

Aufgabe 14 (TR)

- a) $G_1(s)$: MS, $G_{1z}(z)$: MS
- b) $G_2(s)$: MS, $G_{2z}(z)$: MS
- c) $G_3(s)$: NMS, $G_{31z}(z)$: NMS, $G_{32z}(z)$: MS
- d) $G_4(s)$: AP, $G_{41z}(z)$: MS, $G_{42z}(z)$: NMS

Da die Lage der Nullstellen stark von der Abtastzeit abhängt, können aus MSen bei der Diskretisierung NMSe entstehen. Wie im Verlauf der Veranstaltung noch deutlich werden wird, ist diese Eigenschaft bei einigen Regelentwurfsverfahren von zentraler Bedeutung. Es sollte also nie blind von Minimalphasigkeit des kontinuierlichen Systems auf Minimalphasigkeit des diskretisierten Systems geschlossen werden.

Aufgabe 15 (TR)

- a) System stabil (alle Pole im Einheitskreis)
 System realisierbar (Zählergrad < Nennergrad, d.h. nicht mehr Nullstellen als Polstellen)
 → EWS und AWS dürfen angewandt werden.

$$h_{1,\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{1,k} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot G_{1z}(z) \cdot W_z(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{5}{2z+1} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{5z}{2z+1} = \frac{5}{3}$$

$$h_{1,0} = \lim_{k \rightarrow 0} h_{1,k} = \lim_{z \rightarrow \infty} G_{1z}(z) \cdot W_z(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{5}{2z+1} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{5z^{-1}}{2 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{0}{2} = 0$$

Matlab: `sys=tf([5],[2 1],0.01);step(sys);`

- b) System stabil (alle Pole im Einheitskreis)
 System realisierbar (Zählergrad (ZG) < Nennergrad (NG))

$$h_{2,\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} z \cdot G_{2z}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+3}{z+\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$

$$h_{2,0} = \lim_{z \rightarrow \infty} G_{2z}(z) \cdot W_z(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+3}{z+\frac{1}{3}} z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+3}{z+\frac{1}{3}} \frac{1}{z-1} = 0$$

Matlab: `sys=tf([1 3],[1 1/3],0.01);sys.outputd=1;step(sys);`

$$y_k + \frac{1}{5}y_{k-1} - \frac{2}{7}y_{k-2} = \frac{2}{3}u_k - \frac{1}{2}u_{k-1}$$

c) $Y_z(z) \left(1 + \frac{1}{5}z^{-1} - \frac{2}{7}z^{-2}\right) = U_z(z) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$

$$G_{3z}(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{5}z^{-1} - \frac{2}{7}z^{-2}} = \frac{\frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 + \frac{1}{5}z - \frac{2}{7}}$$

System stabil (Pole bei ca. 4/10 und -6/10 → im EK)

System realisierbar (ZG = NG)

