

Aufgabe 1 (TR)

- a) B, da $G(s)$ schwingungsfähig (konjugiert-komplexes Polpaar), aber gedämpfte Schwingung (Realteil der Pole < 0)
- b) C, wegen Endwertsatz (ist anwendbar, da $G(s)$ stabil):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$
- c) C, da $\sigma(t) * \delta(t-2) = \sigma(t-2)$ (Faltung mit Dirac-Impuls verschiebt eine Funktion)
- d) B, da $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{s}{s^2+16} \bullet \circ \cos(4t), t \geq 0$ (vgl. Tabelle) gilt und damit die Amplitude 1 und die Periodendauer $\frac{\pi}{2}$ beträgt
- e) B, denn $\delta(t-2)$ bewirkt bei Faltung eine Verschiebung um 2 nach rechts
- f) A, da $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} \bullet \circ y(t) = 2+t, t \geq 0$ gilt

Aufgabe 2 (UE/TU)

- a) $F(s) = \frac{2s^2+6s+3}{(s+2)^2(s+1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$
 $\bullet \circ f(t) = -e^{-t} + (3+t) \cdot e^{-2t}$
- b) $G(s) = \frac{2s^3+10s^2+s+7}{(s^2+1)(s+3)} \stackrel{!}{=} A + \frac{B}{s+3} + \frac{C+Ds}{s^2+1} = 2 + \frac{4}{s+3} + \frac{-1}{s^2+1}$
 $\bullet \circ g(t) = 2\delta(t) + 4e^{-3t} - \sin(t)$
- c) $H(s) = \frac{4s^4+s^3+11s^2+5s+10}{(s^2+1)(s^2+1)(s+2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{s+2} + \frac{C+Ds}{s^2+1} + \frac{E+Fs}{(s^2+1)^2} = \frac{4}{s+2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2+s}{(s^2+1)^2}$
 $\bullet \circ h(t) = 4e^{-2t} + 2\sin(t) - t \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} \cdot \sin(t)$

Aufgabe 3 (TU)

- a) $f(t) = \sin(\alpha t + \beta) = \sin(\alpha t) \cos(\beta) + \cos(\alpha t) \sin(\beta) \circ \bullet \tilde{F}(s) = \frac{\alpha \cos(\beta) + \sin(\beta)s}{s^2 + \alpha^2}$

b)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{8} (e^{jt} + e^{-jt}) (e^t - e^{-t})^2 \\
 &= \frac{1}{8} (e^{jt} + e^{-jt}) (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) \\
 &= \frac{1}{8} (e^{(2+j)t} + e^{(2-j)t} - 2e^{jt} - 2e^{-jt} + e^{-(2-j)t} + e^{-(2+j)t}) \\
 F(s) &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{s-(2+j)} + \frac{1}{s-(2-j)} + \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{s+2-j} \right] - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} \\
 &= \frac{s-(2-j)+(s-(2+j))}{(s-2)^2+1} + \frac{s+2-j+(s+2+j)}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{4} \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (TR)

a) Periodische Rechteckfunktion, die exponentiell gedämpft wird:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_\alpha(t) &= \sigma(t) - \sigma(t - \alpha T) + \sigma(t - T) - \sigma(t - (1 + \alpha)T) + \dots \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sigma(t - jT) - \sigma(t - (j + \alpha)T);
 \end{aligned}$$

$$y_\alpha(t) = e^{-\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma(t - jT) - \sigma(t - (j + \alpha)T)$$

b) Zunächst Anwendung der Verschiebungsregel:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\tilde{y}_\alpha(t)\} &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\alpha Ts} \right] \cdot [1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots] = \frac{1}{s} [1 - e^{-\alpha Ts}] \cdot \sum_{\gamma=0}^{\infty} e^{-\gamma Ts} = \frac{1}{s} [1 - e^{-\alpha Ts}] \cdot \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \\
 (\text{für } |e^{-Ts}| < 1). \text{ Gemäß Dämpfungsregel folgt: } Y_\alpha(s) &= \frac{1}{s + \beta} [1 - e^{-\alpha T(s + \beta)}] \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s + \beta)}}
 \end{aligned}$$

c) $\lim_{\alpha \rightarrow 1} Y_\alpha(s) = \frac{1}{s + \beta}$

Aufgabe 6 (TR)

$$G_{ges} = (G_1 - G_2)G_3 = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+1-s}{s \cdot (s+1)} \cdot \frac{s+1}{s+2} = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Eingangssignal: $u(t) = \sigma(t) \quad \bullet \quad U(s) = \frac{1}{s}$

Ausgangssignal: $Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}.$

Nach PBZ ergibt sich: $Y(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} \quad \bullet \quad y(t) = -\frac{1}{4} \sigma(t) + \frac{1}{2} t \cdot \sigma(t) + \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} \cdot \sigma(t)$

