

Systemdynamik und Regelungstechnik

Übung 1: Laplace-Transformation

Lukas Kölsch, M. Sc.

INSTITUT FÜR REGELUNGS- UND STEUERUNGSSYSTEME (IRS)



Kontakt und Informationen

■ Übung:

Lukas Kölsch

lukas.koelsch@kit.edu

Raum 002, Geb. 11.20

Tel.-Nr.: 0721-608 4 3237

Sprechstunde: Do 11:30-12:15
(nach vorheriger Anmeldung)

■ Tutorium:

01	Mo.	8:00 – 9:30	SR 3	30.28	005
02	Mo.	9:45 – 11:15	SR 1	30.28	220
03	Mo.	9:45 – 11:15	SR 2	30.28	120
04	Mo.	14:00 – 15:30	SR 2	30.28	120
05	Mo.	15:45 – 17:15	SR 2	30.28	120
06	Mo.	17:30 – 19:00	SR 2	30.28	120
07	Di.	9:45 – 11:15	SR 1	30.28	220
08	Di.	9:45 – 11:15	SR 4	30.28	004
09	Di.	15:45 – 17:15	R 702	10.50	702
10	Mi.	14:00 – 15:30	SR 2	30.28	120
11	Mi.	15:45 – 17:15	HS 62	10.81	153
12	Mi.	17:30 – 19:00	R 702	10.50	702
13	Do.	8:00 – 9:30	R 228	10.91	228
14	Do.	8:00 – 9:30	SR 2	30.28	120
15	Do.	17:30 – 19:00	R 228	10.91	228
16	Fr.	8:00 – 9:30	R 228	10.91	228
17	Fr.	8:00 – 9:30	SR 1	30.28	220
18	Fr.	15:45 – 17:15	R 228	10.91	228
19	Fr.	15:45 – 17:15	SR 1	30.28	220

Semesterplan

April 2018	Mai 2018	Juni 2018	Juli 2018
01	01 Tag der Arbeit	01 V11*	01
02	02	02	02 Tut 7
03	03 Ü1 Tut 1	03	03 Ü8
04	04 V6	04 Tut 3	04
05	05	05 Ü4	05 V19
06	06	06	06 (V20)
07	07	07 V12	07
08	08 Ü2	08 V13	08
09	09	09	09 Tut 8
10	10 Chr. Himmelfahrt	10	10
11	11 V7	11 Tut 4	11
12	12	12 Ü5	12 Ü9
13	13	13	13
14	14 Tut 2	14 V14	14
15	15	15 V15	15
16	16	16	16 Tut 9
17	17 V8	17	17
18	18	18 Tut 5	18
19 V1	19	19 Ü6	19
20 V2	20 Pfingstsonntag	20	20
21	21 Pfingstmontag	21 V16	21
22	22	22 V17	22
23	23	23	23
24 V3	24 V9	24	24
25	25 V10*	25 Tut 6	25
26 V4	26	26	26
27 V5	27	27	27
28	28	28 Ü7	28
29	29 Ü3	29 V18	29
30	30	30	30
	31 Fronleichnam		31 KLAUSUR

Hörsaal:

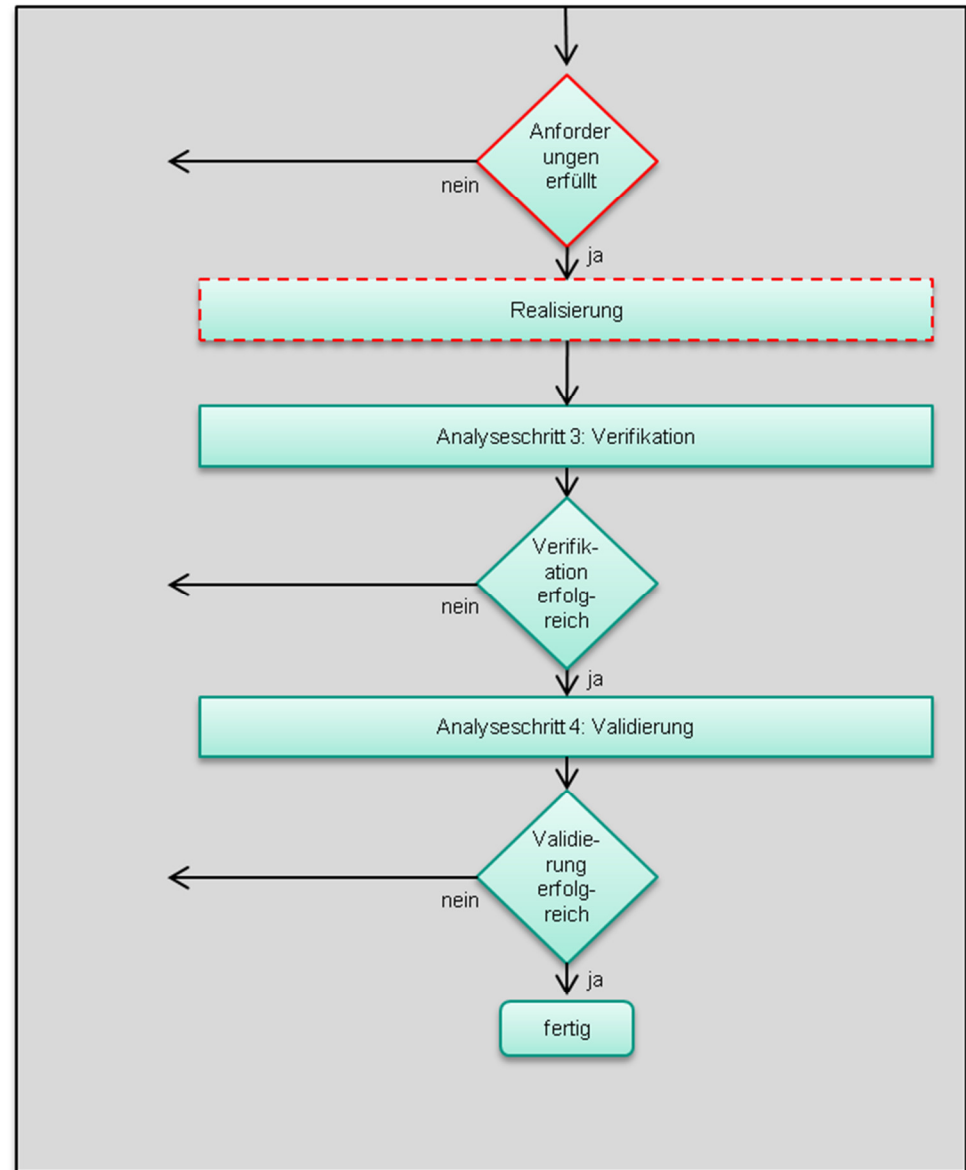
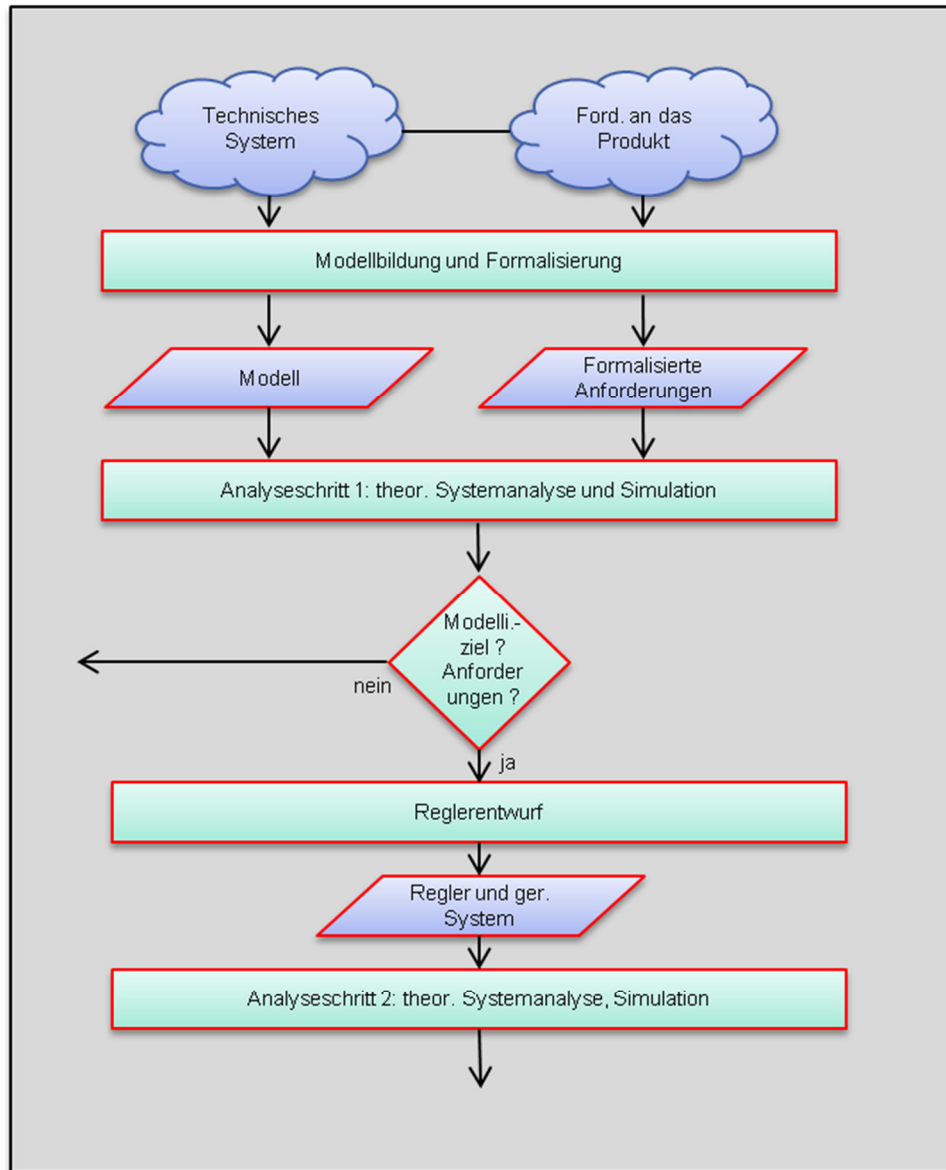
- Dienstag: Benz-HS
- Donnerstag: Neue Chemie
- Freitag: Neue Chemie