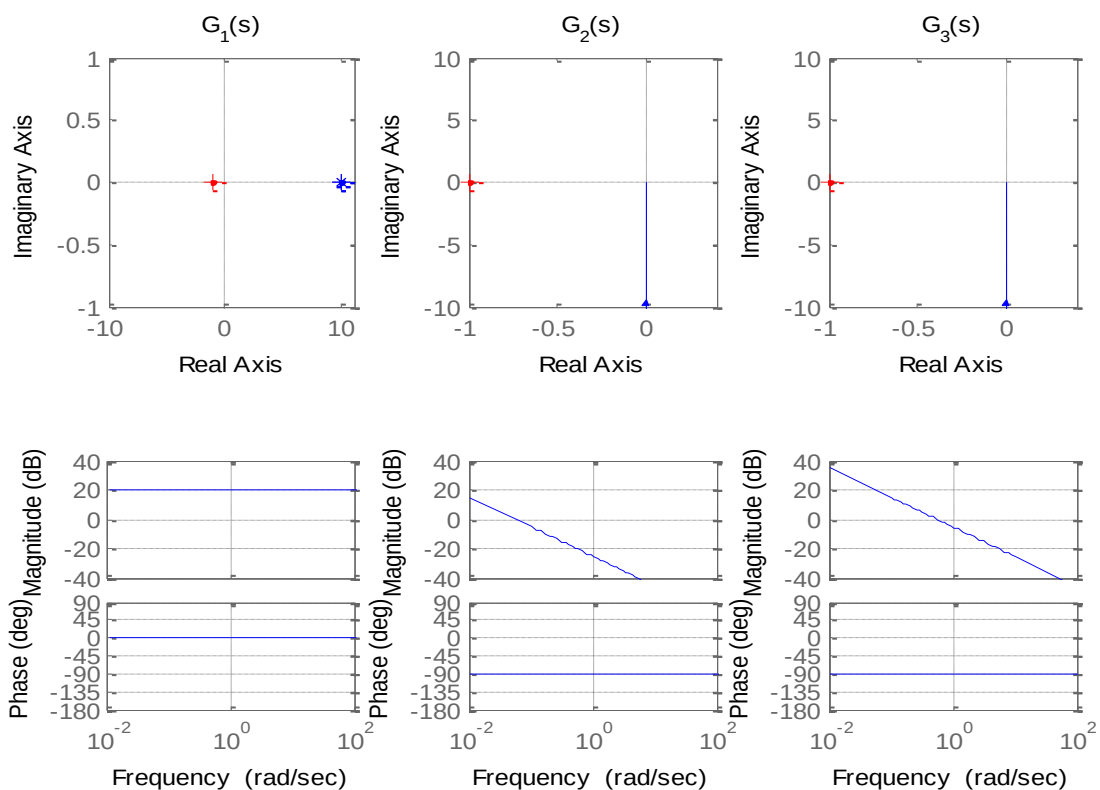
$$h_{3,\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} z \cdot G_{3z}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2}{z^2 + \frac{1}{5}z - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{32}{35}} = \frac{35}{192} \approx 0,18$$

$$h_{3,0} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 + \frac{1}{5}z - \frac{2}{7}} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} - \frac{17}{35}z^{-2} + \frac{2}{7}z^{-3}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

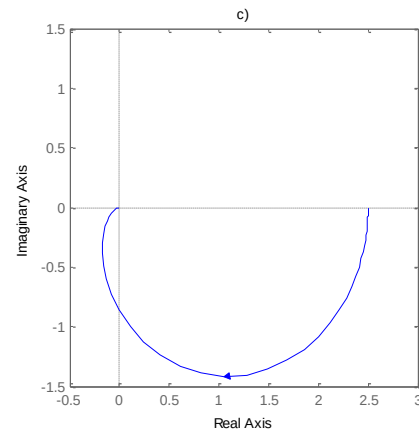
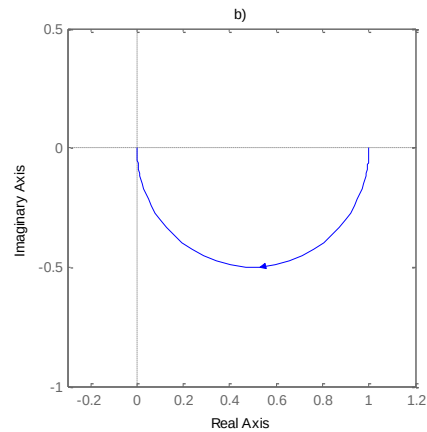
Matlab: `sys=tf([2/3 -1/2 0],[1 1/5 -2/7],0.01);step(sys);`

Aufgabe 16 (TR)

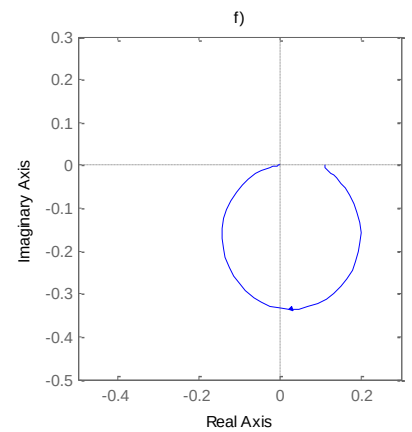
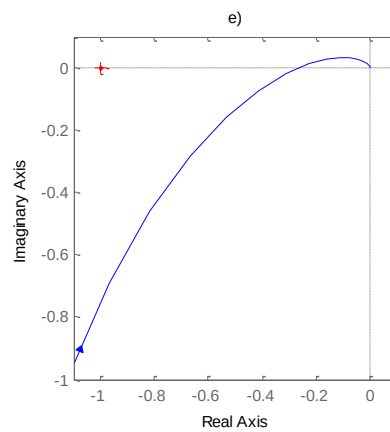
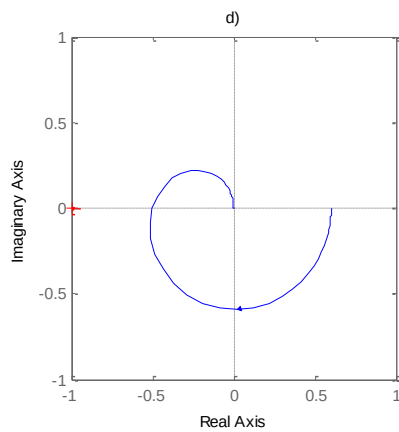
a)

