

Systemdynamik und Regelungstechnik

Übung 3: Frequenzbereichsdarstellungen, Stabilität

Lukas Kölsch, M. Sc.

INSTITUT FÜR REGELUNGS- UND STEUERUNGSSYSTEME (IRS)



Übung/Tutorium 3: Themen

Übung

Tutorium

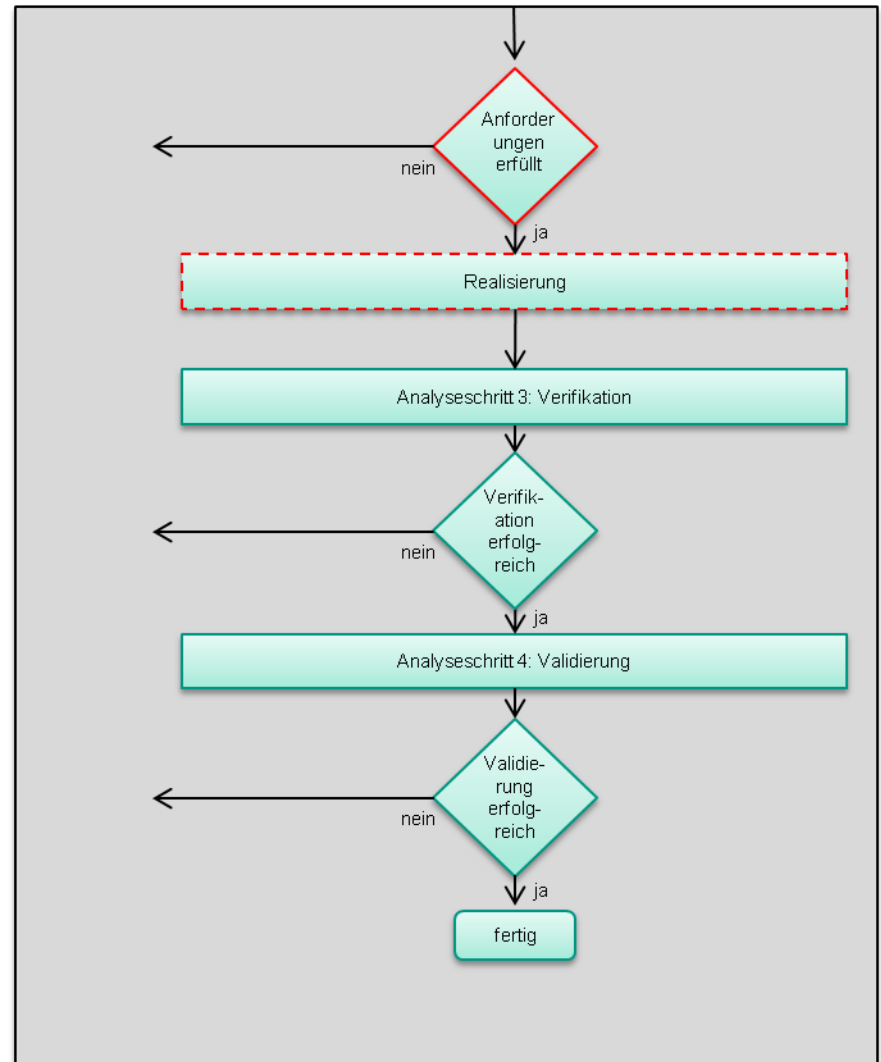
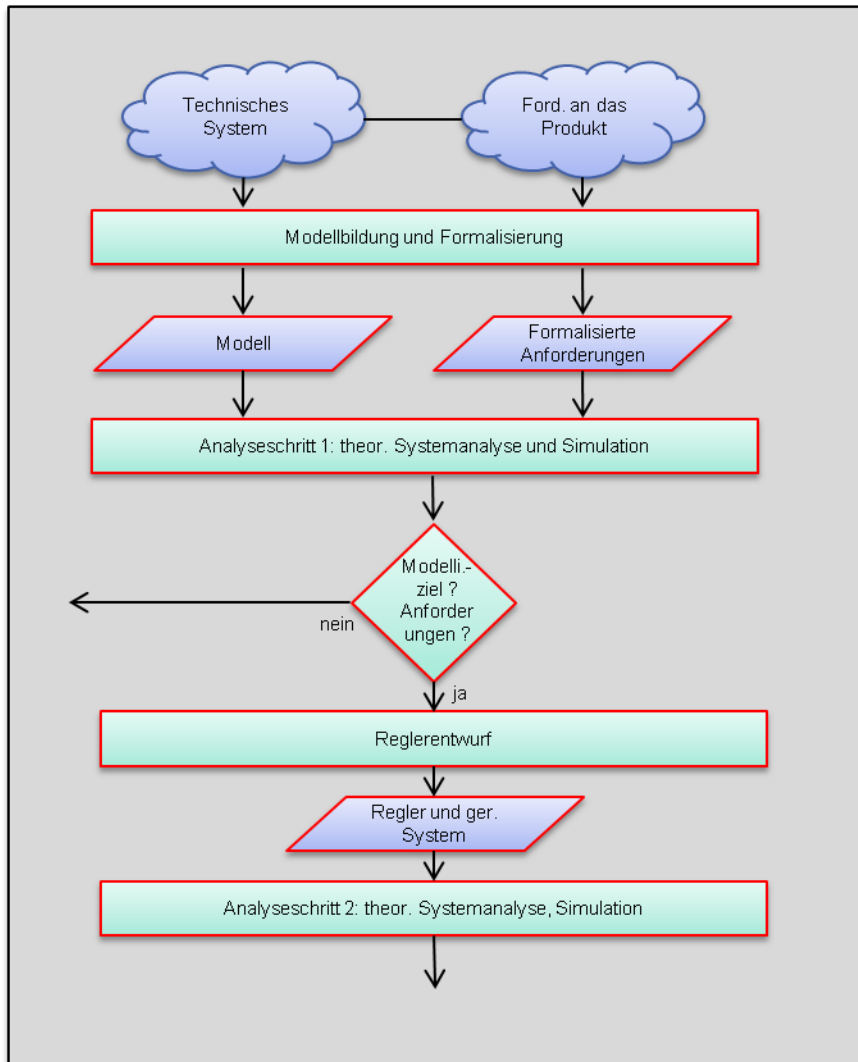
offener/geschlossener RK