Prüfung:

- 31. Juli 2018
- 120 Minuten
- keine Hilfsmittel

- Der auf ILIAS bereitgestellte Semesterplan ist stets auf dem aktuellsten Stand

Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



Übung/Tutorium 1: Themen

Übung

Tutorium

L- Transformation

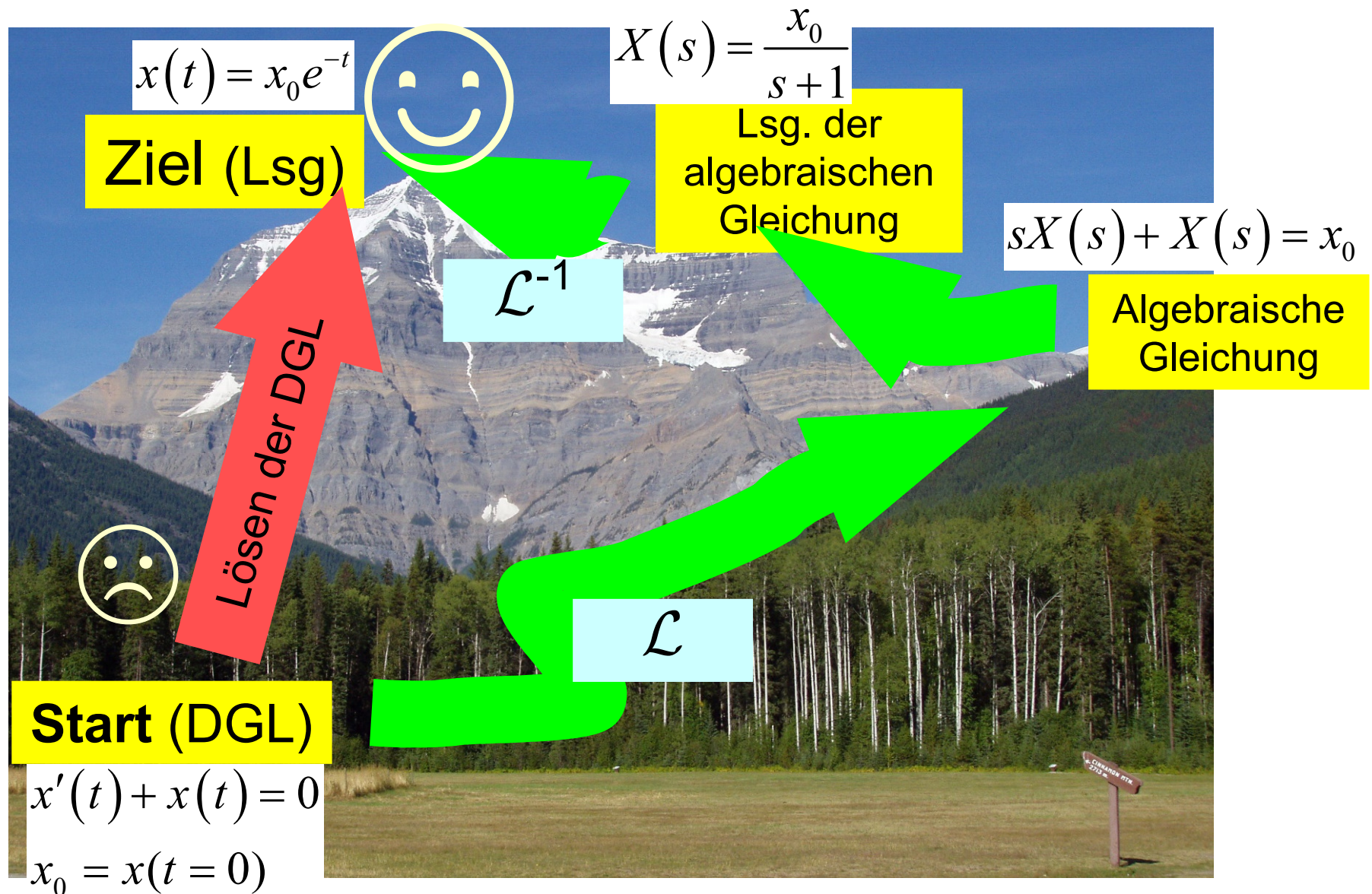
L- Rücktransformation

Differentialgleichungen

Warum Integraltransformationen?

- Vereinfachung der Lösung einer DGL
 - Über „Umweg“ schneller zur Lösung
- Systemtheoretisches Verständnis
 - Analyse von Prozessen ohne Rücktransformation
 - Beurteilung von dynamischen Systemen mittels einfacher Grundrechenarten

Lösung von DGLen



Laplace-Transformation

$$\underbrace{\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt}_{\text{Laplace-Integral}} = \underbrace{F(s)}_{\text{Laplace-Transformierte}}$$

s : komplexe Variable $s = \eta + j\omega$

Symbolik:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Originalfunktion $f(t)$ $\circ \longrightarrow \bullet$ $F(s)$ Bildfunktion

Beispiel: $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{1}{(s-\alpha)} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{(s-\alpha)} \cdot 1 = \frac{1}{(s-\alpha)}$

also: $e^{\alpha t} \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{s-\alpha}, \quad \text{falls } \operatorname{Re}\{s-\alpha\} > 0$

Aufgabe 5 (TR) +

- Gegeben sei die DGL $x''(t) + x(t) = F_{in}(t) = u(t)$.
- Das System habe die Anfangsauslenkung $x(0-) = 1$ und $x'(0-) = -1$
- Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems und geben Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ an

Lösung:

- Laplace-Transformation der DGL ergibt:

$$s^2 X(s) - sx(0-) - x'(0-) + X(s) = U(s)$$

$$s^2 X(s) - s + 1 + X(s) = U(s)$$

mit $u(t) = \delta(t)$, also $U(s) = 1$.

Umstellung nach $X(s)$ ergibt:

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \bullet \text{---} \circ \quad x(t) = \cos(t)$$

- Ein Grenzwert existiert nicht, da $x(t)$ oszilliert

Aufgabe 10 (UE) ++

- Die folgende Differential-Integral-Gleichung mit dem Anfangswert x_0 ist gegeben:

$$\dot{x}(t) = \int_{\tau=0}^t x(t-\tau) \cdot e^{-2\tau} d\tau$$

- Berechnen Sie mithilfe der Laplace-Transformation die Lösung $x(t)$ dieser Gleichung
- Hinweis: $\cosh(\beta \cdot t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 - \beta^2}$

Lösung:

$$sX(s) - x_0 = X(s) \cdot \frac{1}{s+2} \quad \longrightarrow \quad X(s) \cdot \left(s - \frac{1}{s+2} \right) = x_0$$

Aufgabe 10 (UE) ++

Lösung (Fortsetzung):

