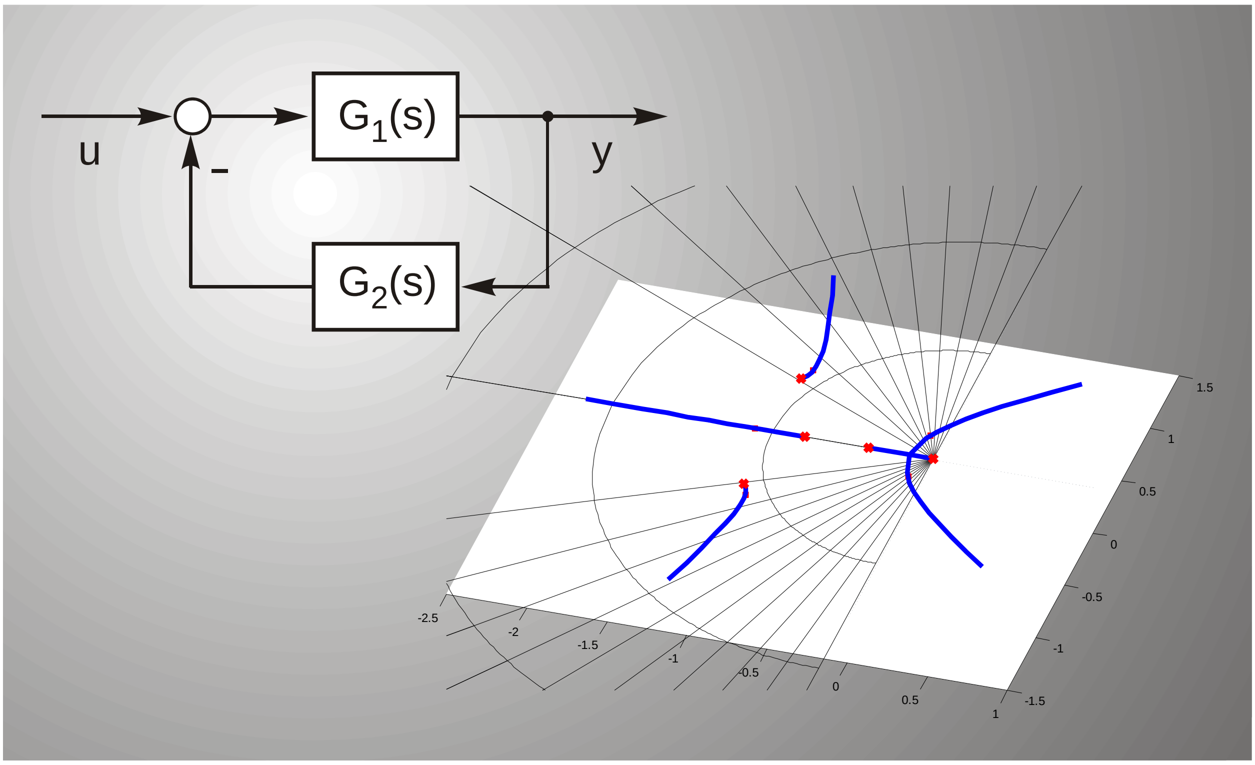
Aufgaben zur Übung 1

Systemdynamik und Regelungstechnik

M. Sc. Patrick Sauter



Sommersemester 2015

http://www.irs.kit.edu/1528.php

KIT Karlsruher Institut für Technologie
IRS Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann

Erläuterungen zu den Übungsblättern:

Die Übungsblätter enthalten verschiedene Typen von Aufgaben:

- Anwendungsaufgaben:
  - *Übungsaufgaben* sind mit UE gekennzeichnet und werden in der Übung vorgerechnet. Die Lösungswege sind auf den in der Übung gezeigten Folien enthalten, welche nach der Übung im Internet herausgegeben werden.
  - *Tutoriumsaufgaben* sind mit TU gekennzeichnet und sind ausschließlich zum selbstständigen Bearbeiten vor bzw. im Tutorium gedacht. Diese sind regelmäßig auch in MATLAB/SIMULINK zu bearbeiten. Lösungen zu Tutoriumsaufgaben werden im jeweiligen Tutorium besprochen und ggf. nach der Tutorienwoche bereitgestellt.