Aufgabe 8 (TR)

a)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}(t-iT)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}(t-iT)\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\tilde{f}(t-iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{F}(s)e^{-iT s} = \tilde{F}(s) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-Ts})^i = \tilde{F}(s) \cdot \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

für $|e^{-Ts}| < 1$

b) Mit $s := \delta + j\omega$ gilt:

$$1 > |e^{-Ts}| = |e^{-T(\delta+j\omega)}| = |e^{-T\delta} \cdot e^{-jT\omega}| = |e^{-T\delta}| |e^{-jT\omega}| = |e^{-T\delta}| = e^{-T\delta}, \text{ da } \delta \in \mathbb{R}. \text{ Somit muss gelten: } e^{-T\delta} < 1 \text{ und damit } -T\delta < \ln 1 = 0, T > 0. \text{ Es folgt: } \delta > 0$$

Insgesamt gilt die Herleitung also für $\text{Re}\{s\} = \delta > 0$, d.h. für den Bereich rechts der imaginären Achse.

Aufgabe 9 (TU)

a) $3s+5$ kommt von den Anfangswerten. Zunächst weglassen und dann rücktransformieren führt auf die DGL: $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u'(t) - 2u(t)$, $t \geq 0$.

b) Erneute Transformation der DGL:

$$s^2 Y(s) - sy(+0) - y'(+0) + 2sY(s) - 2y(+0) + Y(s) = sU(s) - u(+0) - 2U(s)$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = (s - 2)U(s) + sy(+0) + y'(+0) + 2y(+0) - u(+0)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

- $sy(+0) = 3s$ und damit $y(+0) = 3$
- $y'(+0) + 2y(+0) - u(+0) = 5$ und damit $y'(+0) - u(+0) = -1$

Aufgabe 11 (TR)

a) Ruhelage bestimmen: $0 = -5y_{AP}^2 + 125 \Rightarrow y_{AP} = \pm 5$

Implizite DGL: $g(\dot{y}, y, u) = \dot{y} + 5y^2 - u = 0$

Taylor-Entwicklung: $1 \cdot \Delta \dot{y} + 5 \cdot 2y_{AP} \cdot \Delta y - \Delta u = 0$

→

$$\Delta \dot{y} = \mp 50 \Delta y + \Delta u$$

b) Ruhelage bestimmen: $0 = 0 + 4x_{AP}^3 - \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_{AP} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Implizite DGL: $g(\ddot{x}, \dot{x}, x, F) = \ddot{x} + 5\dot{x} - 4x^3 + \cos F = 0$

Taylor-Entwicklung: $\Delta \ddot{x} + 5 \cdot \Delta \dot{x} - 4 \cdot 3x_{AP}^2 \cdot \Delta x - \sin F_{AP} \cdot \Delta F = 0$

→

$$\Delta \ddot{x} = -5\Delta \dot{x} + 3\Delta x + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta F$$

c) Ruhelage bestimmen: $0 - 2 = u_{AP}^2 + 0 - \sqrt{36} \Rightarrow u_{AP}^2 = 4 \Rightarrow u_{AP} = \pm 2$

Implizite DGL: $g(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u) = \frac{\ddot{y}}{3} - 2e^{\dot{y}} + \sqrt{y} - u^2 - \dot{u}^3 = 0$

Taylor-Entwickl.: $\frac{\Delta \ddot{y}}{3} - 2e^{\dot{y}_{AP}} \Delta \dot{y} + \frac{1}{2\sqrt{y_{AP}}} \Delta y - 3\dot{u}_{AP}^2 \Delta \dot{u} - 2u_{AP} \Delta u = 0$

→

$$\Delta \ddot{y} = 6\Delta \dot{y} - \frac{1}{4} \Delta y \pm 12\Delta u$$

- d) Durch Betrachtung der Ein- und Ausgangsgrößen als Einheiten-behaftet müssen die Faktoren der linearisierten DGL ebenfalls Einheiten enthalten:

$$\Delta \ddot{x} = -5 \frac{1}{\text{sec}} \Delta \dot{x} + 3 \frac{1}{\text{sec}^2} \Delta x + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2 \text{N}} \Delta F$$

Nun gilt: $\Delta F = F_N \bar{F}$, $\Delta x = x_N \bar{x}$

$$\Delta \dot{x} = \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{d\Delta x}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = x_N \cdot \dot{\bar{x}} \cdot \frac{1}{t_N} = \frac{x_N}{t_N} \dot{\bar{x}}$$

$$\Delta \ddot{x} = \frac{d\Delta \dot{x}}{dt} = \frac{d\Delta \dot{x}}{d\dot{\bar{x}}} \cdot \frac{d\dot{\bar{x}}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{x_N}{t_N} \cdot \ddot{\bar{x}} \cdot \frac{1}{t_N} = \frac{x_N}{t_N^2} \ddot{\bar{x}}$$

Einsetzen in linearisierte DGL: $\frac{x_N}{t_N^2} \ddot{\bar{x}} = -5 \frac{1}{\text{sec}} \frac{x_N}{t_N} \dot{\bar{x}} + 3 \frac{1}{\text{sec}^2} x_N \bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2 \text{N}} F_N \bar{F}$