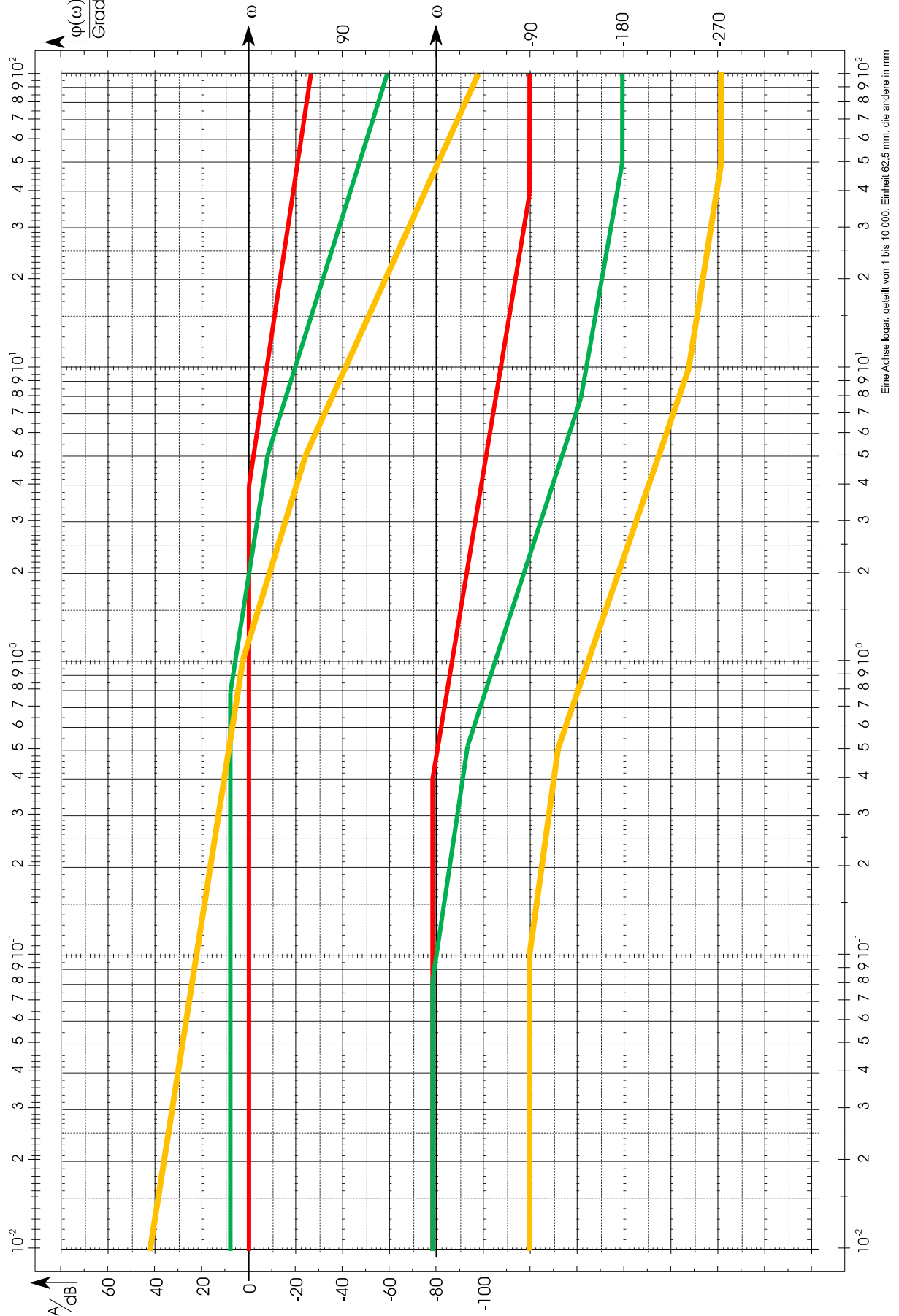


Nyquistortskurven **b)+c)**

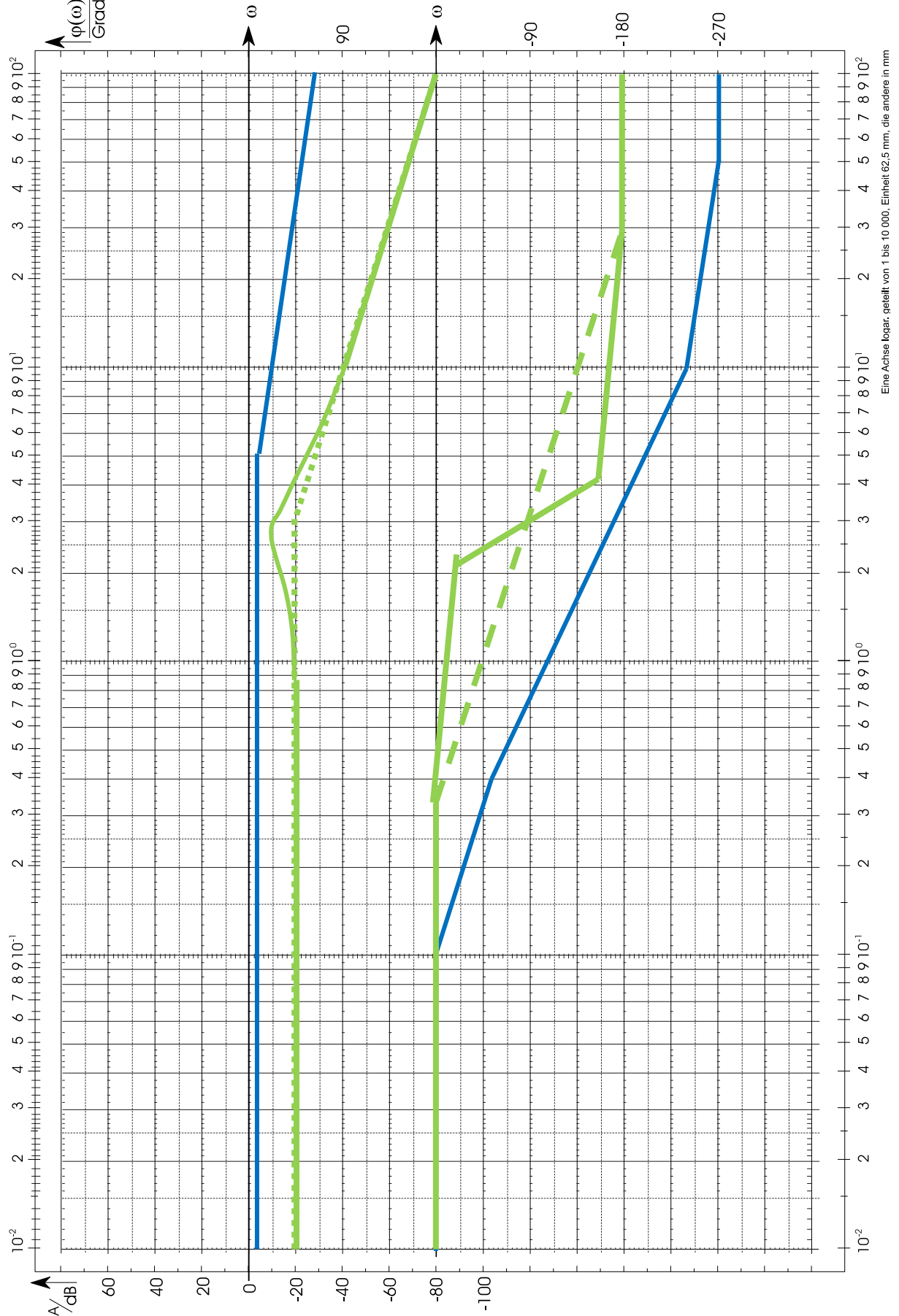


Nyquistortskurven **d)+e)+f)**



Bodediagramm **b)+c)+e)**


Bodediagramm d)+f)