- Umformung nach $X(s)$ ergibt:

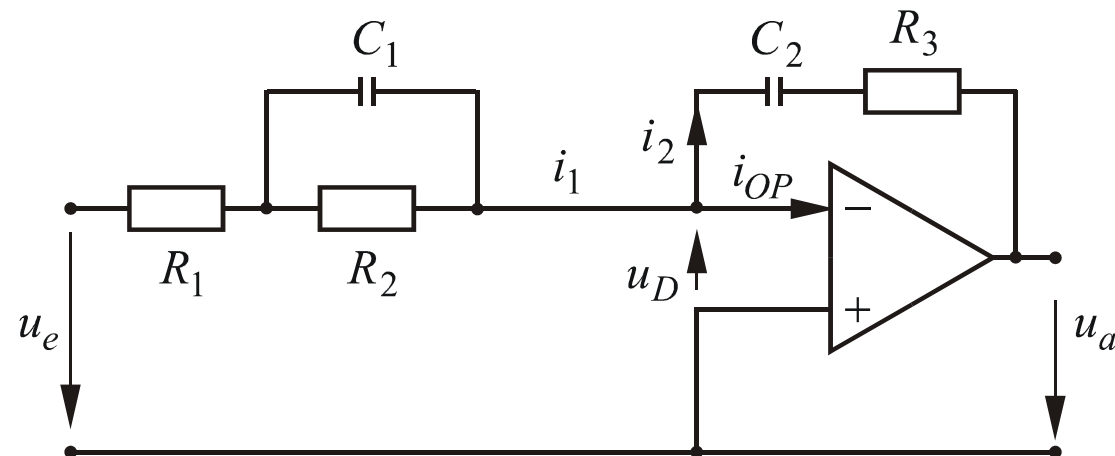
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x_0}{s - \frac{1}{s+2}} = \frac{(s+2) \cdot x_0}{s^2 + 2s - 1} \\ &= x_0 \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1 - 1 - 1} = x_0 \frac{s+1+1}{(s+1)^2 - 2} = x_0 \frac{s+1}{(s+1)^2 - 2} + \frac{x_0}{\sqrt{2}} \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{(s+1)^2 - 2} \end{aligned}$$

- Mithilfe der angegebenen Korrespondenz ergibt sich im Zeitbereich:

$$x(t) = x_0 \cdot \cosh(\sqrt{2} \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{x_0}{\sqrt{2}} \cdot \sinh(\sqrt{2} \cdot t) \cdot e^{-t}$$

Aufgabe 7 (UE)

■ Operationsverstärkerschaltung



- Annahmen: $u_D \approx 0$, $i_{OP} \approx 0$

a)

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)}$
- Geben Sie die Pol- und Nullstellen von $G(s)$ in Abhängigkeit von R_1 , R_2 , R_3 , C_1 und C_2 an
- Für welche Werte von R_1 , R_2 , R_3 , C_1 und C_2 ist das System stabil?

Aufgabe 7 (UE)

Lösung zu a)

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = - \frac{(1 + R_2 C_1 s)(R_3 C_2 s + 1)}{C_2 s \cdot (R_1 + R_2 + R_1 R_2 C_1 s)}$$

→ System ist instabil für beliebige Werte von R_1 , R_2 , R_3 , C_1 und C_2

b)

- Berechnen Sie unter der Annahme, dass der AWS der Laplace-Transformation angewendet werden kann, den Anfangswert des Ausgangssignals $u_a(t)$ für das Eingangssignal $u_e(t) = 2\sigma(t)$
- Unter welchen Bedingungen ist das Ausgangssignal stetig zum Zeitpunkt $t = 0$?
- Berechnen Sie, falls möglich, mithilfe des EWS der Laplace-Transformation den Endwert des Ausgangssignals $u_a(t)$ für das Eingangssignal $u_e(t) = \frac{1}{2}\sigma(t)$

Aufgabe 7 (UE)

Lösung zu b)

$$u_e(t) = 2\sigma(t) \quad \text{---} \bullet \quad U_e(s) = \frac{2}{s}$$

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} \rightarrow U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U_a(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1 + R_3 C_2 s}{R_1 C_2 s} = \lim_{s \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\frac{1}{s} + R_3 C_2}{R_1 C_2} = 2 \cdot \frac{R_3 C_2}{R_1} = \frac{2R_3}{R_1}$$

$u_a(-0) = 0$, da Kondensatoren ungeladen

Für stetiges Signal muss gelten: $u_a(+0) = 0$ und damit $\frac{2R_3}{R_1} = 0 \rightarrow R_3 = 0$

Der Endwertsatz der Laplacetransformation ist nur dann anwendbar, wenn der Grenzwert im Zeitbereich existiert. Voraussetzung dafür: $G(s) \cdot U_e(s)$ darf maximal einen Pol in 0 haben, alle anderen Pole müssen links der imaginären Achse sein.