Frequenzbereichsdarstellungen

Graphische Stabilitätskriterien

Algebraisches
Stabilitätskriterium

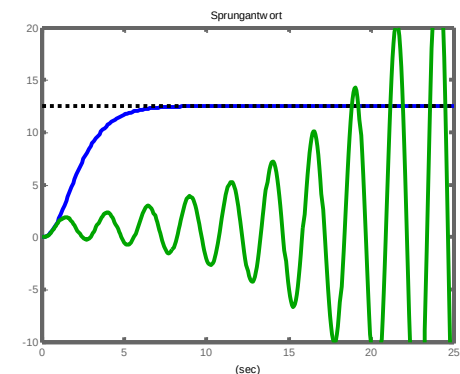
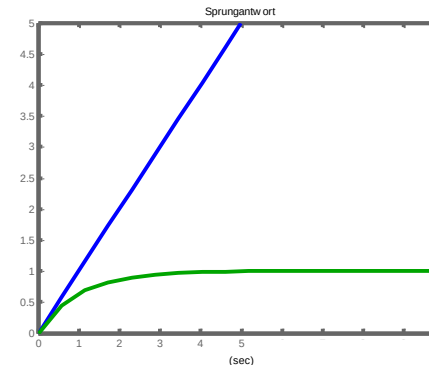
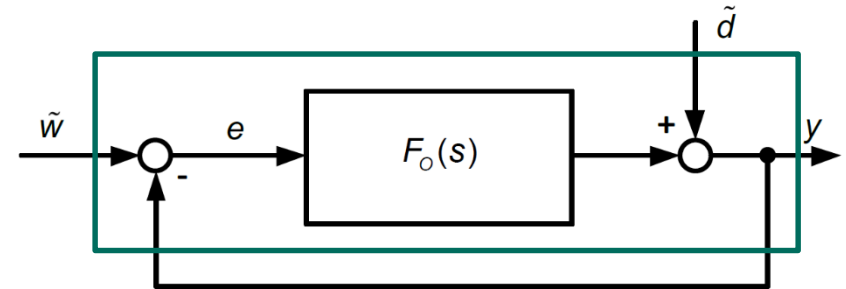
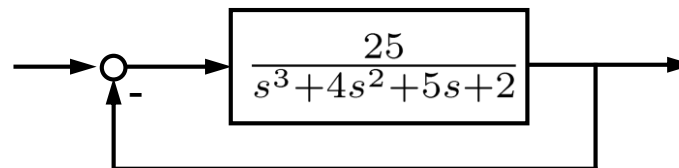
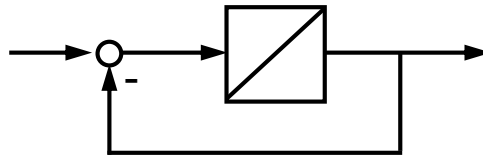
Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



