

Aufgabe 1 (TR)

a) $u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = L \cdot s}$

b) $u_{\text{ges}}(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad \text{---} \quad U_{\text{ges}}(s) = \left(R + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s} \right) I(s)$

$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad \text{---} \quad U_C(s) = \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$

$\rightarrow U_C(s) = \frac{1}{Cs} \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} U_{\text{ges}}(s) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{U_C(s)}{U_{\text{ges}}(s)} = \frac{1}{1 + CRs + CLs^2}}$

c) $m \cdot \ddot{x}(t) = F_{\text{ext}}(t) = -c \cdot x(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{X(s)}{F_{\text{ext}}(s)} = \frac{1}{c + ms^2}}$

d) $m_R \ddot{x}_R(t) = F(t) - F_{cR}(t) - F_{dR}(t) \quad \text{---} \quad X_R(s) = \frac{1}{m_R s^2} [F(s) - F_{cR}(s) - F_{dR}(s)]$

$F_{cR}(t) = c_R (x_R(t) - \overset{=0}{x_B})$

$\text{---} \quad F_{cR}(s) = c_R X_R(s)$

$F_{dR}(t) = d_R (\dot{x}_R(t) - \overset{=0}{\dot{x}_B})$

$\text{---} \quad F_{dR}(s) = d_R s X_R(s)$

$\rightarrow X_R(s) = \frac{1}{m_R s^2} F(s) - \frac{c_R + d_R s}{m_R s^2} X_R(s) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{X_R(s)}{F(s)} = \frac{1}{c_R + d_R s + m_R s^2}}$

e) $m_R \ddot{x}_R(t) = F(t) - F_{cR}(t) - F_{dR}(t) + F_{cA}(t) + F_{dA}(t)$

$\text{---} \quad X_R(s) = \frac{1}{m_R s^2} [F(s) - F_{cR}(s) - F_{dR}(s) + F_{cA}(s) + F_{dA}(s)]$

$m_A \ddot{x}_A(t) = -F_{cA}(t) - F_{dA}(t)$

$\text{---} \quad X_A(s) = \frac{1}{m_A s^2} [-F_{cA}(s) - F_{dA}(s)]$

$F_{cA}(t) = c_A (x_A(t) - x_R(t))$

$\text{---} \quad F_{cA}(s) = c_A (X_A(s) - X_R(s))$

$F_{dA}(t) = d_A (\dot{x}_A(t) - \dot{x}_R(t))$

$\text{---} \quad F_{dA}(s) = d_A s (X_A(s) - X_R(s))$

3.+4. Gleichung in 1.+2. dann 1. in 2. einsetzen und umformen ergibt

$$\boxed{G(s) = \frac{X_A(s)}{F(s)} = \frac{c_A + d_A s}{(c_R + d_R s + m_R s^2)(c_A + d_A s + m_A s^2) + (c_A + d_A s) m_A s^2}}$$

- f) $\frac{X_{A1}(s)}{F_1(s)}$ und $\frac{X_{A2}(s)}{F_2(s)}$ ergeben sich wie in Teil e), außerdem gilt

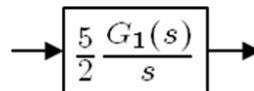
$$\frac{x_{A2}(t) - x_{A1}(t)}{d_{A12}} = \sin(\varphi_N(t)) \approx \varphi_N(t) \quad \text{---} \quad \Phi_N(s) = \frac{1}{d_{A12}} (X_{A2}(s) - X_{A1}(s))$$

$$\rightarrow \Phi_N(s) = \frac{1}{d_{A12}} \frac{c_A + d_A s}{(c_R + d_R s + m_R s^2)(c_A + d_A s + m_A s^2) + (c_A + d_A s) m_A s^2} \underbrace{(F_2(s) - F_1(s))}_{\Delta F(s)}$$

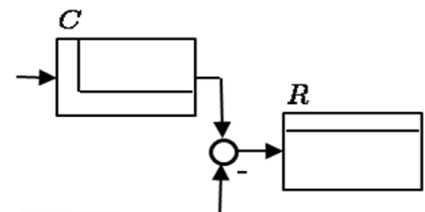
$$\rightarrow G(s) = \frac{\Phi_N(s)}{\Delta F(s)} = \frac{1}{d_{A12}} \frac{c_A + d_A s}{(c_R + d_R s + m_R s^2)(c_A + d_A s + m_A s^2) + (c_A + d_A s) m_A s^2}$$