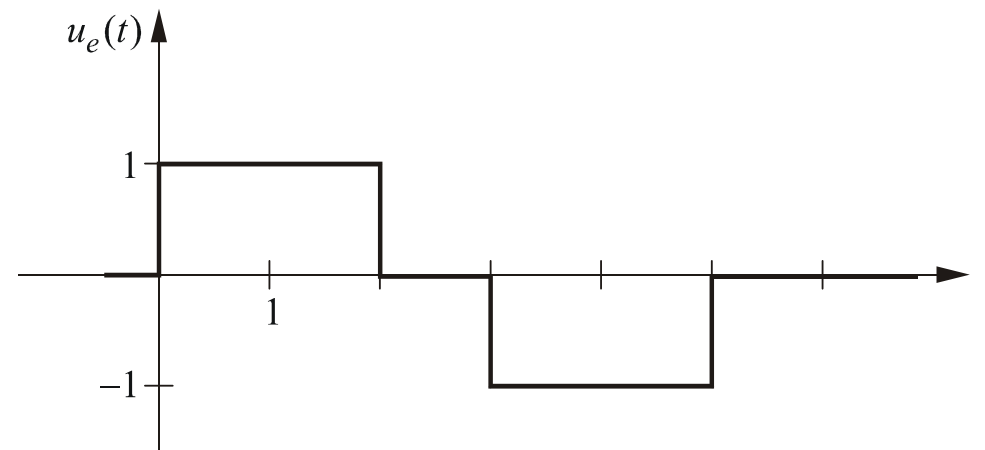
Hier: $u_e(t) = \frac{1}{2}\sigma(t) \quad \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2} \frac{1}{s} = U_e(s)$, d.h. $U_e(s)$ hat einen Pol in 0, somit muss $G(s)$

stabil sein. $G(s)$ hat aber einen Pol in $s = 0$. Daraus folgt: Grenzwert existiert nicht, Endwertsatz ist nicht anwendbar

Aufgabe 7 (UE)

c)

- Nun gilt $R_1 = 2$, $R_3 = 4$ und $C_2 = 1$
- Berechnen Sie $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
- Bestimmen Sie rechnerisch das Ausgangssignal $u_a(t)$ für das im Bild skizzierte Eingangssignal $u_e(t)$ und zeichnen Sie $u_a(t)$



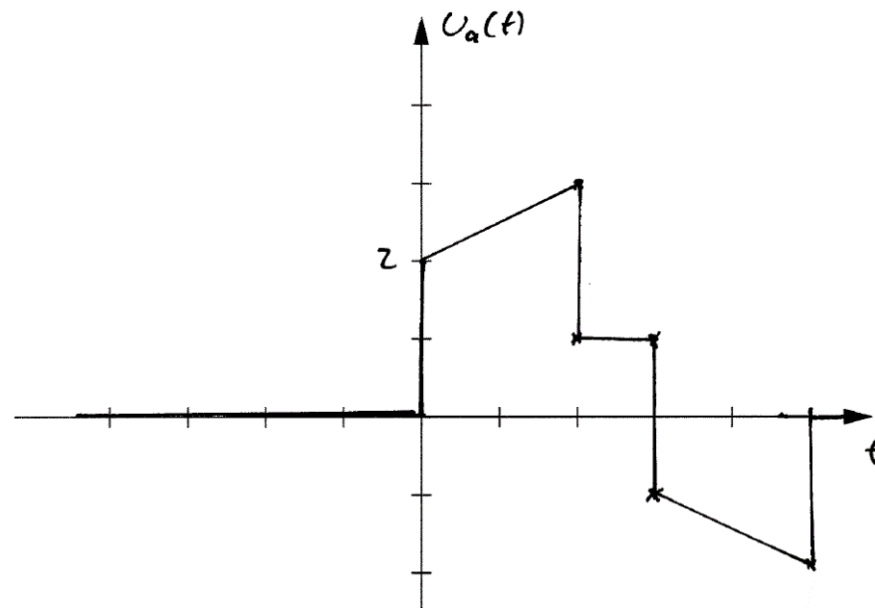
Lösung zu c)

$$u_e(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2) - \sigma(t-3) + \sigma(t-5) \quad \bigcirc - \bullet \quad U_e(s) = \frac{1}{s} \left(1 - e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-5s} \right)$$