Offener und geschlossener Regelkreis

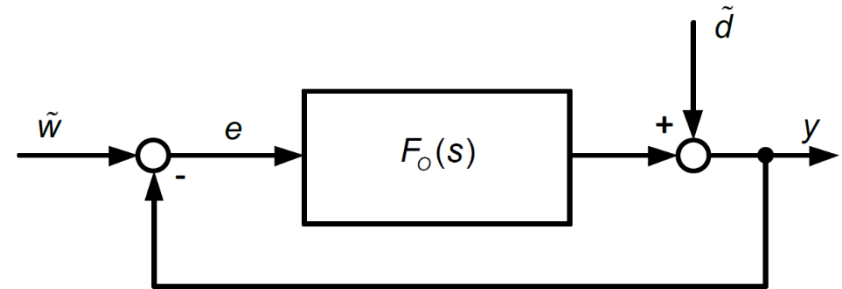
- Stabilität/stationäres Verhalten des offenen und geschlossenen Kreises sind im Allgemeinen unterschiedlich!

■ Beispiele



Offener und geschlossener Regelkreis (2)

$$G_w(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}$$



- Der Nenner des geschlossenen Kreises ergibt sich aus der Summe von Zähler und Nenner des offenen Kreises:

$$F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} \Rightarrow G_w(s) = \frac{\frac{Z_o(s)}{N_o(s)}}{1 + \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}} = \frac{Z_o(s)}{N_o(s) + Z_o(s)} \quad \left(= \frac{Z(s)}{N(s)} \right)$$

- Die Pole des geschlossenen Kreises werden also berechnet durch:

$$1 + F_o(s) = 0 \quad \text{bzw.} \quad N_o(s) + Z_o(s) = 0$$

Frequenzbereichsdarstellungen – NOK/FKL

- 2 Darstellungsformen für das frequenzabhängige Übertragungsverhalten
- Üblicherweise für $F_o(s)$ betrachtet
- Nur periodische Eingangssignale betrachtet
 - ➔ Abbildung der imaginären Achse ($j\omega$) durch ÜF
- System ändert Amplitude und Phase der Schwingung

■ Nyquist-Ortskurve (NOK)

- $F_o(s)$ -Ebene
- Keine Frequenzachse
- Darstellung von Betrags- und Phasenänderung in einem Bild

■ Bode-D./Frequenzkennlinien (FKL)

- $|G(j\omega)|$ und $\arg\{G(j\omega)\}$ jeweils über ω aufgetragen
- also jeder Punkt der NOK getrennt in Amplitude und Phase abgebildet

erkennbar:

$F_o(s)$: Systemtyp, Resonanzüberhöhungen,
ggf. stationäre Genauigkeit

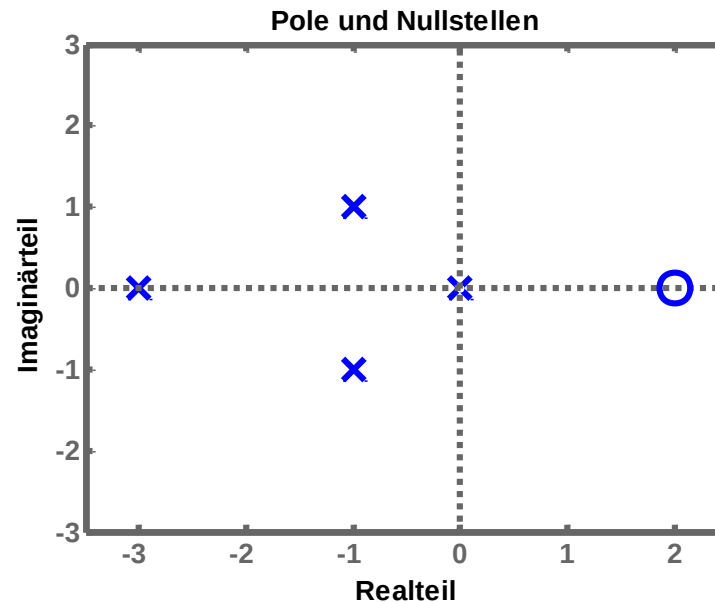
$G_w(s)$: Stabilität (s.später)

NICHT erkennbar:

genaue Lage der Pole/Nullstellen, Stabilität von $F_o(s)$

Frequenzbereichsdarstellungen – Pol/Nullstellen-Plan

- Zeigt eindeutig die Lage der Pole und Nullstellen von ÜFen in der s-Ebene
- Lässt auch Aussagen über aperiodisches Verhalten zu (Realteile)



erkennbar:

Systemtyp und Stabilität, Minimalphasigkeit
(Resonanzüberhöhungen bedingt)

NICHT erkennbar:

Stationäre Genauigkeit (da Verstärkungsfaktor nicht
enthalten)

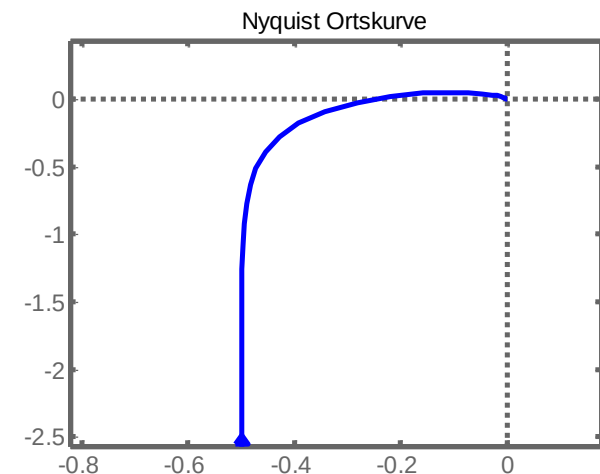
Frequenzbereichsdarstellungen – zeitdiskrete Systeme

- Ebenfalls: NOK, FKL und Pol/Nullstellen-Plan
- Prinzipiell gleiche Aussagen wie im Kontinuierlichen möglich
 - Systemtyp – prinzipielles Verhalten
 - Stabilität offener/geschlossener Kreis
 - Minimalphasigkeit
 - Stationäre Genauigkeit
- Unterschiede zum kontinuierlichen Fall
 - Lage der Pole und Nullstellen jetzt nicht bezüglich der j -Achse sondern bezüglich des Einheitskreises in der z -Ebene
 - Frequenzkennlinien nur bis zur halben Abtastfrequenz sinnvoll
 - Zeitdiskrete NOK/FKL im Allgemeinen nur mit Rechner zu zeichnen

Konstruktion der NOK



- Für Start bei $\omega = 0$ und Ende bei $\omega \rightarrow \infty$ jeweils Betrag und Phase (evtl. auch Realteil/Imaginärteil) aus ÜF ablesen/berechnen
- Verlauf dazwischen qualitativ zeichnen
- Generell gilt:
 - Pole mit negativem Realteil drehen Phase um 90° zurück ($\Delta\varphi = -90^\circ$)
 - Pole mit positivem Realteil drehen Phase um 90° vor ($\Delta\varphi = +90^\circ$)
 - Nullstellen mit pos. Realteil drehen Phase um 90° zurück ($\Delta\varphi = -90^\circ$)
 - Nullstellen mit neg. Realteil drehen Phase um 90° vor ($\Delta\varphi = +90^\circ$)
- Bei Zählergrad < Nennergrad endet die NOK im Ursprung
- Bei Zählergrad = Nennergrad endet die NOK auf der reellen Achse
- Bei Zählergrad > Nennergrad endet die NOK im Unendlichen
(Phase beachten $\rightarrow$ Richtung)
- NOK startet entweder im Ursprung
oder auf der reellen Achse
oder im Unendlichen