- *Trainingsaufgaben* (TR):

  Diese enthalten mehrere ähnliche Teilaufgaben zum Erlernen und Trainieren (auch im Hinblick auf die Klausur) von elementaren, klar abgegrenzten Methoden. Der Schwierigkeitsgrad innerhalb einer Trainingsaufgabe steigt zunehmend an, beginnend bei der ersten Teilaufgabe.
  In der Übung werden von Trainingsaufgaben lediglich die ersten Teilaufgaben im Rahmen der Wiederholung des Stoffs behandelt. Ggf. werden die anderen Teilaufgaben teilweise oder auf Nachfrage im Tutorium besprochen.
  Es liegt in der Hand jedes einzelnen Studierenden, ob und wie viel er sich mit den restlichen Teilaufgaben beschäftigt. Es wird jedoch dringend empfohlen, auch und gerade diese Methoden selbstständig zu üben, da sie das Handwerkszeug für die SRT darstellen und oft erst in der Anwendung hinreichend verstanden werden.
  Eine Kurzlösung zu den Trainingsaufgaben wird im Anschluss an die Tutorienwoche im Internet herausgegeben.

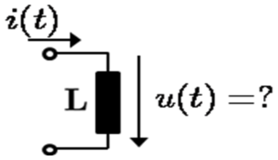
Der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben wird durch Pluszeichen symbolisiert.

+	bedeutet	*leichte Aufgabe*
+++(+)	bedeutet	*Klausurniveau (oder höher)*

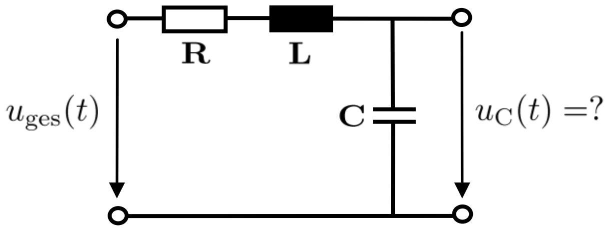
Aufgabe 1 (TR)

Stellen Sie die Differentialgleichungen auf, welche das System korrekt beschreiben. Zerlegen Sie das System dazu ggf. in Teilsysteme. Transformieren Sie die Differentialgleichungen in den Frequenzbereich (Laplace-Bereich) und fassen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme zusammen. (Die gesuchte Ausgangsgröße ist jeweils mit einem Fragezeichen gekennzeichnet.)

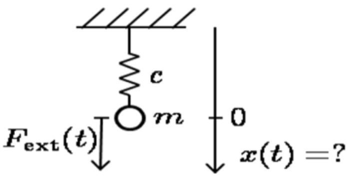
a) *Induktivität*



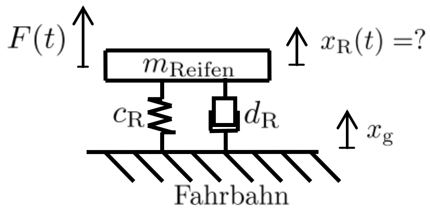
b) *RLC-Serienschwingkreis*



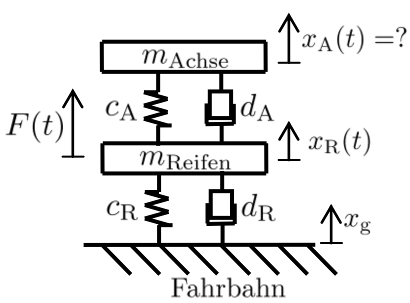
c) *Federpendel*



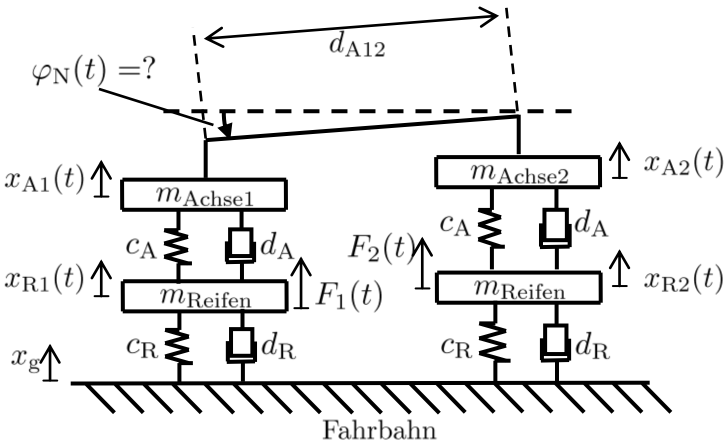
d) *Reifenmodell als Feder-Masse-Dämpfer*



e) *Reifen-Achse-System*
(Eingangsgröße: F(t))



f) *Zwei-Achs-System mit Nicken*
(Eingangsgröße: $\Delta F(t) = F_2(t) - F_1(t)$,
Betrachtung für kleine φ_N)

