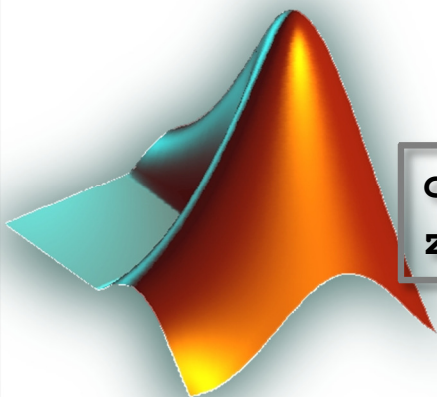


## Aufgabe 22 (4)

$$F_o(s) = \frac{-2kT_1 s^2}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, T_1 = 2, T_2 = 1, k = 1$$

- e) Diskretisierung mit *c2d* und 0,5 sek als Abtastzeit:

$$F_{oz}(z) = \frac{-2z^2 + 3.9z - 1.9}{z^2 - 1.39z + 0.47} \quad \text{bzw.} \quad F_{oz}(z) = \frac{-2(z-0.9511)(z-1)}{(z-0.7788)(z-0.6065)}$$

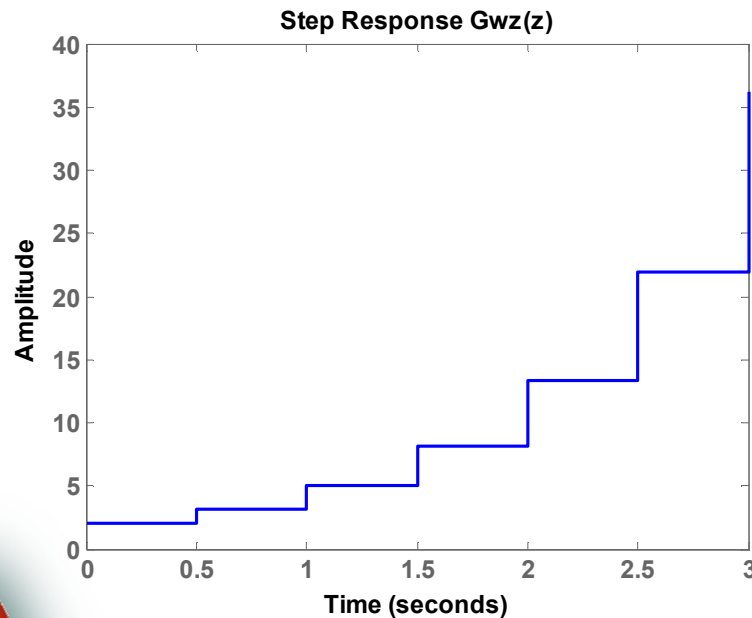


```
c2d(sys,T)
zpk(sys)
```

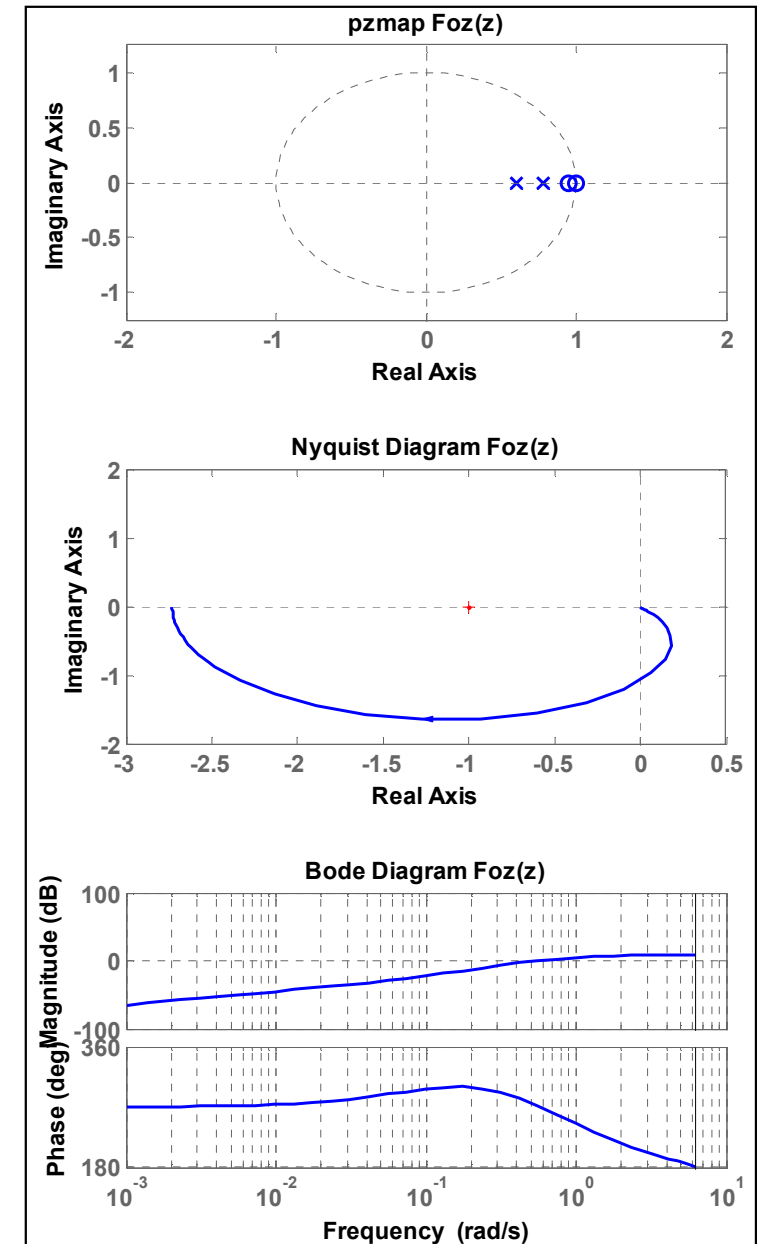
# Aufgabe 22 (5)