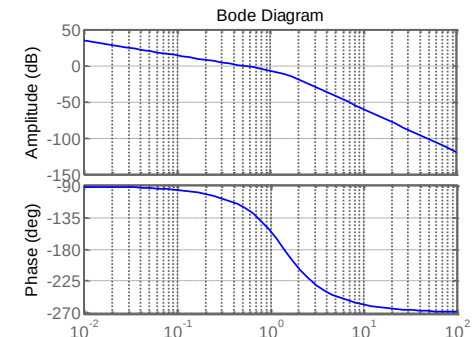
Konstruktion der FKL



- Geradennäherung von Betrag und Phase für jede elementare Teil-ÜF einzeichnen (dabei muss Gesamt-ÜF als Produkt der Teil-ÜFen vorliegen !)
- Konstante K: Amplitudengang konstant bei $20\log(K)$
Phasengang konstant bei 0°
- Pol im Ursprung: Amplitudengang fällt mit 20dB/Dek (Nulldurchgang bei 1rad/s)
Phasengang konstant bei -90°
- Nullstelle im Urspr.: Amplitudengang steigt mit 20dB/Dek (Nulldurchgang bei 1rad/s)
Phasengang konstant bei $+90^\circ$
- Reeller Pol (z.B. PT_1): Amplitudengang zunächst konstant, dann -20dB/Dek ab $\omega = \omega_0 = 1/T$
Phasengang fällt von 0° auf -90° von $\omega = 0,1\omega_0$ bis $10\omega_0$, sonst konst. (Pol links)
Ph.gang steigt von 0° auf $+90^\circ$ von $\omega = 0,1\omega_0$ bis $10\omega_0$, sonst konst. (Pol rechts)
- Reelle Nullstelle: Amplitudengang zunächst konstant, dann +20dB/Dek ab $\omega = \omega_0 = 1/T$
Ph.gang steigt von 0° auf $+90^\circ$ von $\omega = 0,1\omega_0$ bis $10\omega_0$, sonst konst. (NSt links)
Ph.gang fällt von 0° auf -90° von $\omega = 0,1\omega_0$ bis $10\omega_0$, sonst konst. (NSt rechts)

dabei ist ω_0 jeweils der Abstand des Pols/der Nullstelle vom Ursprung

- Alle Teil-Geradennäherungen graphisch addieren



Stabilität

- BIBO-Stabilität: $|u(t)| \leq M < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$
- Zeitbereich: Systemantwort auf beliebige endliche Eingangssignale klingt NICHT unendlich auf
- Frequenzbereich: alle Pole haben negativen Realteil
→ algebraische Stabilitätskriterien

gilt für beliebige Systeme/Übertragungsglieder

- Im offenen Kreis werden Schwingungen niemals so verstärkt und phasenverschoben, dass die Rückführung der Ausgangsgröße ein Aufklingen erzeugt

→ graphische Stabilitätskriterien für Regelkreise
→ aus Frequenzbereichsdarstellungen des **offenen Kreises** auf Stabilität des **geschlossenen Kreises** schließen