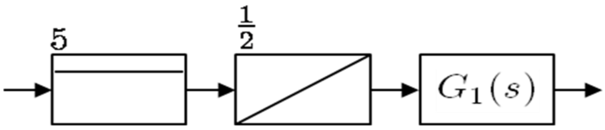


Hinweis: Vergleichen Sie die mathematische Struktur der Lösungen von Teilaufgabe b) und d). Wie man sieht, lassen sich ganz unterschiedliche technische Systeme mathematisch identisch beschreiben.

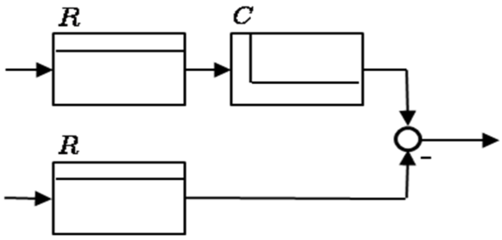
Aufgabe 2 (TR)

Vereinfachen Sie die folgenden Signalflussbilder so weit wie möglich. (Hinweis: Alle abgebildeten Regelkreisglieder und Übertragungsfunkionen sind LTI-Glieder)

a)

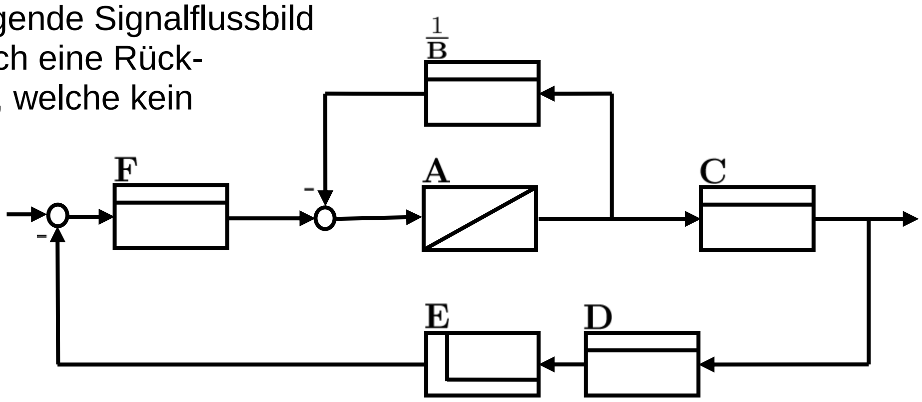


b)

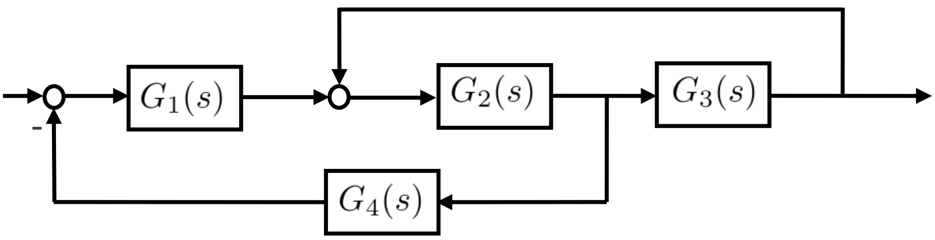


c)

Formen Sie das folgende Signalflussbild so um, dass nur noch eine Rückführung übrig bleibt, welche kein Übertragungsglied mehr enthält.