$$F_o(s) = \frac{-2kT_1s^2}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, T_1 = 2, T_2 = 1, k = 1$$

■ f)



```
subplot(n,m,k)
pzmap(sys)
bode(sys)
nyquist(sys)
step(sys,t)
```



# Systemdynamik und Regelungstechnik

## Übung 4: Frequenzbereichsdarstellungen, Stabilität

Lukas Kölsch, M. Sc.

INSTITUT FÜR REGELUNGS- UND STEUERUNGSSYSTEME (IRS)



# Übung/Tutorium 4: Themen

Übung

Tutorium

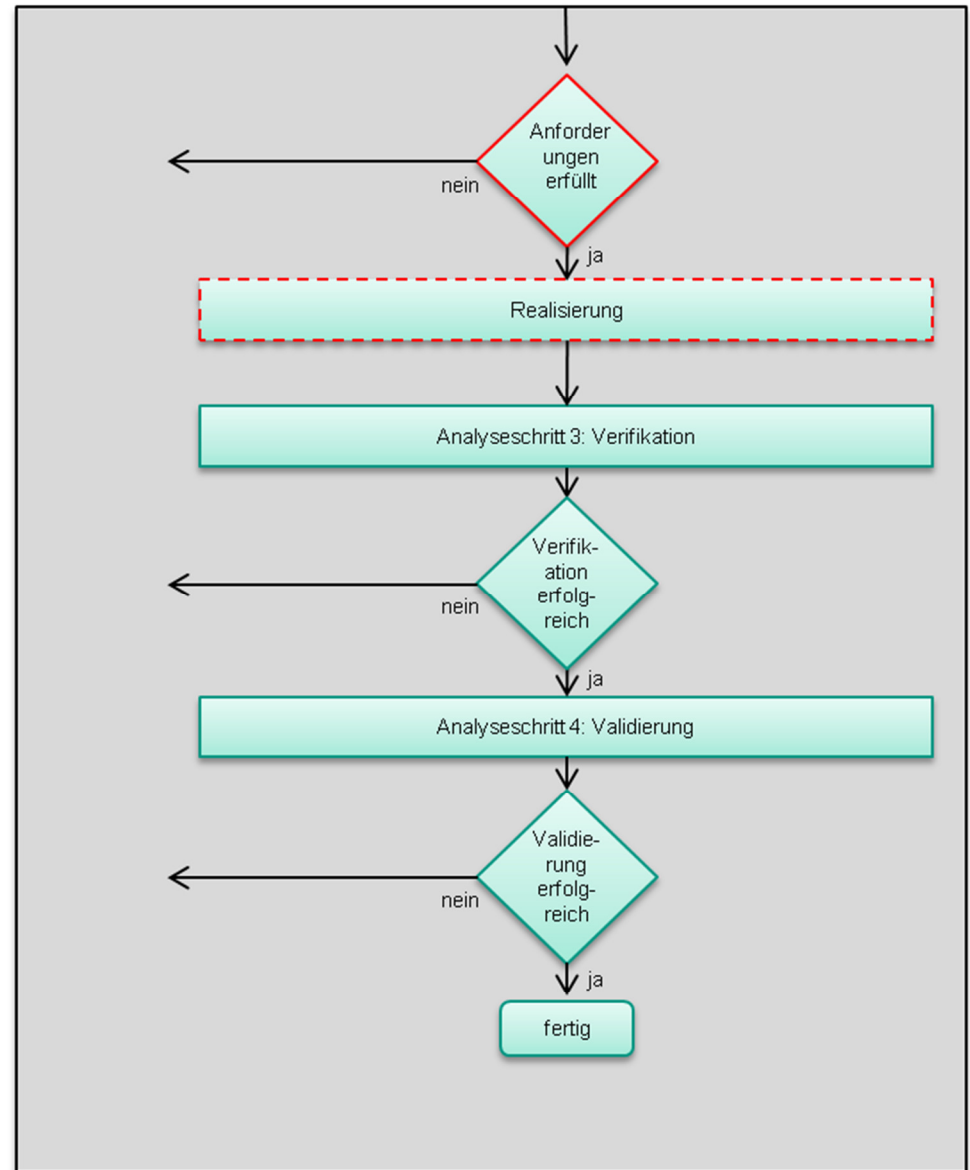
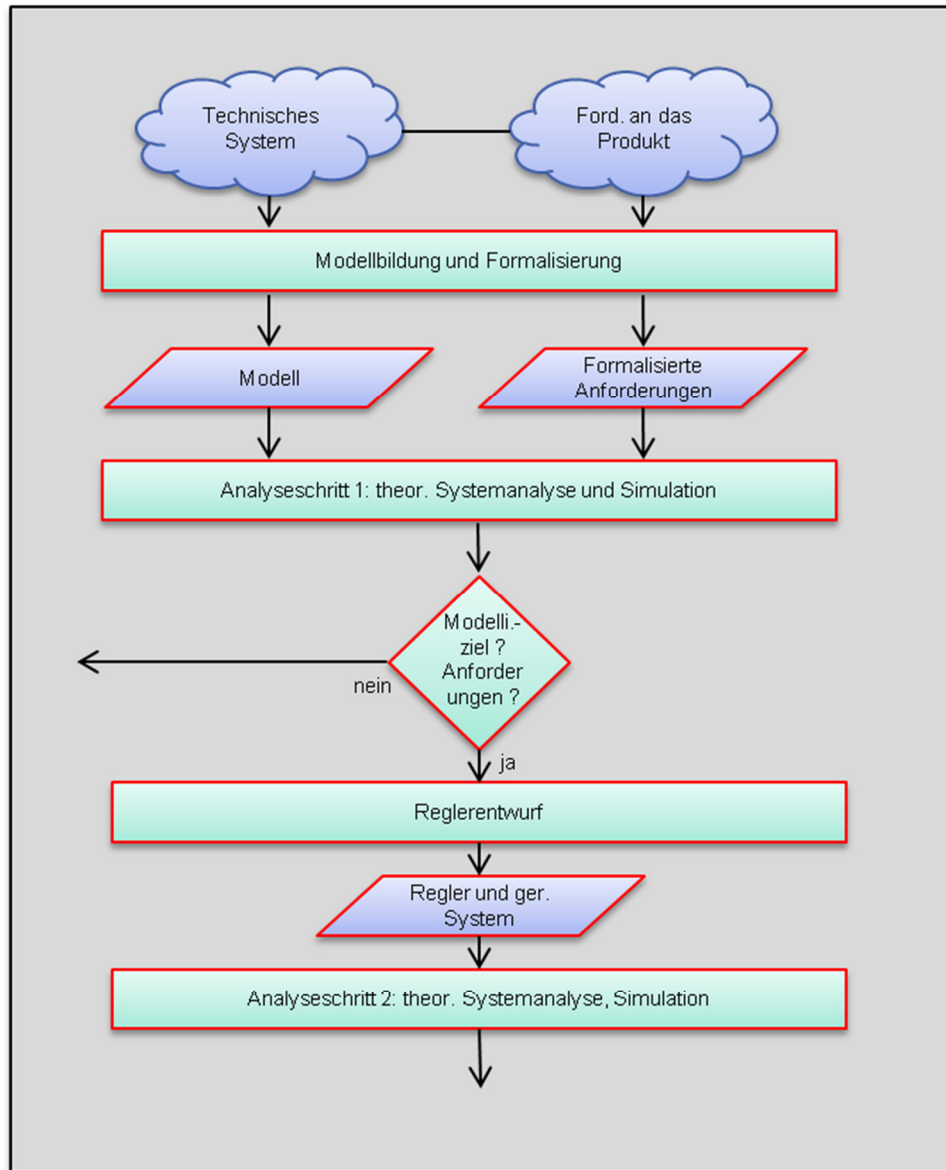
offener/geschlossener RK