Stabilität – Nyquistkriterium in NOK



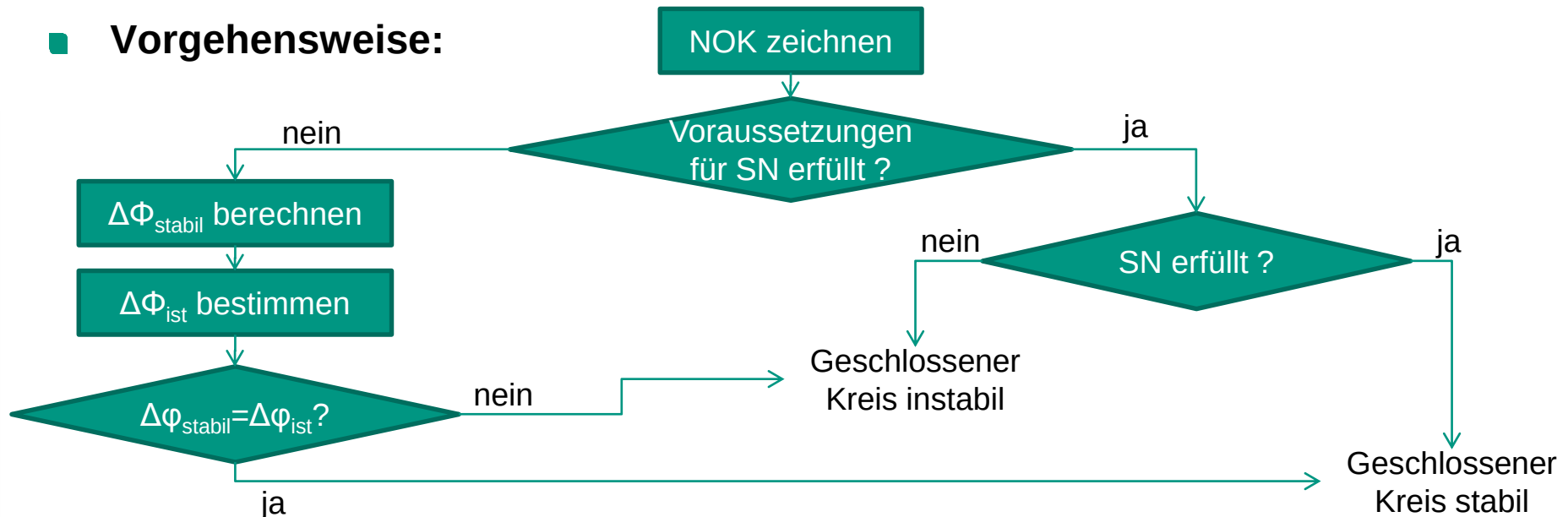
■ Spezielles Nyquistkriterium

- Voraussetzung: offener Kreis stabil (Ausnahme: max. 2 Pole im Ursprung)
- Der geschlossene Kreis ist stabil, falls die NOK des offenen Kreises den Punkt -1 „links liegen“ lässt.

■ Allgemeines Nyquistkriterium

- Der geschlossene Kreis ist stabil, falls $\Delta\Phi_{\text{ist}}$ des Fahrstrahls von -1 zu $F_o(s)$ für $\omega = 0 \dots \infty$ den Wert $\Delta\Phi_{\text{stabil}} = r_o \cdot \pi + a_o \cdot \frac{\pi}{2}$ annimmt (mathematisch positiv!)

■ Vorgehensweise:



Stabilität – Nyquistkriterium in FKL



■ Spezielles Nyquistkriterium

- Voraussetzung: offener Kreis stabil (Ausnahme: max. 2 Pole im Ursprung) und $\arg\{F_o(s)\}$ zwischen -540° und 180° für $|F_o(s)|_{dB} \geq 0$
- Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn
d.h., wenn
oder wenn

