrequenz ω_D schneidet der Amplitudengang des Bode-Diagramms die 0 dB-Linie bzw. die NOK schneidet den Einheitskreis:

$$\omega_D : F_o(j\omega_D)|_{dB} = 0 \text{ dB} \iff |F_o(j\omega_D)| = 1$$

- Für die Phasenreserve gilt: $\varphi_R = \varphi(\omega_D) + \pi$

- Für die Amplitudenreserve gilt: $A_R|_{dB} = - F_o(j\omega)|_{\varphi=-180^\circ}|_{dB}$



Untersuchung auf Stabilität

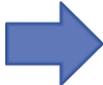
Stabilitätskriterien (3)

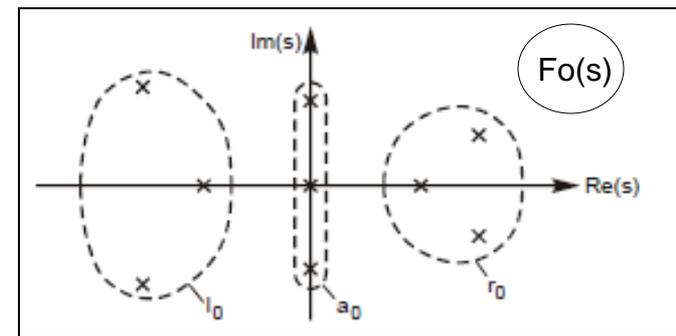
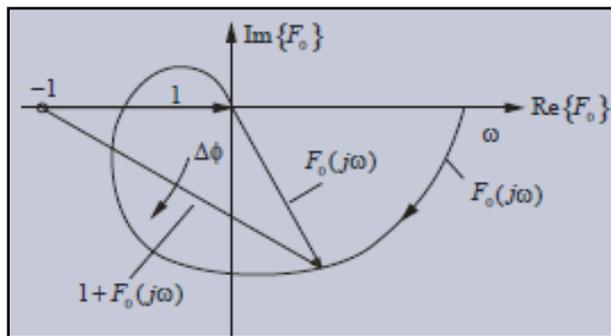
- Allgemeine Form des Nyquist-Kriteriums (in NOK-Darstellung):

- **Geschlossener Kreis stabil**, wenn die stetige Winkeländerung

$\Delta\Phi_{ist}$ vom kritischen Punkt -1 zur $F_o(j\omega)$ -Ortskurve von $\omega \rightarrow 0$

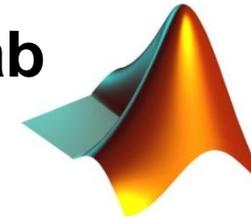
bis $\omega \rightarrow \infty$ den Wert $\Delta\Phi_{stabil} = r_0 \cdot \pi + a_0 \cdot \frac{\pi}{2}$ annimmt.

- D.h. wenn, $\Delta\Phi_{ist} = \Delta\Phi_{stabil}$ erfüllt  **Geschl. Kreis stabil**



Charakterisierung von Systemen in Matlab

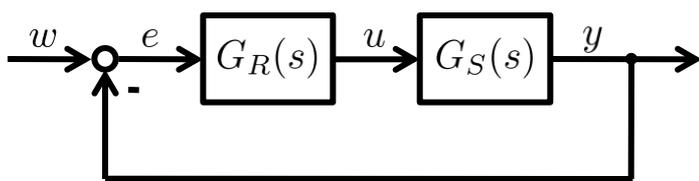
Matlab-Befehle



- `G=tf(num,den)` Zeitkont. System als **Transfer-Function (tf)**
- `G=zpk(z,p,k)` Zeitkont. System als **Zero-pole-gain (zpk)**
- `G_zpk=zpk(G)` **Faktorierte Darstellung**
- `G_min=minreal(G)` Minimalkonfiguration, **Kürzen von Pole / Nst.**
- `pzmap(G)` **Pol-Nullstellen-Diagramm** zeichnen
- `nyquist(G)` **Nyquist-Ortskurve** plotten
- `bode(G)` **Bode-Diagramm** plotten
- `step(G)` **Sprungantwort** zeichnen
- `dcgain(G)` Ablesen des **stationären Endwerts** der Sprungantwort
- `ltiview` Öffnet **LTI-Viewer**
- `sisotool` Öffnet **SISO-Tool (Reglerentwurf)**

Kompensationsregler (1)