Aufgabe 2 (TR)

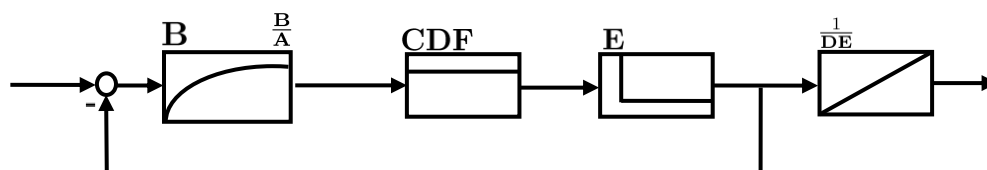
- a) Konstanten zusammenfassen, Integrator schreiben als $\frac{1}{s}$ ergibt



- b) Glieder im oberen Zweig vertauschen und die beiden Konstanten hinter die Summationsstelle ziehen



- c) - Gegenkopplung von Integrator und Konstante zu PT₁-Glied
 - Verlegen der Konstanten D und des Differenzierglieds E vor die Verzweigungsstelle → dadurch Integrator $\frac{1}{DE}$ am Systemausgang
 - Vertauschen von PT₁-Glied und Konstante F, Zusammenfassen von C, D, F

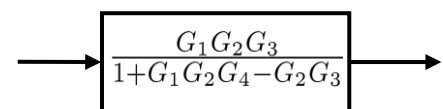


(auch andere Lösungen möglich)

- d) - Verlegen von G_2 hinter die Verzweigungsstelle und Zusammenfassen mit G_3 bzw. G_4
 - Verlegen von G_1 hinter die Summationsstelle → dadurch $\frac{1}{G_1}$ in der oberen Rückführung

- Vertauschen der beiden Summationsstellen (Kommutativgesetz)
 - Zusammenfassen der Gegenkopplung aus G_1 und $G_2 G_4$
 - Zusammenfassen mit $G_2 G_3$

- Zusammenfassung der Mitkopplung mit $\frac{1}{G_1}$



Aufgabe 4 (TR)

a) Ruhelage bestimmen: $0 = -5y_{AP}^2 + 125 \Rightarrow y_{AP} = \pm 5$

Implizite DGL: $g(\dot{y}, y, u) = \dot{y} + 5y^2 - u = 0$

Taylor-Entwicklung: $1 \cdot \Delta \dot{y} + 5 \cdot 2y_{AP} \cdot \Delta y - \Delta u = 0$

$\rightarrow \boxed{\Delta \dot{y} = \mp 50 \Delta y + \Delta u}$

b) Ruhelage bestimmen: $0 = 0 + 4x_{AP}^3 - \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_{AP} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Implizite DGL: $g(\ddot{x}, \dot{x}, x, F) = \ddot{x} + 5\dot{x} - 4x^3 + \cos F = 0$

Taylor-Entwicklung: $\Delta \ddot{x} + 5 \cdot \Delta \dot{x} - 4 \cdot 3x_{AP}^2 \cdot \Delta x - \sin F_{AP} \cdot \Delta F = 0$

$\rightarrow \boxed{\Delta \ddot{x} = -5\Delta \dot{x} + 3\Delta x + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta F}$

c) Ruhelage bestimmen: $0 - 2 = u_{AP}^2 + 0 - \sqrt{36} \Rightarrow u_{AP}^2 = 4 \Rightarrow u_{AP} = \pm 2$

Implizite DGL: $g(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u) = \frac{\ddot{y}}{3} - 2e^{\dot{y}} + \sqrt{y} - u^2 - \dot{u}^3 = 0$

Taylor-Entwickl.: $\frac{\Delta \ddot{y}}{3} - 2e^{\dot{y}_{AP}} \Delta \dot{y} + \frac{1}{2\sqrt{y_{AP}}} \Delta y - 3\dot{u}_{AP}^2 \Delta \dot{u} - 2u_{AP} \Delta u = 0$

$\rightarrow \boxed{\Delta \ddot{y} = 6\Delta \dot{y} - \frac{1}{4} \Delta y \pm 12\Delta u}$

d) Durch Betrachtung der Ein- und Ausgangsgrößen als Einheiten-behaftet müssen die Faktoren der linearisierten DGL ebenfalls Einheiten enthalten:

$$\Delta \ddot{x} = -5 \frac{1}{\text{sec}} \Delta \dot{x} + 3 \frac{1}{\text{sec}^2} \Delta x + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2 \text{N}} \Delta F$$