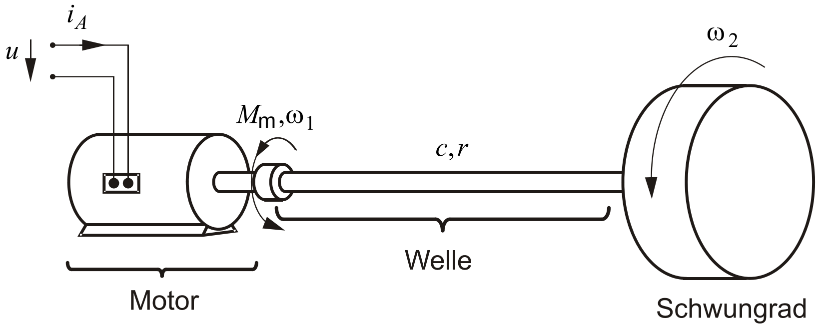


d) Vereinfachen Sie so weit, dass keine Rückführung mehr vorliegt.

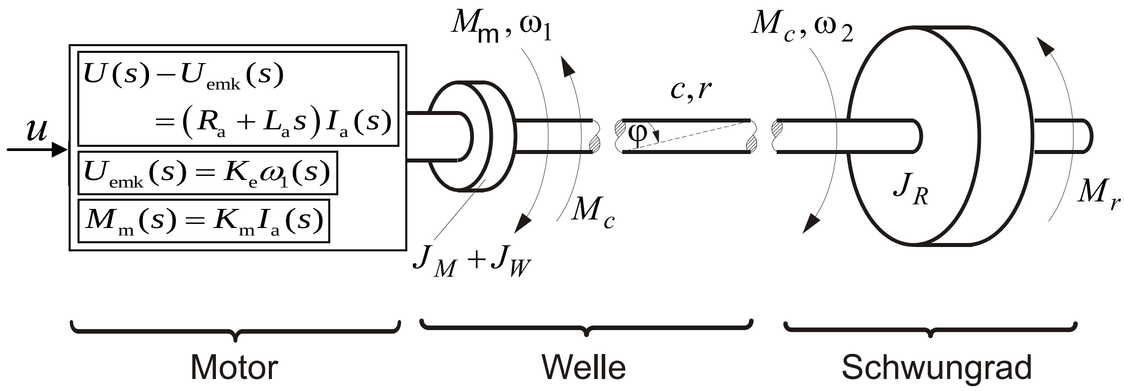


Aufgabe 3 (UE) +++/+

Ein konstant erregter Gleichstrommotor treibt über eine lange elastische Welle eine Last, z.B. ein Schwungrad (Trägheitsmoment J_R), an. Die Wellenelastizität wird durch die Ersatzfederkonstante c hinreichend genau beschrieben. Dabei überträgt die Welle das Torsionsmoment M_c. Die Lagerreibung des Ankers wird vernachlässigt, die Lagerreibung der Last wird mit der Ersatzdämpfungskonstante r approximiert.



a) Zum Aufstellen der Modellgleichungen wird das System zunächst in die Teilsysteme *Motor*, *Welle* und *Schwungrad* zerlegt. Die Funktionalbeziehungen des elektrischen Teilsystems eines Gleichstrommotors (s. Abbildung) wurden in der Vorlesung bereits aufgestellt. Bestimmen Sie nun die Gleichungen des mechanischen Teilsystems. Dazu ist es zweckmäßig, das System so darzustellen, dass alle Variablen eingezeichnet werden können:



b) Zeichnen Sie ein Signalflussbild des Gesamtsystems, indem Sie zunächst die Signalflussbilder der Teilsysteme bestimmen und diese dann miteinander verbinden.

Hinweis: Die Winkelgeschwindigkeit ω_2 des Schwungrads sei die Ausgangsgröße des Systems

c) Vereinfachen Sie das vermaschte Signalflussbild des Gesamtsystems so weit, dass als einzige Rückführung nur noch die Gegenkopplung des Torsionsmoments M_c erhalten bleibt.

Aufgabe 4 (TR)

Linearisieren Sie die folgenden Systeme um den Arbeitspunkt. Bestimmen Sie dazu ggf. zunächst den/die Arbeitspunkt/e anhand der Angaben.