$$\varphi_D = \arg\{F_o(j\omega_D)\} > -180^\circ$$

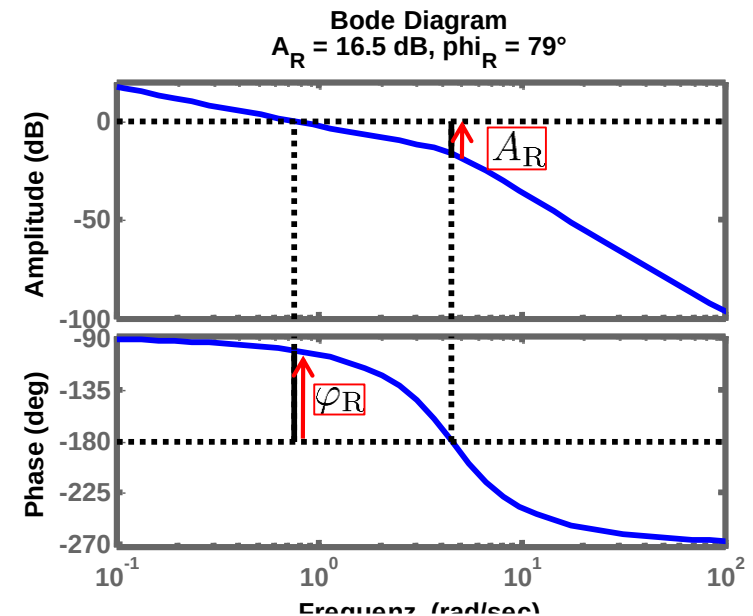
$$\varphi_R = \arg\{F_o(j\omega)\}|_{|A(\omega)=0dB} + 180^\circ > 0$$

$$A_R = -|A(\omega)|_{\varphi(\omega)=-180^\circ} > 0dB$$

- Dabei wird der Amplitudenrand A_R
vom Amplitudengang zur 0dB-Linie ...

... und der Phasenrand φ_R
von der -180°-Linie zum Phasengang

betrachtet



Aufgabe 18 (UE)

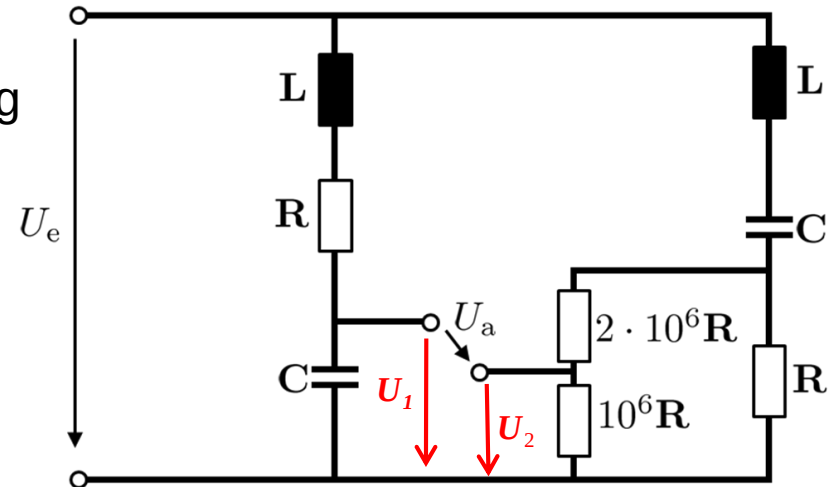
- Elektrisches Netzwerk
- Hilfsspannungen U_1 , U_2 zur Bestimmung der Ausgangsspannung U_a

- damit gilt:

$$U_1 = \frac{1}{Cs} I_1$$

$$U_2 = \frac{1}{3} R I_2$$

$$U_e = \left(Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I_{1/2}$$



$$G(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1 - \frac{1}{3} CRs}{CLs^2 + CRs + 1}$$

- Werte einsetzen → Strecken-ÜF:
- Regler: zunächst $R(s) = 1$

$$G(s) = \frac{1 - \frac{1}{3}s}{\frac{1}{36}s^2 + s + 1} = -12 \frac{s-3}{s^2 + 36s + 36}$$



$$F_o(s) = G(s)R(s) = -12 \frac{s-3}{s^2 + 36s + 36}$$

Aufgabe 18 (2)

- NOK zeichnen

- Spezielles Nyquistkriterium

- alle Pole stabil

→ spezielles Nyquistkriterium anwendbar

- NOK lässt -1 „links liegen“

→ geschlossener RK stabil

- Allgemeines Nyquistkriterium

- $r_0=0, a_0=0 \rightarrow \Delta\Phi_{\text{stabil}} = 0 \cdot \pi + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