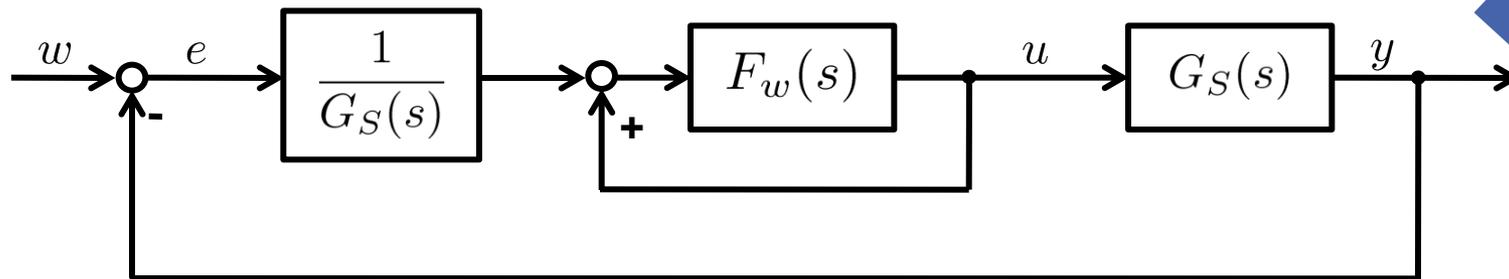
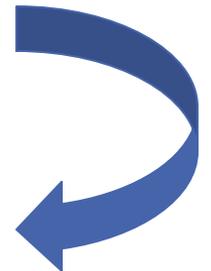
- Geg: Gewünschtes Führungsverhalten des geschl. RKes $F_w(s)$
- Ziel: Vollständige Kompensation des Streckenverhaltens und Erzielung der gewünschten Dynamik des geschl. RKes



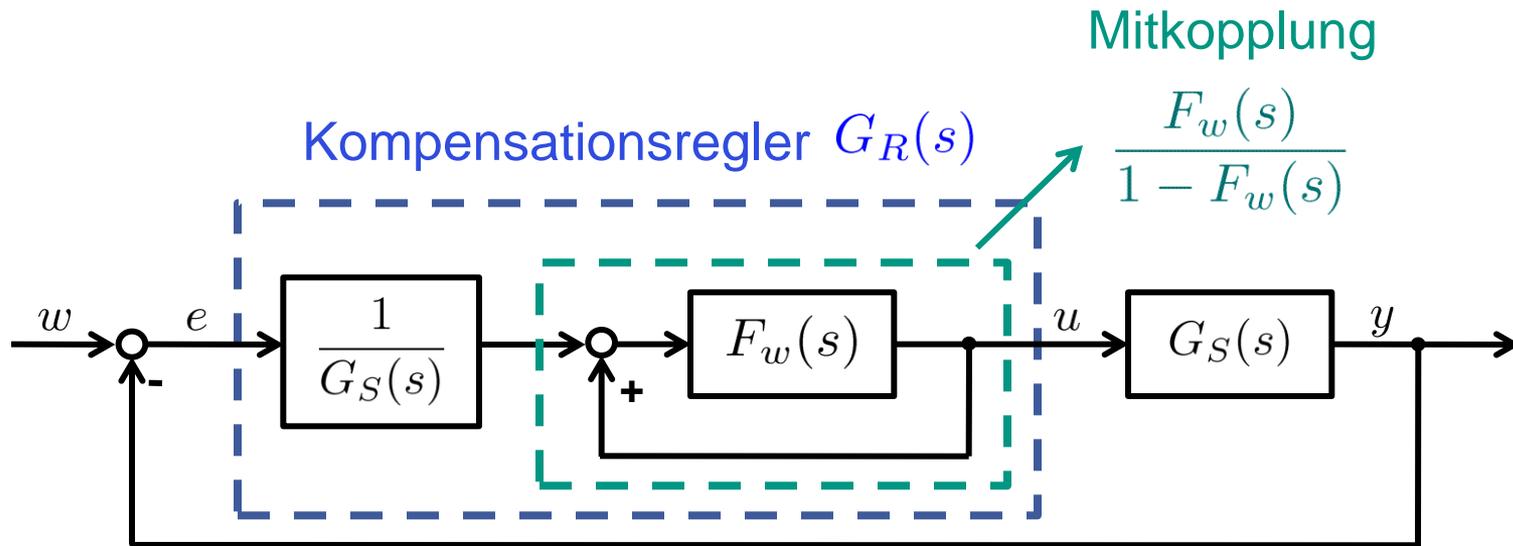
$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \stackrel{!}{=} F_w(s)$$



$$G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)} \cdot \frac{F_w(s)}{1 - F_w(s)}$$



Kompensationsregler (2)