Nun gilt: $\Delta F = F_N \bar{F}, \quad \Delta x = x_N \bar{x}$

$$\Delta \dot{x} = \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{d\Delta x}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = x_N \cdot \dot{\bar{x}} \cdot \frac{1}{t_N} = \frac{x_N}{t_N} \dot{\bar{x}}$$

$$\Delta \ddot{x} = \frac{d\Delta \dot{x}}{dt} = \frac{d\Delta \dot{x}}{d\dot{\bar{x}}} \cdot \frac{d\dot{\bar{x}}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{x_N}{t_N} \cdot \ddot{\bar{x}} \cdot \frac{1}{t_N} = \frac{x_N}{t_N^2} \ddot{\bar{x}}$$

Einsetzen in linearisierte DGL: $\frac{x_N}{t_N^2} \ddot{\bar{x}} = -5 \frac{1}{\text{sec}} \frac{x_N}{t_N} \dot{\bar{x}} + 3 \frac{1}{\text{sec}^2} x_N \bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2 \text{N}} F_N \bar{F}$

Nennwerte einsetzen: $\boxed{\ddot{\bar{x}} = -5\dot{\bar{x}} + 3\bar{x} + 1000\sqrt{3} \cdot \bar{F}}$

Aufgabe 5 (TR)

a) Pole: $\lambda_1 = -1$, keine Nullstellen, Partialbruchzerlegung (PBZ) liegt schon vor

b) Pole: $\lambda_{1,2} = -1, -3$, Nullstellen: $\eta_1 = 2$, PBZ: $G(s) = \frac{2,5}{s+3} - \frac{1,5}{s+1}$

c) Pole: $\lambda_{1,2,3} = 0, \pm j$, Nullstellen: $\eta_{1,2} = 1, -3$, PBZ: $G(s) = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{4s}{s^2+1}$

d) Pole: $\lambda_{1,2,3} = 0, \frac{3}{2} \pm j\frac{1}{2}$, Nullstellen: $\eta_1 = -\frac{1}{T_V}$,

$$\text{PBZ: } G(s) = \frac{2k_p}{s} + \frac{k_p(5T_V + 6)}{s^2 - 3s + \frac{10}{4}} - \frac{2k_p}{s^2 - 3s + \frac{10}{4}}$$

e) Pole: $\lambda_{1,2,3} = -2, -3, 0$, Nullstellen: $\eta_{1,2,3} = 2, -\frac{1}{2T_V} \pm \frac{1}{2T_V} \sqrt{1 - \frac{4T_V}{T_N}}$,

$$\text{PBZ: } G(s) = \frac{k_p \left(\frac{2}{T_N} + 8T_V - 4 \right)}{s+2} - \frac{k_p \left(\frac{5}{3T_N} + 15T_V - 5 \right)}{s+3} - \frac{\frac{k_p}{3T_N}}{s} + k_p T_V$$

Aufgabe 6 (TU)

a) - Da nicht anders angegeben, handelt es sich um ein zeitkontinuierliches System $\rightarrow M_t = \mathbb{R}$

- Laut Systembeschreibung zwei Eingriffsmöglichkeiten vorhanden (an Stell- und Drosselventil), daher: $D_u = \left\{ \underline{u} = [u_H, \varphi]^T : M_t \rightarrow [[0..3\text{cm}], [0..0.5\text{rad}]]^T \right\}$

Da in der weiteren Aufgabe das Drosselventil jedoch stets konstant gehalten wird, kann dieses als Systemparameter statt als Eingangsgröße betrachtet werden $\rightarrow D_u = \{u = u_H : M_t \rightarrow [0..3\text{cm}]\}$

- Aus der angegebenen maximalen Füllstandshöhe ergibt sich für den Ausgangsgrößen-Funktionenraum $D_y = \{y = h : M_t \rightarrow [0..8\text{dm}]\}$

- S ist sicherlich kausal und zeitinvariant, vermutlich nichtlinear (da reales System), in der hier beschriebenen Form kann es als System mit konzentrierten Parametern betrachtet werden