- überprüfen: $\Delta\Phi_{\text{ist}} = 0$

- da $\Delta\Phi_{\text{ist}} = \Delta\Phi_{\text{stabil}}$

→ geschlossener RK stabil

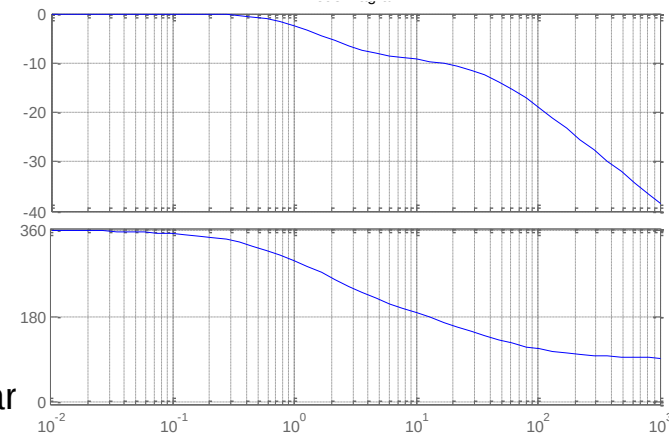
Aufgabe 18 (3)

■ FKL zeichnen

- Dazu zunächst auf „Bode-Form“ bringen: $F_o(s) = \frac{1 - \frac{1}{3}s}{\frac{1}{36}s^2 + s + 1} \approx \frac{1 - \frac{1}{3}s}{(1 + \frac{1}{35}s)(1 + s)}$
- Knicke nach unten bei 1 und 35 rad/s, Knick nach oben bei 3 rad/s
- Phase dreht um insgesamt $3 \cdot (-\frac{\pi}{2})$ zurück

■ Spezielles Nyquistkriterium

- alle Pole stabil und $\arg\{F_o(s)\}$ zwischen -540° und 180°
→ Kriterium anwendbar
- keine Durchtrittsfrequenz ω_D definiert
- Amplitudenreserve: $A_R = -|A(\omega)|_{\varphi(\omega)=-180^\circ} \approx 10\text{dB} = 3 > 1$



→ geschlossener RK stabil

Stabilität - Hurwitzkriterium

- Algebraisches Stabilitätskriterium
 - Pole des geschlossenen Kreises werden nicht explizit berechnet
 - Stattdessen nur ihre Lage bezüglich der imaginären Achse
- Betrachtet wird Nennerpolynom des Systems
→ im Regelkreis charakteristische Gleichung: $1 + F_o(s) = 0$
- Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass alle Pole negativen Realteil haben:

$$a_n > 0$$

$$D_k > 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$$

→ Ausführlicher behandelt im TU (siehe Aufgabe 20)

Algebraisches Stabilitätskriterium (zeitdiskret)

Notwendige Bedingung:

Liegen die Nullstellen von $N(z)$ innerhalb des Einheitskreise, dann gilt:

$$\begin{aligned} N(1) &> 0 & a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 &> 0 \\ (-1)^n N(-1) &> 0 & a_n - a_{n-1} \pm \dots + (-1)^n a_0 &> 0 \\ a_n &> |a_0| \end{aligned}$$

$$\underline{A}_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{k-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \quad \underline{B}_k = \begin{bmatrix} a_{n-(k-1)} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-(k-2)} & \dots & a_n & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad C_k = \det(\underline{A}_k + \underline{B}_k) \quad D_k = \det(\underline{A}_k - \underline{B}_k)$$

Der geschlossene Kreis ist stabil, **genau dann wenn:**

für gerades n: $N(1) > 0$	für ungerades n: $(-1)^n N(-1) > 0$
$C_2 < 0$, $D_2 < 0$	$C_1 > 0$, $D_1 < 0$
$C_4 > 0$, $D_4 > 0$	$C_3 < 0$, $D_3 > 0$
$C_6 < 0$, $D_6 < 0$	$C_5 > 0$, $D_5 < 0$
$\vdots$	$\vdots$

➔ **praktisch relevant: Spezialfälle für niedrige Ordnung (siehe Formels.)**

Aufgabe 19 (TR)

- Algebraische Stabilitätsanalyse

- b) $F_o(s) = \frac{1+5s}{s}$

- Charakteristische Gleichung: $1 + F_o(s) = 0$

➔ geschlossener Kreis stabil, da $a_0=1>0$ und $a_1=6>0$