- Voraussetzungen für den Entwurf des Kompensationsreglers:
 - Strecke $G_S(s)$ stabil und minimalphasig
 - Mitkopplung $\frac{F_w(s)}{1 - F_w(s)}$ hat keine Pole rechts der j -Achse

Einstellregeln zum Betragsoptimum (1)

- Geg: Streckenübertragungsfunktion als verzögerndes System
- Ges: Reglerparameter nach dem Betragsoptimum ($|G_w(j\omega)| \stackrel{!}{=} 1$)
- 1. Fall: **Keine deutlich größte Streckenzeitkonstante**

Strecke $G(s)$	Regler $R(s)$	Einstellregeln
$\frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 \dots}$	PI: $\frac{r_0 + r_1s}{2s}$	$r_0 = a_0 \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_1a_2 - a_0a_3}, \quad r_1 = a_1 \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_1a_2 - a_0a_3} - a_0$
$\frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots}$	PID: $\frac{r_0 + r_1s + r_2s^2}{2s}$	$r_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_0^2 & -a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2a_0a_2 & -a_2 & a_1 \\ a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_0^2 & 0 \\ a_3 & -a_1^2 + 2a_0a_2 & a_1 \\ a_5 & a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & a_0^2 \\ a_3 & -a_2 & -a_1^2 + 2a_0a_2 \\ a_5 & -a_4 & a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$

Einstellregeln zum Betragsoptimum (2)

■ 2. Fall: Deutlich große Streckenzeitkonstanten vorhanden

Strecke $G(s)$	Regler $R(s)$	Einstellregeln
$\frac{k_S}{\prod_{v=1}^n (1+T_v s)}$ <p>1 große Zeitkonstante: $T_1 \gg T_\Sigma = \sum_{v=2}^n T_v$</p>	$\text{PI} : k_R \frac{1+T_R s}{s}$	$k_R = \frac{1}{2k_S T_\Sigma} \quad , \quad T_R = T_1$
$\frac{k_S}{\prod_{v=1}^n (1+T_v s)}$ <p>2 große Zeitkonstanten: $T_1, T_2 \gg T_\Sigma = \sum_{v=3}^n T_v$</p>	$\text{PI} : k_R \frac{1+T_R s}{s}$	$k_R = \frac{1}{2k_S} \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{(T_1 + T_2) T_1 T_2} \quad ,$ $T_R = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}$
	$\text{PID} : k_R \frac{(1+T_{R1} s)(1+T_{R2} s)}{s}$	$k_R = \frac{1}{2k_S T_\Sigma} \quad , \quad T_{R1} = T_1 \quad , \quad T_{R2} = T_2$

Wurzelortskurve (WOK)

Definition

Def.: Wurzelortskurve (WOK)

Die Wurzelortskurve besteht aus den **n Bahnen**, die die **n Pole des geschl. Regelkreises** durchlaufen, wenn der Verstärkungsfaktor k des offenen Kreises von 0 gegen $+\infty$ läuft

➔ WOK zeigt also die Lage der Pole des geschl. Kreises bei Variation des Verstärkungsfaktors k von 0 bis $+\infty$ → **Stabilitätsaussage**

Der Regelkreis ist stabilisierbar, wenn es einen Verstärkungsfaktor k gibt, bei dem alle Pole des geschlossenen Kreises links liegen

Konstruktionsregeln der WOK (1)

Offener Kreis:
$$F_o(s) = k \frac{P_o(s)}{Q_o(s)} = k \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - n_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu})}, k > 0$$

0

Pole und Nst. von $F_o(s)$ berechnen

m : Anzahl Nullstellen

n : Anzahl Pole

R1: Die n Äste der WOK **beginnen** für $k = 0$ **in den Polen** des offenen Kreises. Sie **enden** für $k = +\infty$ **in den Nullstellen** des offenen Kreises.

$(n - m)$ Äste der WOK streben ins Unendliche.

R2: WOK verläuft symmetrisch zur reellen Achse der s -Ebene
 → wichtig für **R8**

Konstruktionsregeln der WOK (2)

R3: Ein Punkt der **reellen Achse** gehört dann zur WOK, wenn **rechts von ihm** auf der reellen Achse eine **ungerade Anzahl von reellen Polen und Nullstellen** gelegen ist.
 Vielfachheit der Pole und Nullstellen beachten!