a) $\dot{y} = -5y^2 + u$, AP: Ruhelage mit $u_{\text{AP}} = 125$

b) $\ddot{x} = -5\dot{x} + 4x^3 - \cos F$, AP: Ruhelage mit $F_{\text{AP}} = \dfrac{\pi}{3}$

c) $\dfrac{\ddot{y}}{3} - 2e^{\dot{y}} = u^2 + \dot{u}^3 - \sqrt{y}$, AP: Ruhelage mit $y_{\text{AP}} = 36$

d) Betrachten Sie erneut die nichtlineare DGL aus Aufgabenteil b). Die Ein- und Ausgangsgrößen des so beschriebenen Systems seien physikalische Größen mit den Einheiten

$$[F] = N \text{ (Newton) und } [x] = m \text{ (Meter).}$$

Normieren Sie die bereits linearisierte Differentialgleichung, indem Sie die normierten Größen

$$\bar{F} = \frac{\Delta F}{F_{\text{N}}}, \quad \bar{x} = \frac{\Delta x}{x_{\text{N}}} \quad \text{und} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_{\text{N}}}$$

einführen. Die Nennwerte der Größen seien dabei:

$$F_{\text{N}} = 1000N, \quad x_{\text{N}} = 0{,}5m \quad \text{und} \quad t_{\text{N}} = [t] = 1\text{sec}$$

Aufgabe 5 (TR)

Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der folgenden Übertragungsfunktionen und führen Sie jeweils eine Partialbruchzerlegung durch!

a)

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

b)

$$G(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+3)}$$

c)

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{s\left(s^2+1\right)}$$

d)

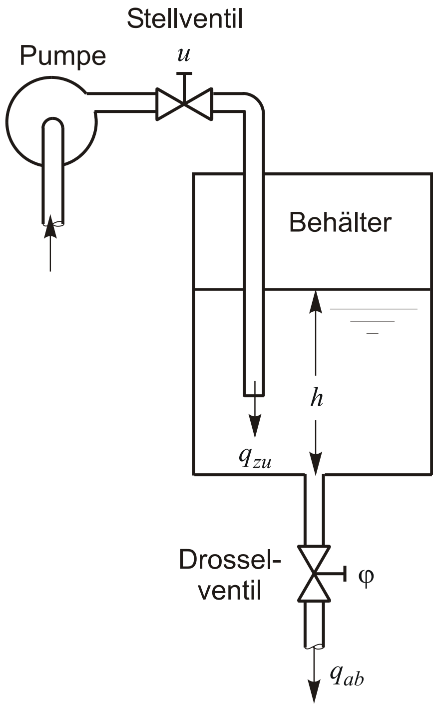
$$G(s) = k_{\text{p}}(1 + T_{\text{V}}s)\frac{5}{\left(s^3 - 3s^2 + \frac{10}{4}s\right)}$$

e)

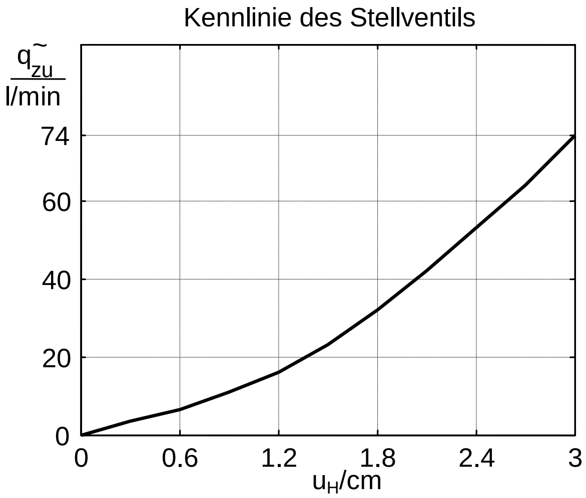
$$G(s) = \frac{s-2}{(s+2)(s+3)} \cdot \left(k_{\text{p}} + \frac{k_{\text{p}}}{T_{\text{N}}s} + k_{\text{p}}T_{\text{V}}s\right)$$

Aufgabe 6 (TU) ✣✣✣

Das dynamische Verhalten eines am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme aufgebauten Füllstandsversuchs soll untersucht werden. Das nebenstehende Bild zeigt den prinzipiellen Aufbau. Zu- und Abfluss können durch Ventile mit dem Hub u_H bzw. mit dem Öffnungswinkel φ verändert werden. Der zufließende Volumenstrom wird von einer elektrisch angetriebenen Pumpe gefördert. Bei Änderung der Ventilstellung stellt sich ihre Fördermenge mit einem exponentiellen Verlauf auf den neuen Wert ein.



In dieser Aufgabe soll das sprachlich beschriebene System formalisiert, modelliert und linearisiert werden.