Nennwerte einsetzen:

$$\ddot{\bar{x}} = -5\dot{\bar{x}} + 3\bar{x} + 1000\sqrt{3} \cdot \bar{F}$$

Aufgabe 12 (TR)

- a) Pole: $\lambda_1 = -1$, keine Nullstellen, Partialbruchzerlegung (PBZ) liegt schon vor

b) Pole: $\lambda_{1,2} = -1, -3$, Nullstellen: $\eta_1 = 2$, PBZ: $G(s) = \frac{2,5}{s+3} - \frac{1,5}{s+1}$

c) Pole: $\lambda_{1,2,3} = 0, \pm j$, Nullstellen: $\eta_{1,2} = 1, -3$, PBZ: $G(s) = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{4s}{s^2+1}$

d) Pole: $\lambda_{1,2,3} = 0, \frac{3}{2} \pm j\frac{1}{2}$, Nullstellen: $\eta_1 = -\frac{1}{T_V}$,

PBZ: $G(s) = \frac{2k_p}{s} + \frac{k_p(5T_V+6)}{s^2-3s+\frac{10}{4}} - \frac{2k_p}{s^2-3s+\frac{10}{4}}$

e) Pole: $\lambda_{1,2,3} = -2, -3, 0$, Nullstellen: $\eta_{1,2,3} = 2, -\frac{1}{2T_V} \pm \frac{1}{2T_V} \sqrt{1 - \frac{4T_V}{T_N}}$,

PBZ: $G(s) = \frac{k_p \left(\frac{2}{T_N} + 8T_V - 4 \right)}{s+2} - \frac{k_p \left(\frac{5}{3T_N} + 15T_V - 5 \right)}{s+3} - \frac{\frac{k_p}{3T_N}}{s} + k_p T_V$

Aufgabe 13 (TR)

a)
$$Y(s) = \frac{s-2}{s+2} E_2(s) = \frac{s-2}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot E_1(s)$$

$$E_1(s) = U(s) - E_3(s) = U(s) - \frac{1}{s+3} Y(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{s-2}{(s+2)(s+1)} \left(U(s) - \frac{1}{s+3} Y(s) \right) = \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} U(s) - \frac{s-2}{(s+1)(s+2)(s+3)} Y(s)$$

$$\rightarrow Y(s) \left(1 + \frac{s-2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right) = \frac{s-2}{(s+2)(s+1)} U(s)$$

$$\rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{s-2}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{s-2}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{(s-2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3) + s-2}$$

b)
$$Y(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} E_1(s)$$

$$\rightarrow E_1(s) = -U(s) - E_3(s) = -U(s) - E_2(s) - Y(s) = -U(s) - \frac{1}{s+1} E_1(s) - Y(s)$$

$$\rightarrow E_1(s) \left(1 + \frac{1}{s+1} \right) = -U(s) - Y(s)$$

$$\rightarrow E_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s+1}} (-U(s) - Y(s))$$

$$\rightarrow Y(s) \left(1 + \frac{s-2}{(s+2)^2} \right) = \frac{s-2}{(s+2)^2} \cdot (-U(s))$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{s-2}{(s+2)^2}}{1 + \frac{s-2}{(s+2)^2}} \cdot (-U(s)) = -\frac{s-2}{(s+2)^2 + s-2} = \frac{2-s}{(s+2)^2 + s-2}$$

c)

$$Y(s) = E_3(s) + E_4(s) = E_1(s) + E_2(s) + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} E_2(s)$$

$$= E_1(s) + \left(1 + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \right) E_2(s)$$

$$= E_1(s) + \left(1 + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \right) \cdot \frac{1}{s} \cdot E_1(s)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} \right) \cdot E_1(s)$$

$$\begin{aligned}
 E_1(s) &= U(s) - E_5(s) = U(s) - \frac{s-2}{s+2} E_4(s) \\
 &= U(s) - \frac{s-2}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2+2s+1} E_2(s) \\
 &= U(s) - \frac{s-2}{(s+2)(s^2+2s+1)} \cdot \frac{1}{s} E_1(s) \\
 \rightarrow E_1(s) \left(1 + \frac{s-2}{(s+2)(s^2+2s+1)s} \right) &= U(s) \\
 \rightarrow E_1(s) &= \frac{1}{1 + \frac{s-2}{s(s+2)(s^2+2s+1)}} \cdot U(s) = \frac{s(s+2)(s^2+2s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+1) + s - 2} \cdot U(s) \\
 \rightarrow Y(s) &= \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s^2+2s+1)} \right) \frac{s(s+2)(s^2+2s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+1) + s - 2} \cdot U(s) \\
 \rightarrow G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(s+2)(s^2+2s+1) + (s+2)(s^2+2s+1) + (s+2)}{s(s+2)(s^2+2s+1) + s - 2}
 \end{aligned}$$