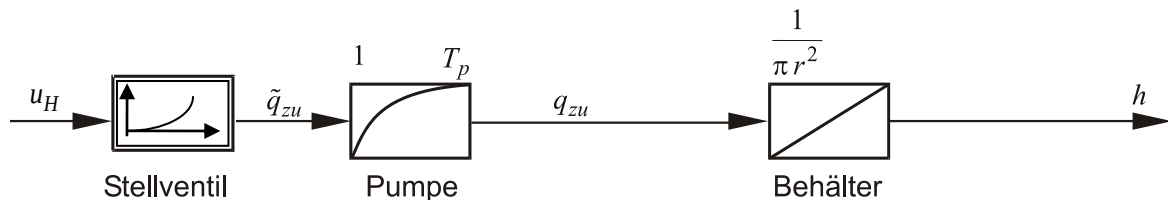
- nicht beschriebene Phänomene sind z.B. Temperatur/Viskosität des Mediums, Umgebungsluftdruck, Verzögerungen durch Trägheit der Wassersäule in den Rohren, etc.

b) Für den Tank gilt einerseits: $V = A_{\text{Tank}} \cdot h$, andererseits $V(t) = \int_0^t q(t) dt$

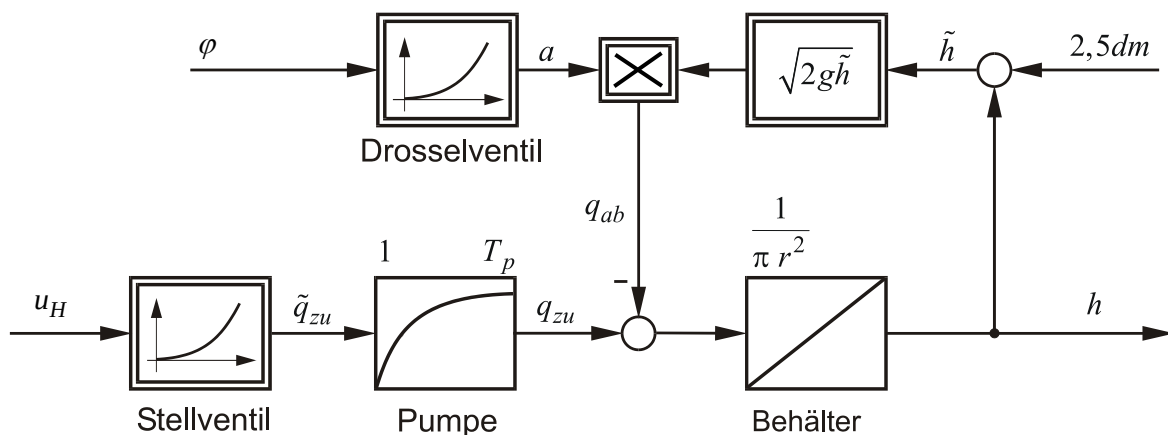
$$\rightarrow h(t) = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \int_0^t q_{\text{zu}}(t) dt \rightarrow \frac{H(s)}{Q_{\text{zu}}(s)} = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{1}{s}$$

Das Ventil wird durch die angegebene nichtlineare Kennlinie beschrieben und die Pumpe durch ein PT1-Glied mit der Zeitkonstanten T_p .

$$\rightarrow \frac{Q_{zu}(s)}{\tilde{Q}_{zu}(s)} = \frac{1}{1 + T_p s}, \quad \tilde{q}_{zu} = f(u_H)$$



- c) Nun gilt $q(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t)$ mit $q_{ab} = v \cdot a = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + 2,5)} \cdot a(\varphi)$. Das erweiterte Signalfussbild lautet wie folgt:



- d) Bestimmung der Ruhelage (Index R) aus dem Signalfussbild

- Eingang des I-Gliedes Null setzen: $q_{zu,R} = q_{ab,R}$

- Aus der Wertetabelle des Drosselventils ablesen:

$$a_R (\varphi_R = 0.25 \text{ rad}) = 0,012 \text{ dm}^2$$

- $\tilde{h}_R = 2.5 \text{ dm} + h_R = 5 \text{ dm}$ (da laut Aufgabenstellung $h_R = 2.5 \text{ dm}$)

$$v_R = \sqrt{2g\tilde{h}_R} = 3.1321 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1879.3 \frac{\text{dm}}{\text{min}}$$

$$\Rightarrow q_{ab,R} = a_R \cdot v_R = 0,012 \text{ dm}^2 \cdot 1879,3 \frac{\text{dm}}{\text{min}} \approx 22,55 \frac{\text{dm}^3}{\text{min}} = q_{zu,R}$$