Anmerkung zu f): Für PT2-Glieder mit kleiner Dämpfung ist die Geradennäherung nur noch für Frequenzen deutlich kleiner oder größer der Knickfrequenz sinnvoll. Die hier eingezeichnete Resonanzüberhöhung, sowie die schnellere Phasendrehung sind mit den in der Vorlesung genannten Regeln der Geradennäherungen nicht beschreibbar. (Der gestrichelte Verlauf wäre die Näherung)

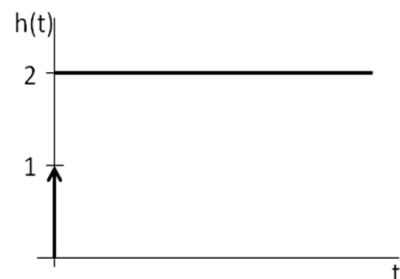
Aufgabe 17 (TR)

A	-	d	-	5	-	III
B	-	a	-	6	-	II
C	-	e	-	3	-	
D	-	b	-	1	-	V
E	-	c	-	4	-	IV
F	-	f	-	2	-	I

Matlab kann keine Sprungantworten idealer D-Glieder (bzw. sonstiger Übertragungsfunktionen mit mehr Nullstellen als Polen) plotten, da diese einen Dirac-Stoß bei $t=0$ enthalten, welcher im Zeitverlauf theoretisch unendlich hoch sein müsste. In der Realität gibt es solche ideal differenzierenden Übertragungsglieder auch nicht, sondern nur ihre realen Gegenstücke mit einer sehr kleinen zusätzlichen Zeitkonstante im Nenner: $G_{D,ideal}(s) = s \rightarrow G_{D,real}(s) = \frac{s}{1+T_1s}, T_1 \ll 1$

Die theoretische Sprungantwort von System C sieht folgendermaßen aus:

Hinweis: Natürlich ist der Wert $h(0)$ eigentlich unendlich groß, die Länge des Pfeils repräsentiert jedoch per Definition die Fläche des Dirac-Stoßes (also quasi den Faktor vor dem D-Anteil der Übertragungsfunktion)



Aufgabe 19 (TR)

a) charakteristische Gleichung: Nenner von $G_W(s)=0$

$$\rightarrow 3s^2 - 0,4s + 7 = 0 \Rightarrow n = 2 : a_1 \neq 0 \rightarrow \text{instabil}$$

b) charakteristische Gleichung: $1+F_o(s)=0$

$$\rightarrow 1 + \frac{1+5s}{s} = 0 \Rightarrow 1 + 6s = 0 \Rightarrow n = 1 : a_{0,1} > 0 \rightarrow \text{stabil}$$

c) charakteristische Gleichung: $1+F_o(s)=1+G(s)R(s)=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow 1 + \frac{3\sqrt{5}s+2}{6s^3+4s^2} = 0 &\Rightarrow 6s^3 + 4s^2 + 3\sqrt{5}s + 2 = 0 \\ &\Rightarrow n = 3 : a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \rightarrow \text{stabil} \end{aligned}$$

d) Strecke: $G(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+65/4s}$
Regler: $R(s) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \rightarrow 1 + F_o(s) = 1 + \frac{s+1}{3s^3+3s^2+195/4s} = 0 &\Rightarrow 3s^3 + 3s^2 + \frac{199}{4}s + 1 = 0 \\ &\Rightarrow n = 3 : a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \rightarrow \text{stabil} \end{aligned}$$

e) Strecke: $G(s) = \frac{4s+11}{2s+5}$
Regler: $R(s) = k_p \frac{5+2s}{2s}$

$$\begin{aligned} \rightarrow 1 + F_o(s) = 1 + k_p \frac{4s+11}{2s} = 0 &\Rightarrow (2 + 4k_p)s + 11k_p = 0 \\ n = 1 : a_0 = 11k_p &\stackrel{!}{>} 0 \Rightarrow k_p &\stackrel{!}{>} 0 \\ a_1 = 2 + 4k_p &\stackrel{!}{>} 0 \Rightarrow k_p &\stackrel{!}{>} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Regelkreis stabil für alle $k_p > 0$

f) charakteristisches Polynom: $N(z) = N_{wz}(z) = z^2 - 4,259z - 1 \rightarrow n=2$