Frequenzbereichsdarstellungen

Graphische Stabilitätskriterien

Algebraisches  
Stabilitätskriterium

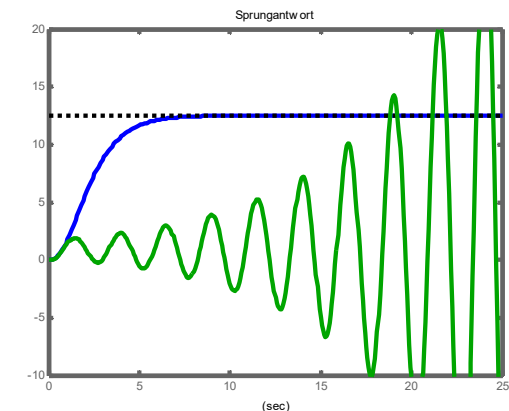
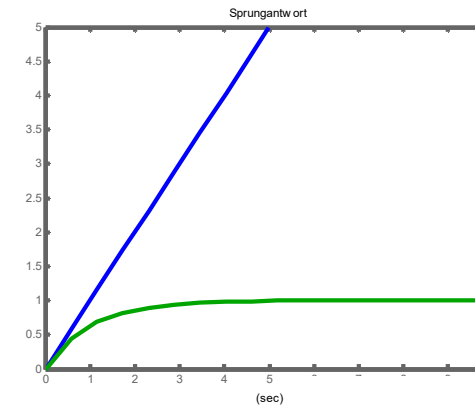
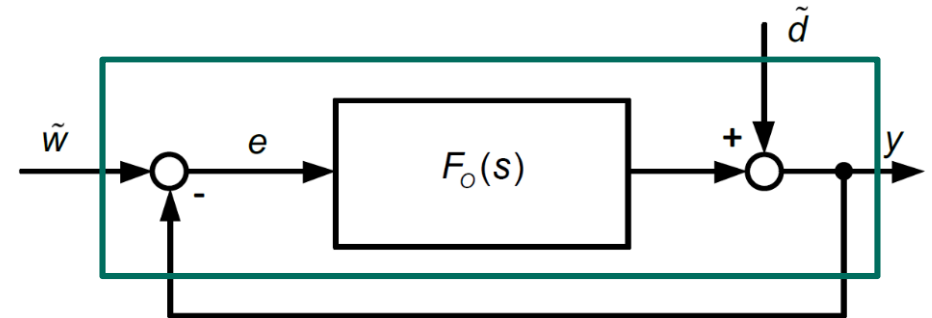
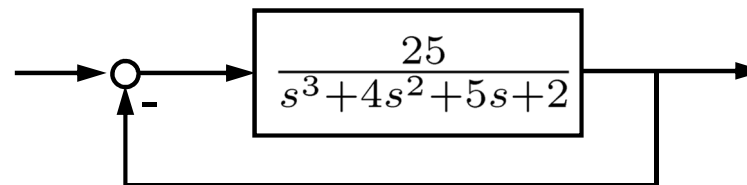
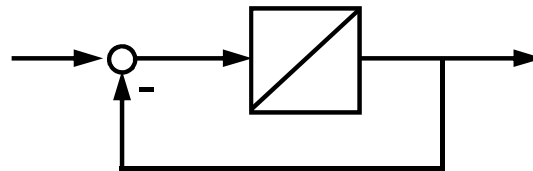
# Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



# Offener und geschlossener Regelkreis

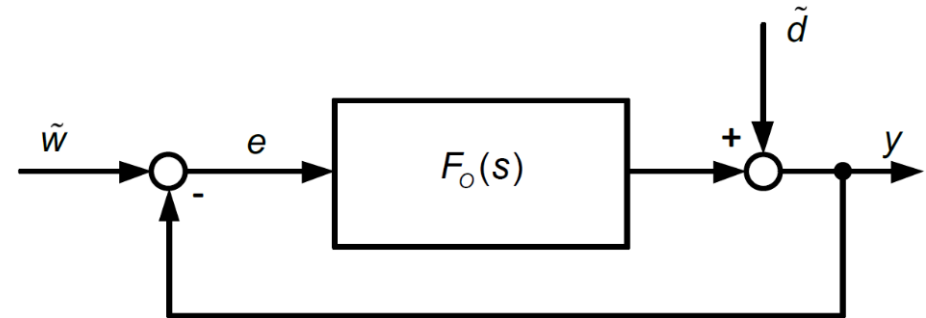
- Stabilität/stationäres Verhalten des offenen und geschlossenen Kreises sind im Allgemeinen unterschiedlich!

- Beispiele



# Offener und geschlossener Regelkreis (2)

$$G_w(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}$$



- Der Nenner des geschlossenen Kreises ergibt sich aus der Summe von Zähler und Nenner des offenen Kreises:

$$F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} \quad \Rightarrow \quad G_w(s) = \frac{\frac{Z_o(s)}{N_o(s)}}{1 + \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}} = \frac{Z_o(s)}{N_o(s) + Z_o(s)} \quad \left( = \frac{Z(s)}{N(s)} \right)$$

- Die Pole des geschlossenen Kreises werden also berechnet durch:

$$1 + F_o(s) = 0 \quad \text{bzw.} \quad N_o(s) + Z_o(s) = 0$$



# Frequenzbereichsdarstellungen – NOK/FKL

- 2 Darstellungsformen für das frequenzabhängige Übertragungsverhalten
- Üblicherweise für  $F_o(s)$  betrachtet
- Nur periodische Eingangssignale betrachtet
  - ➔ Abbildung der imaginären Achse ( $j\omega$ ) durch ÜF
- System ändert Amplitude und Phase der Schwingung