Die Durchflusskennlinie des Stellventils wurde durch Messung ermittelt und ist in nebenstehender Abbildung dargestellt.
Sie kann näherungsweise durch die Funktion

$$\tilde{q}_{\text{zu}}(u_H) = \begin{cases} 10 \cdot u_{\text{H}} & , 0cm \le u_{\text{H}} < 0,3cm \\ 10 \cdot u_{\text{H}}^{1,8} + 1,85, & u_{\text{H}} \ge 0,3cm \end{cases}$$

beschrieben werden.

Mit Hilfe des Drosselventils kann der Abflussquerschnitt a verändert werden. Der Zusammenhang ist in folgender Wertetabelle angegeben:

φ / rad	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
a / dm^2	0	0,001	0,003	0,005	0,008	0,012	0,017	0,022	0,03	0,039	0,05

Weitere Systemparameter sind wie folgt definiert:

$h/[dm]$: Füllstandshöhe im Behälter ($h_{\text{max}} = 8dm$);

$r = 2,4dm$: Radius des zylindrischen Flüssigkeitsbehälters;

$T_{\text{P}} = 1.5sek$: Zeitkonstante der Pumpe;

Für die Erdbeschleunigung gelte: $g = 9.81\, m/s^2$.

a) Wie lauten die in der Vorlesung definierte Mengen an Zeitpunkten M_t sowie die Ein- und Ausgangsgrößen-Funktionenräume D_u und D_y für dieses System? Welche Eigenschaften vermuten Sie für die Abbildungsvorschrift $S: D_\mathrm{S} \to D_\mathrm{y}$? Welche nicht beschriebenen Größen oder Umwelteinflüsse könnten auf das System einwirken?

Das Drosselventil werde zunächst als geschlossen angenommen.

b) Stellen Sie die Modellgleichungen des Systems, d.h. von Tank und Zufluss mit Pumpe und Stellventil auf! Betrachten Sie dazu den Ventilhub u_H als Eingangs- und die Füllhöhe im Tank h als Ausgangsgröße. Welches Systemverhalten weist ein Flüssigkeitsbehälter also offensichtlich auf?

Hinweis: Machen Sie sich klar, wie die Größen h und q_zu mit dem im Tank befindlichen Volumen in Beziehung stehen.

Nach der Formel von Torricelli lautet der Zusammenhang zwischen der Abflussgeschwindigkeit v am Boden eines Gefäßes und der Höhe h der Wassersäule über dem Abfluss: $v = \sqrt{2gh}$.

c) Wie ändert sich die Systemstruktur, wenn das Drosselventil geöffnet wird? Zeichnen Sie das erweiterte Signalflussbild des Systems! Markieren Sie dabei nichtlineare Übertragungsglieder durch einen doppelten Rahmen!

Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass die Position des Drosselventils 2,5 dm unterhalb des Tankbodens liegt.

Im Weiteren soll das System um einen Arbeitspunkt linearisiert werden. Die gewünschte stationäre Füllstandshöhe betrage $h_\mathrm{R} = 2.5\,dm$, wobei das Drosselventil einen Öffnungswinkel von $\varphi = 0,25\ rad$ aufweise.

d) Berechnen Sie für diesen Füllstand die Ruhelage des Systems und linearisieren Sie das System um diesen Ruhezustand! Zeichnen Sie das linearisierte Signalflussbild und vereinfachen Sie dieses so weit, dass keine Rückführung mehr darin vorkommt!

Die Differentialgleichung des linearisierten Systems laute nun

$$\Delta h + \left(T_P + \frac{\pi r^2}{2,269\,\frac{dm^2}{\min}} \right) \Delta\dot{h} + T_P \frac{\pi r^2}{2,269\,\frac{dm^2}{\min}} \Delta\ddot{h} = \frac{25\,\frac{l}{cm\min}}{2,269\,\frac{dm^2}{\min}} \Delta u_H$$

e) Normieren Sie diese durch Einführung der Größen $\overline{h} = \frac{\Delta h}{h_N}$, $\overline{u}_H = \frac{\Delta u_H}{u_{H,N}}$ und $\overline{t} = \frac{t}{t_N}$ mit den Nennwerten $h_\mathrm{N} = 5dm$, $u_\mathrm{H,N} = 2cm$ und $t_\mathrm{N} = 1\min$!

f) Geben Sie die Übertragungsfunktion des linearisierten Systems an und berechnen Sie seine Pole und Nullstellen!