- PT₁-Glied der Pumpe: $q_{zu,R} = 1 \cdot \tilde{q}_{zu,R}$

- Aus Kennlinie/Funktion des Stellventils: $u_{H,R} \left(\tilde{q}_{zu,R} = 22,55 \frac{\text{l}}{\text{min}} \right) = 1,5 \text{ cm}$

Linearisierung um obige Ruhelage

- Quadratwurzel: $v = \sqrt{2g\tilde{h}}$,

$$\Rightarrow \Delta v = \frac{1}{2} \frac{2g}{\sqrt{2g\tilde{h}_R}} \Delta \tilde{h}, \Rightarrow \Delta v \approx \underbrace{188 \frac{1}{\text{min}}}_{K_1} \cdot \Delta \tilde{h}$$

- Summation: $\tilde{h} = 2.5 \text{ dm} + h$, $\Rightarrow \Delta \tilde{h} = \Delta h$

- Multiplikation: $q_{ab} = a \cdot v$,

$$\text{da } a = a_R = \text{konst.} \Rightarrow \Delta q_{ab} = a_R \cdot \Delta v = \underbrace{0.012 \text{ dm}^2}_{K_2} \cdot \Delta v$$

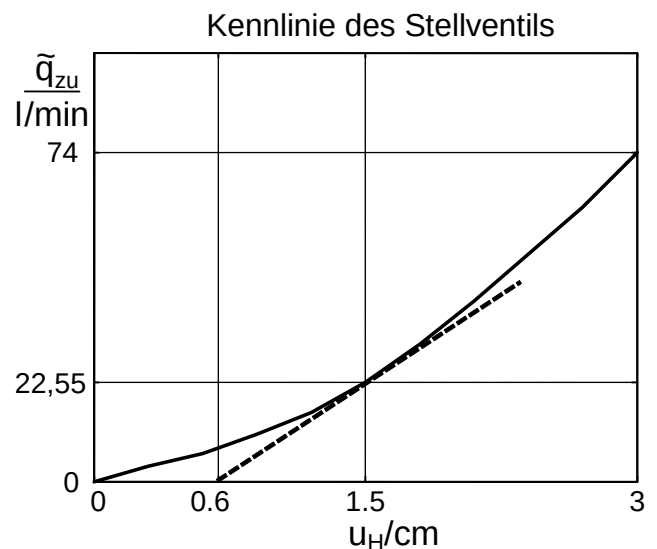
- Stellventil (für $u > 0,3 \text{ cm}$): $\tilde{q}_{zu} = 10 \cdot u^{1,8} + 1,85$

$$\Rightarrow \Delta q_{zu} = 10 \cdot 1,8 \cdot u_{H,R}^{0,8} \cdot \Delta u_H = \underbrace{24,9 \frac{l}{\text{cm} \cdot \text{min}}}_{K_3} \cdot \Delta u_H$$

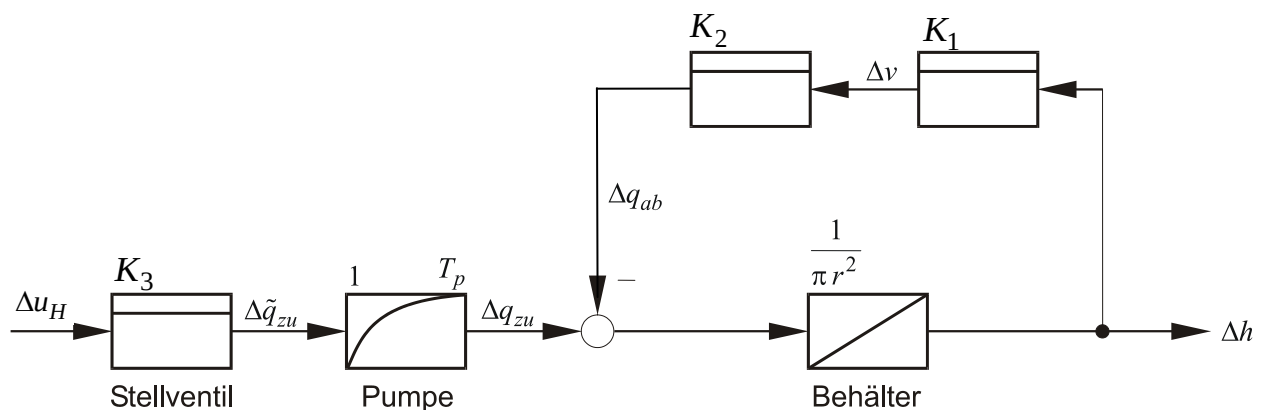
oder graphisch:

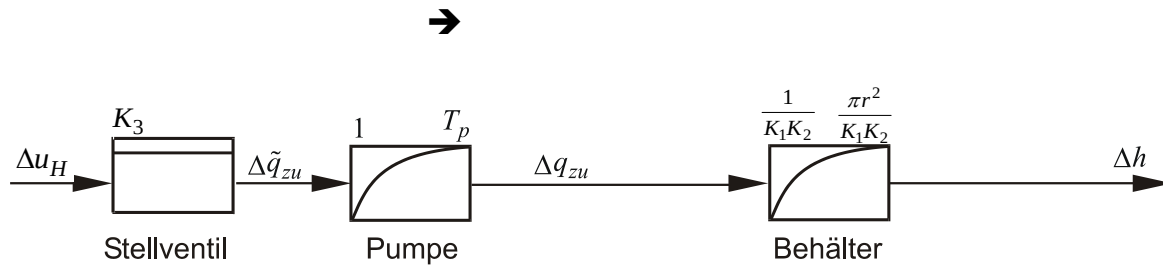
Aus der Tangente im Arbeitspunkt der Kennlinie folgt:

$$K_3 = \frac{22,55 \frac{l}{\text{min}}}{0,9 \text{ cm}} \approx 25 \frac{l}{\text{cm} \cdot \text{min}}$$



- Linearisiertes Signalflussbild





- e) Zunächst werden die Delta-Größen sowie die Zeit als Basisgröße durch die normierten Größen ausgedrückt:

$$\Delta h = \bar{h} \cdot h_N = \bar{h} \cdot 5dm, \quad \Delta u_H = \bar{u}_H \cdot u_{H,N} = \bar{u}_H \cdot 2cm, \quad t = \bar{t} \cdot t_N = \bar{t} \cdot 1min$$

Die Ableitungen der Delta-Größen ergeben sich zu

$$\Delta \dot{h} = \frac{d\Delta h}{dt} = \frac{d\Delta h}{d\bar{h}} \cdot \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = h_N \cdot \dot{\bar{h}} \cdot \frac{1}{t_N} = \frac{h_N}{t_N} \dot{\bar{h}} = \frac{5dm}{min} \dot{\bar{h}}$$

$$\Delta \ddot{h} = \frac{d\Delta \dot{h}}{dt} = \frac{d\Delta \dot{h}}{d\bar{h}} \cdot \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{h_N}{t_N} \cdot \ddot{\bar{h}} \cdot \frac{1}{t_N} = \frac{h_N}{t_N^2} \ddot{\bar{h}} = \frac{5dm}{min^2} \ddot{\bar{h}}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich:

$$5dm \cdot \bar{h} + (0,025min + 7,975min) \cdot \frac{5dm}{min} \cdot \dot{\bar{h}} + 0,025min \cdot 7,975min \cdot \frac{5dm}{min^2} \cdot \ddot{\bar{h}} = 11,02 \frac{dm}{cm} \cdot 2cm \cdot \bar{u}_H$$

$$\text{Division durch } 5dm \Rightarrow \bar{h} + 8 \cdot \dot{\bar{h}} + 0,2 \cdot \ddot{\bar{h}} = 4,41 \cdot \bar{u}_H$$

- f) Die transformierte DGL lautet:

$$H(s) \left(1 + 8s + 0,2s^2 \right) = 4,41 \cdot U_H(s)$$

Die linearisierte Strecken-Übertragungsfunktion ergibt sich also zu

$$G(s) = \frac{H(s)}{U_H(s)} = \frac{4,41}{1 + 8s + 0,2s^2}$$

Das System weist somit keine Nullstellen auf, die beiden Pole liegen bei

$$s_{1/2} = -20 \pm \sqrt{395} \approx -20 \pm 19,87$$

$$\Rightarrow s_1 = -39,87, \quad s_2 = -0,13$$