## ■ Nyquist-Ortskurve (NOK)

- $F_o(s)$ -Ebene
- Keine Frequenzachse
- Darstellung von Betrags- und Phasenänderung in einem Bild

## ■ Bode-D./Frequenzkennlinien (FKL)

- $|G(j\omega)|$  und  $\arg\{G(j\omega)\}$  jeweils über  $\omega$  aufgetragen
- also jeder Punkt der NOK getrennt in Amplitude und Phase abgebildet

erkennbar:

$F_o(s)$ : Systemtyp, Resonanzüberhöhungen,  
ggf. stationäre Genauigkeit

$G_w(s)$ : Stabilität (s.später)

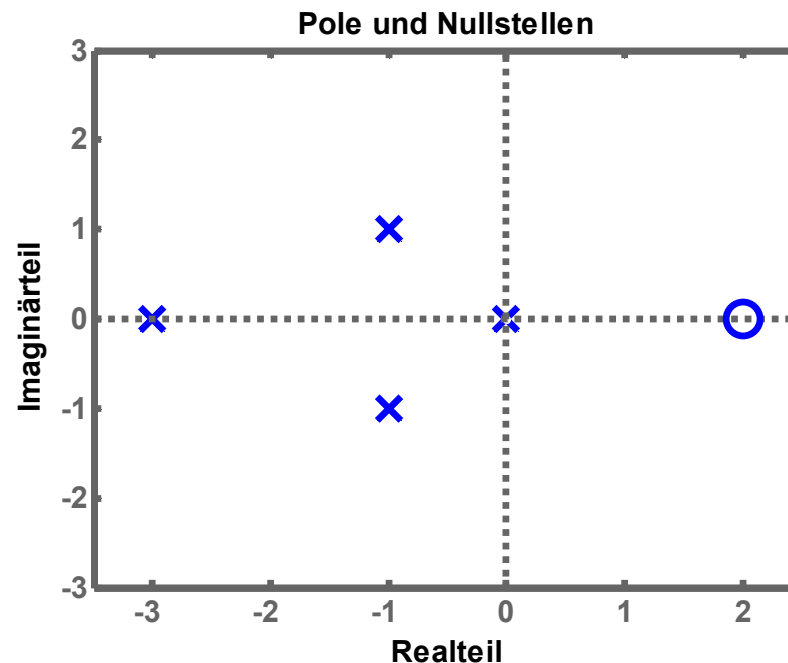
NICHT erkennbar:

genaue Lage der Pole/Nullstellen, Stabilität von  $F_o(s)$



# Frequenzbereichsdarstellungen – Pol/Nullstellen-Plan

- Zeigt eindeutig die Lage der Pole und Nullstellen von ÜFen in der s-Ebene
- Lässt auch Aussagen über aperiodisches Verhalten zu (Realteile)



erkennbar:

Systemtyp und Stabilität, Minimalphasigkeit  
(Resonanzüberhöhungen bedingt)

NICHT erkennbar:

Stationäre Genauigkeit (da Verstärkungsfaktor nicht  
enthalten)

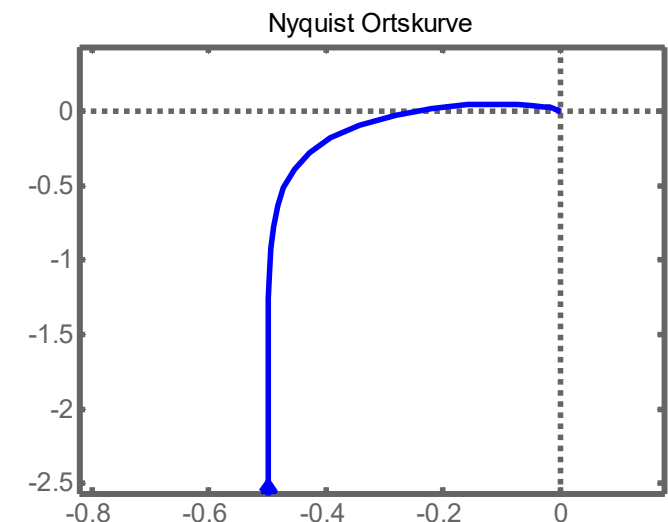
# Frequenzbereichsdarstellungen – zeitdiskrete Systeme

- Ebenfalls: NOK, FKL und Pol/Nullstellen-Plan
- Prinzipiell gleiche Aussagen wie im Kontinuierlichen möglich
  - Systemtyp – prinzipielles Verhalten
  - Stabilität offener/geschlossener Kreis
  - Minimalphasigkeit
  - Stationäre Genauigkeit
- Unterschiede zum kontinuierlichen Fall
  - Lage der Pole und Nullstellen jetzt nicht bezüglich der  $j$ -Achse sondern bezüglich des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene
  - Frequenzkennlinien nur bis zur halben Abtastfrequenz sinnvoll
  - Zeitdiskrete NOK/FKL im Allgemeinen nur mit Rechner zu zeichnen