$\rightarrow N(1) = 1 - 4,259 - 1 < 0 \rightarrow$ notwendige Bedingung für Einheitskreispolynom nicht erfüllt
 $\rightarrow$ weitere Untersuchung nicht nötig, System ist instabil

g) charakteristisches Polynom:

$$N(z) = N_{oz}(z) + Z_{oz}(z) = (z-1)^2 + 0,5(z-0,5) = z^2 - 1,5z + 0,75 \rightarrow n=2$$

1) Lösung mit notwendiger und hinreichender Bedingung für Spezialfall $n=2$ (siehe Formelsammlung):

$$N(1) = 1 - 1,5 + 0,75 > 0 \quad \times$$

$$N(-1) = 1 + 1,5 + 0,75 > 0 \quad \times$$

→ System stabil

$$a_2 = 1 > 0,75 = |a_0| \quad \times$$

2) Allgemeine Lösung für beliebige Ordnung (siehe Vorlesung):

$$N(1) = 1 - 1,5 + 0,75 > 0$$

→ Bedingung nicht hinreichend

$$(-1)^2 N(-1) = 1 + 1,5 + 0,75 > 0$$

$$\rightarrow \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \det(\underline{A}_2 + \underline{B}_2) = \det \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} + \frac{1}{2} < 0$$

→ System stabil (n gerade)

$$D_2 = \det(\underline{A}_2 - \underline{B}_2) = \det \begin{vmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{27}{16} - \frac{5}{2} < 0$$

h) offener Kreis: $F_{oz}(z) = \frac{z^2 + \frac{1}{4}}{z(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})} = \frac{z^2 + \frac{1}{4}}{z^3 - \frac{1}{4}z}$

charakteristisches Polynom: $N_{oz}(z) + Z_{oz}(z) = z^3 + z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4} \rightarrow n=3$

1) Lösung mit notwendiger und hinreichender Bedingung für Spezialfall $n=3$ (siehe Formelsammlung):

$$N(1) = 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 > 0 \quad \times$$

→ System instabil

$$N(-1) = -1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0 \quad \checkmark$$

2) Allgemeine Lösung für beliebige Ordnung (siehe Vorlesung):

$$N(1) = 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 > 0$$

→ System instabil

$$(-1)^3 N(-1) = -(-1) - 1 + \frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$

Aufgabe 20 (TU)

a) Nein, da der offene Kreis Pole in der rechten Halbebene aufweist.

b) $1 + F_o(s) = 0 \Rightarrow s^3 + 4s^2 + s + 6 = 0$
 $n = 3: a_{0,1,2,3} > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{instabil}$

Der Fahrstrahl von -1 zu $F_o(s)$ erfährt eine Winkeländerung von $\Delta\Phi_{\text{ist}} = -\frac{\pi}{2}$, für Stabilität des geschlossenen Kreises wäre jedoch $\Delta\Phi_{\text{stabil}} = \frac{3\pi}{2}$ erforderlich

c) $F_o(s) = \frac{4(s+1)(s+2)(s+3)}{s(s+4)(s-1)}$
 $1 + F_o(s) = 0 \Rightarrow 5s^3 + 27s^2 + 40s + 24 = 0$
 $n = 3: a_{0,1,2,3} > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 = 960 > 0 \rightarrow \text{stabil}$

Da immer noch ein Pol des offenen Kreises in der rechten Halbebene liegt, kann nur die allgemeine Form des Nyquistkriteriums angewendet werden. Da weiterhin die erste Voraussetzung für das Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung wegen $K < 0$ nicht erfüllt ist, ist nur das Kriterium in Ortskurvendarstellung anwendbar.

d) Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + F_o(s)} \cdot W(s)$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 3s^2 - 4s}{5s^3 + 27s^2 + 40s + 24} = 0$

Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} \cdot W(s)$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4s^3 + 24s^2 + 44s + 24}{5s^3 + 27s^2 + 40s + 24} = \frac{24}{24} = 1 \rightarrow \text{stationär genau !}$

e) Anfangswertsatz: $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} \cdot W(s)$
 $= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4s^3 + 24s^2 + 44s + 24}{5s^3 + 27s^2 + 40s + 24} = \frac{4}{5} = 0,8$