Aufgabe 7 (UE)

Lösung zu c) (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= \frac{1}{2}t\sigma(t) - \frac{1}{2}(t-2)\sigma(t-2) - \frac{1}{2}(t-3)\sigma(t-3) + \frac{1}{2}(t-5)\sigma(t-5) \\
 &\quad + 2\sigma(t) - 2\sigma(t-2) - 2\sigma(t-3) + 2\sigma(t-5) \\
 &= \left(\frac{1}{2}t + 2\right)\sigma(t) - \left(\frac{1}{2}t + 1\right)\sigma(t-2) - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)\sigma(t-3) + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)\sigma(t-5)
 \end{aligned}$$



Partialbruchzerlegung - Vorgehensweise



- Ausgangspunkt: Gebrochen-rationale Funktion

$$R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (m \leq n)$$

- Nenner $N(s)$ als Produkt schreiben:

$$N(s) = (s - \alpha_1)^{n_1} (s - \alpha_2)^{n_2} \cdots (s - \alpha_p)^{n_p}, \quad \sum_{i=1}^p n_i = n$$

Pol (=Nullstelle des Nenners) α_i der Ordnung n_i

komplexe Pole treten bei reellen a_k nur paarweise auf

Partialbruchzerlegung - Vorgehensweise (2)



■ Ansatz der PBZ:

$$R(s) = \underbrace{r_0}_{\substack{=R(\infty) \\ =0 \text{ für } m < n}} + \underbrace{\frac{r_1}{s - \alpha_1}}_{\substack{\text{Ansatz für} \\ \text{einfachen} \\ \text{reellen Pol } \alpha_1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_2} \frac{r_{2,i}}{(s - \alpha_2)^i}}_{\substack{\text{Ansatz für} \\ n_2\text{-fachen} \\ \text{reellen Pol } \alpha_2}} + \underbrace{\frac{r_3 + s r_4}{(s - \alpha_3)(s - \alpha_4)}}_{\substack{\text{Ansatz für einfaches} \\ \text{konjugiert komplexes} \\ \text{Polpaar } \alpha_3, \alpha_4}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_5} \frac{r_{6,i} + s r_{5,i}}{((s - \alpha_5)(s - \alpha_6))^i}}_{\substack{\text{Ansatz für } n_5\text{-faches} \\ \text{konjugiert komplexes} \\ \text{Polpaar } \alpha_5, \alpha_6 \quad n_5 = n_6}} + \dots$$

■ Berechnung der r_i :

1) Koeffizientenvergleich

- ▶ Stets anwendbar

2) Zuhaltemethode

- ▶ Einfach
- ▶ i.A. nicht immer anwendbar

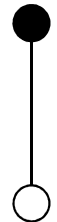
3) Einsetzmethode

- ▶ Stets anwendbar

Aufgabe 2 (UE / TU)

- Berechnen Sie die Partialbruchzerlegungen folgender Laplace-Transformierten und bilden Sie die Rücktransformationen in den Zeitbereich

$$\begin{aligned}
 \text{a) } F(s) &= \frac{2s^2 + 6s + 3}{(s+2)^2 (s+1)} \\
 &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}
 \end{aligned}$$



$$f(t) = -e^{-t} + (3+t) \cdot e^{-2t}$$

Aufgabe 2 (UE / TU)

- Berechnen Sie die Partialbruchzerlegungen folgender Laplace-Transformierten und bilden Sie die Rücktransformationen in den Zeitbereich

$$\text{c) } H(s) = \frac{4s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 10}{(s^2 + 1)(s^2 + 1)(s + 2)}$$

$$= \frac{4}{s + 2} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2 + s}{(s^2 + 1)^2}$$



$$h(t) = 4e^{-2t} + 2\sin(t) - t \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} \cdot \sin(t)$$