# Konstruktion der NOK



- Für Start bei  $\omega = 0$  und Ende bei  $\omega \rightarrow \infty$  jeweils Betrag und Phase (evtl. auch Realteil/Imaginärteil) aus ÜF ablesen/berechnen
- Verlauf dazwischen qualitativ zeichnen
- Generell gilt:
  - Pole mit negativem Realteil drehen Phase um  $90^\circ$  zurück ( $\Delta\varphi = -90^\circ$ )
  - Pole mit positivem Realteil drehen Phase um  $90^\circ$  vor ( $\Delta\varphi = +90^\circ$ )
  - Nullstellen mit pos. Realteil drehen Phase um  $90^\circ$  zurück ( $\Delta\varphi = -90^\circ$ )
  - Nullstellen mit neg. Realteil drehen Phase um  $90^\circ$  vor ( $\Delta\varphi = +90^\circ$ )
- Bei Zählergrad < Nennergrad endet die NOK im Ursprung
- Bei Zählergrad = Nennergrad endet die NOK auf der reellen Achse
- Bei Zählergrad > Nennergrad endet die NOK im Unendlichen  
(Phase beachten  $\rightarrow$  Richtung)
- NOK startet entweder im Ursprung  
oder auf der reellen Achse  
oder im Unendlichen



# Konstruktion der FKL

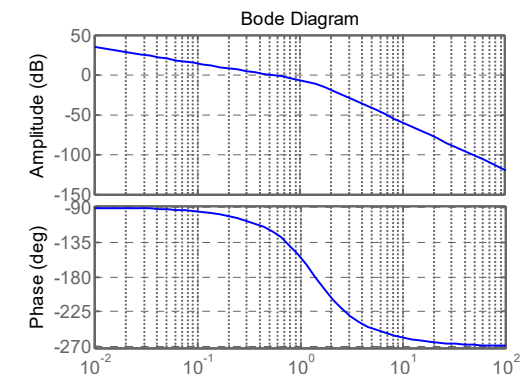


## ■ Geradennäherung von Betrag und Phase für jede elementare Teil-ÜF einzeichnen (dabei muss Gesamt-ÜF als Produkt der Teil-ÜFen vorliegen !)

- Konstante K: Amplitudengang konstant bei  $20\log(K)$   
Phasengang konstant bei  $0^\circ$
- Pol im Ursprung: Amplitudengang fällt mit  $20\text{dB/Dek}$  (Nulldurchgang bei  $1\text{rad/s}$ )  
Phasengang konstant bei  $-90^\circ$
- Nullstelle im Urspr.: Amplitudengang steigt mit  $20\text{dB/Dek}$  (Nulldurchgang bei  $1\text{rad/s}$ )  
Phasengang konstant bei  $+90^\circ$
- Reeller Pol (z.B.  $PT_1$ ): Amplitudengang zunächst konstant, dann  $-20\text{dB/Dek}$  ab  $\omega = \omega_0 = 1/T$   
Phasengang fällt von  $0^\circ$  auf  $-90^\circ$  von  $\omega = 0,1\omega_0$  bis  $10\omega_0$ , sonst konst. (Pol links)  
Ph.gang steigt von  $0^\circ$  auf  $+90^\circ$  von  $\omega = 0,1\omega_0$  bis  $10\omega_0$ , sonst konst. (Pol rechts)
- Reelle Nullstelle: Amplitudengang zunächst konstant, dann  $+20\text{dB/Dek}$  ab  $\omega = \omega_0 = 1/T$   
Ph.gang steigt von  $0^\circ$  auf  $+90^\circ$  von  $\omega = 0,1\omega_0$  bis  $10\omega_0$ , sonst konst. (NSt links)  
Ph.gang fällt von  $0^\circ$  auf  $-90^\circ$  von  $\omega = 0,1\omega_0$  bis  $10\omega_0$ , sonst konst. (NSt rechts)

dabei ist  $\omega_0$  jeweils der Abstand des Pols/der Nullstelle vom Ursprung

## ■ Alle Teil-Geradennäherungen graphisch addieren



# Stabilität

- BIBO-Stabilität:  $|u(t)| \leq M < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$
- Zeitbereich: Systemantwort auf beliebige endliche Eingangssignale klingt NICHT unendlich auf
- Frequenzbereich: alle Pole haben negativen Realteil  
→ algebraische Stabilitätskriterien

**gilt für beliebige Systeme/Übertragungsglieder**

- Im offenen Kreis werden Schwingungen niemals so verstärkt und phasenverschoben, dass die Rückführung der Ausgangsgröße ein Aufklingen erzeugt  
  