R4: Wurzelschwerpunkt der Asymptoten der WOK:

Punkt auf der reellen Achse, wo sich die Asymptoten der ins Unendliche strebenden Äste der WOK schneiden:

$$\delta_w = \frac{\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re}\{p_{\nu}\} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}\{n_{\mu}\}}{n - m}$$

R5: Anstiegswinkel der Asymptoten der WOK:

$$\varphi_i = (2i + 1) \cdot \frac{\pi}{n - m}, \quad i = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Konstruktionsregeln der WOK (3)

R6: Verzweigungspunkte der WOK

Müssen zur WOK gehören, sonst entfallen

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - n_{\mu}} - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - p_{\nu}} = 0$$

R7: r Äste der WOK schneiden sich im Verzweigungspunkt

→ Winkel $\Delta\Psi$ zwischen benachbarten Kurvenstücken:

$$\Delta\Psi = \frac{\pi}{r}$$

R8: Polaustritts-/Nullstelleneintrittswinkel

s_ρ Pol oder Nullstelle des offenen Kreises mit Vielfachheit r_ρ

$$\varphi_{\rho i} = -\frac{1}{\varepsilon_\rho r_\rho} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ s_\lambda \neq s_\rho}}^{m+n} \varepsilon_\lambda \angle(s_\rho - s_\lambda) + (2i + 1) \frac{\pi}{\varepsilon_\rho r_\rho}, \quad i = 0, 1, \dots, r_\rho - 1$$

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} +1, & \text{falls } s_\lambda \text{ eine Nullstelle } n_\mu \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } s_\lambda \text{ eine Polstelle } p_\nu \text{ ist} \end{cases}$$

■ Hinweise:

- Für Pole / Nullstellen in der reellen Achse keine Formel verwenden → **(R3)**
- Symmetrie zur reellen Achse ausnutzen **(R2)**
- Ggf. Geo-Dreieck für Winkelbestimmung

Konstruktionsregeln der WOK (5)

R9: Schnittpunkte der WOK mit der imaginären Achse:

$$F_o(s) = k \frac{P_o(s)}{Q_o(s)} = k \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - n_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu})}, k > 0$$

Schnittpunkte erhält man aus der char. Glg. (geschl. RK):

$$1 + F_o(s) = 0 \iff k P_o(j\omega) + Q_o(j\omega) = 0$$

- $\text{Re}\{ \} = 0$ und $\text{Im}\{ \} = 0 \rightarrow$ Auflösen nach ω und k
- So berechnet man die **Eigenfrequenz** ω und die **Verstärkung** k an der Stabilitätsgrenze (= imaginäre Achse)
 \rightarrow Wichtig für die Stabilitätsüberprüfung

Aufgabe 30 d)

- R1: $n=2, m=0 \rightarrow 2$ Äste streben nach ∞
- R3: reelle Achse ist kein Teil der WOK (da kein Pol/NSte auf ihr)
- R4: Wurzelschwerpunkt:

$$\delta_w = \frac{\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re}\{p_\nu\} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}\{n_\mu\}}{n - m}$$

$$\delta_w = \frac{\{-2 - 2\} - \{0\}}{2 - 0} = -\frac{4}{2} = -2$$

Aufgabe 30 d)

- R5: Anstiegswinkel der Asymptoten:

$$\varphi_i = (2i + 1) \cdot \frac{\pi}{n - m}, \quad i = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

$$\varphi_0 = 1 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 30 d)

■ R8: Polaustrittswinkel:

$$\varphi_{\rho i} = -\frac{1}{\varepsilon_{\rho} r_{\rho}} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ s_{\lambda} \neq s_{\rho}}}^{m+n} \varepsilon_{\lambda} \angle(s_{\rho} - s_{\lambda}) + (2i + 1) \frac{\pi}{\varepsilon_{\rho} r_{\rho}}, \quad i = 0, 1, \dots, r_{\rho} - 1$$

$$\varepsilon_{\lambda} = \begin{cases} +1, & \text{falls } s_{\lambda} \text{ eine Nullstelle } n_{\mu} \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } s_{\lambda} \text{ eine Polstelle } p_{\nu} \text{ ist} \end{cases}$$

$$\varphi_{10} = -\frac{1}{-1 \cdot 1} \left\{ -1 \cdot \frac{\pi}{2} \right\} + 1 \cdot \frac{\pi}{-1 \cdot 1} = -\frac{3\pi}{2} \triangleq \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{20} = -\frac{1}{-1 \cdot 1} \left\{ -1 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} + 1 \cdot \frac{\pi}{-1 \cdot 1} = -\frac{\pi}{2} \triangleq \frac{3\pi}{2}$$

■ → WOK vollständig bestimmt

Nächstes Tut

- Am 09. Juli
- Im Rechenzentrum: I-Pool