→ graphische Stabilitätskriterien für Regelkreise  
→ aus Frequenzbereichsdarstellungen des **offenen Kreises** auf Stabilität des **geschlossenen Kreises** schließen

# Stabilität – Nyquistkriterium in NOK



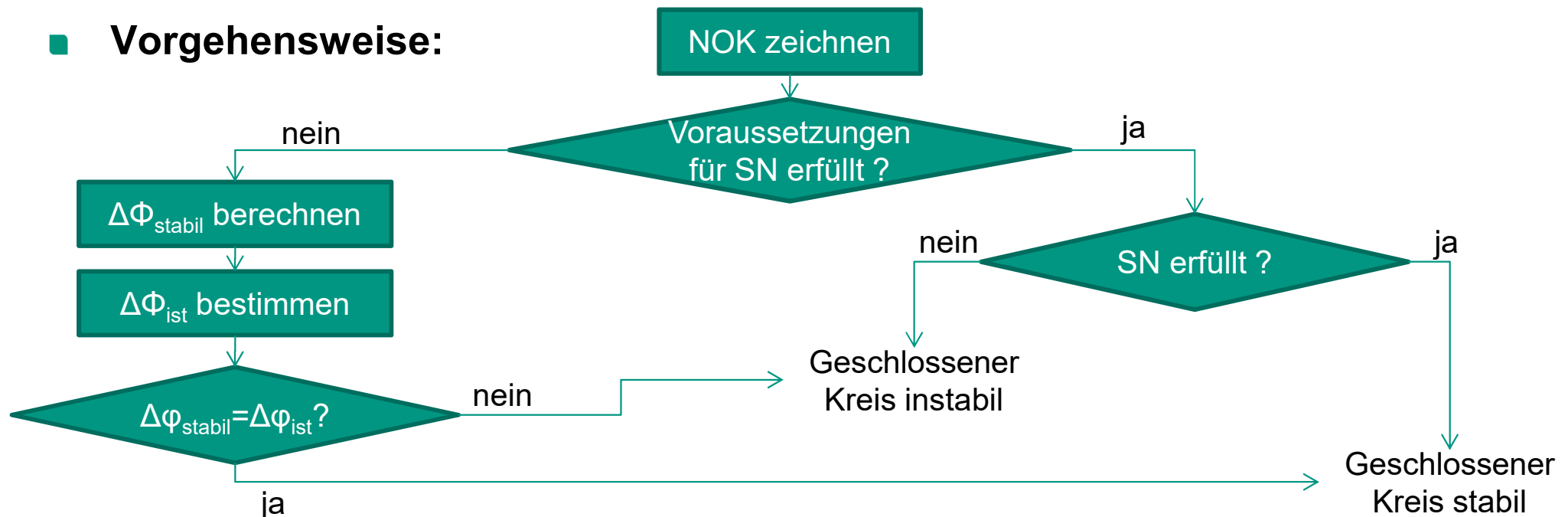
## ■ Spezielles Nyquistkriterium

- Voraussetzung: offener Kreis stabil (Ausnahme: max. 2 Pole im Ursprung)
- Der geschlossene Kreis ist stabil, falls die NOK des offenen Kreises den Punkt -1 „links liegen“ lässt.

## ■ Allgemeines Nyquistkriterium

- Der geschlossene Kreis ist stabil, falls  $\Delta\Phi_{\text{ist}}$  des Fahrstrahls von -1 zu  $F_o(s)$  für  $\omega = 0 \dots \infty$  den Wert  $\Delta\Phi_{\text{stabil}} = r_o \cdot \pi + a_o \cdot \frac{\pi}{2}$  annimmt (mathematisch positiv!)

## ■ Vorgehensweise:



# Stabilität – Nyquistkriterium in FKL



## ■ Spezielles Nyquistkriterium

- Voraussetzung: offener Kreis stabil (Ausnahme: max. 2 Pole im Ursprung) und  $\arg\{F_o(s)\}$  zwischen  $-540^\circ$  und  $180^\circ$  für  $|F_o(s)|_{dB} \geq 0$
- Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn  
d.h., wenn  
oder wenn

$$\varphi_D = \arg\{F_o(j\omega_D)\} > -180^\circ$$

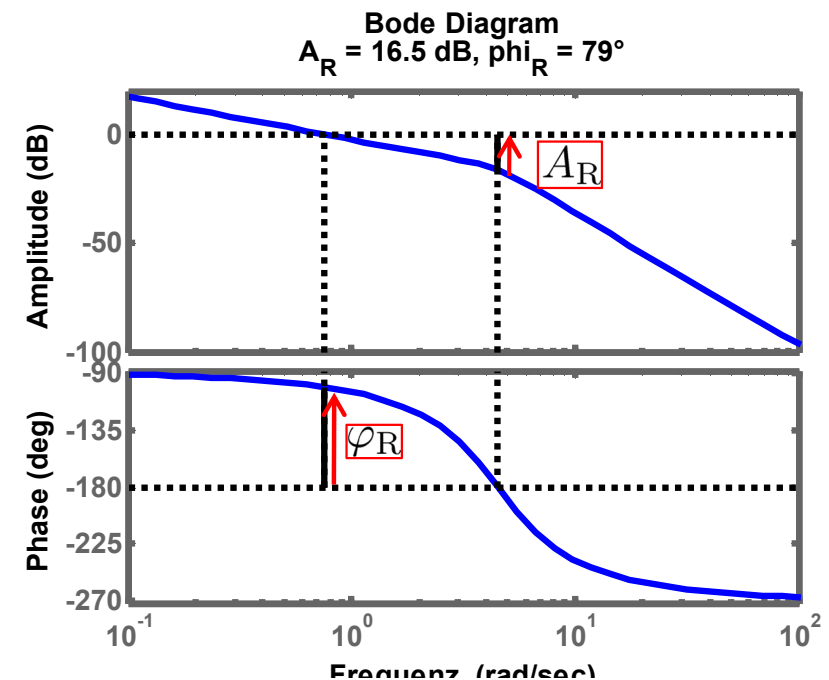
$$\varphi_R = \arg\{F_o(j\omega)\}|_{|A(\omega)=0dB}| + 180^\circ > 0$$

$$A_R = -|A(\omega)|_{\varphi(\omega)=-180^\circ} > 0dB$$

- Dabei wird der Amplitudenrand  $A_R$   
vom Amplitudengang zur 0dB-Linie ...

... und der Phasenrand  $\varphi_R$   
von der  $-180^\circ$ -Linie zum Phasengang

betrachtet





## Aufgabe 29 (UE)

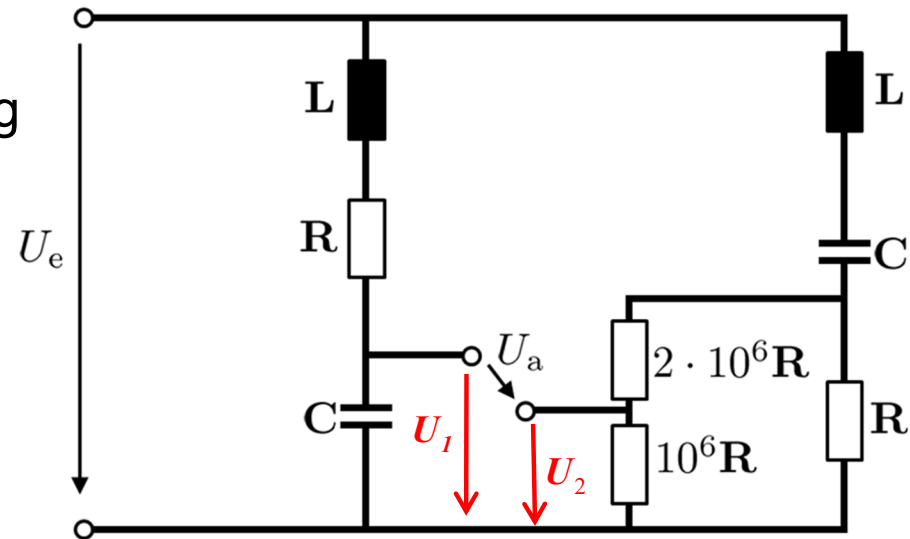
- Elektrisches Netzwerk
- Hilfsspannungen  $U_1$ ,  $U_2$  zur Bestimmung der Ausgangsspannung  $U_a$

- damit gilt:

$$U_1 = \frac{1}{Cs} I_1$$

$$U_2 = \frac{1}{3} R I_2$$

$$U_e = \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I_{1/2}$$



→ 
$$G(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1 - \frac{1}{3} CRs}{CLs^2 + CRs + 1}$$

- Werte einsetzen → Strecken-ÜF:

$$G(s) = \frac{1 - \frac{1}{3}s}{\frac{1}{36}s^2 + s + 1} = -12 \frac{s-3}{s^2 + 36s + 36}$$

- Regler: zunächst  $R(s) = 1$

→ 
$$F_o(s) = G(s)R(s) = -12 \frac{s-3}{s^2 + 36s + 36}$$

## Aufgabe 29 (2)

- NOK zeichnen
- Spezielles Nyquistkriterium
  - alle Pole stabil → spezielles Nyquistkriterium anwendbar
  - NOK lässt -1 „links liegen“ → geschlossener RK stabil
- Allgemeines Nyquistkriterium
  - $r_o=0, a_o=0 \rightarrow \Delta\Phi_{\text{stabil}} = 0 \cdot \pi + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$
  - überprüfen:  $\Delta\Phi_{\text{ist}} = 0$
  - da  $\Delta\Phi_{\text{ist}} = \Delta\Phi_{\text{stabil}}$  → geschlossener RK stabil