

Systemdynamik und Regelungstechnik

Übung 6: Wurzelortskurve, Reglerentwurf mit MATLAB

Lukas Kölsch, M. Sc.

INSTITUT FÜR REGELUNGS- UND STEUERUNGSSYSTEME (IRS)



Übung/Tutorium 6: Themen

Übung

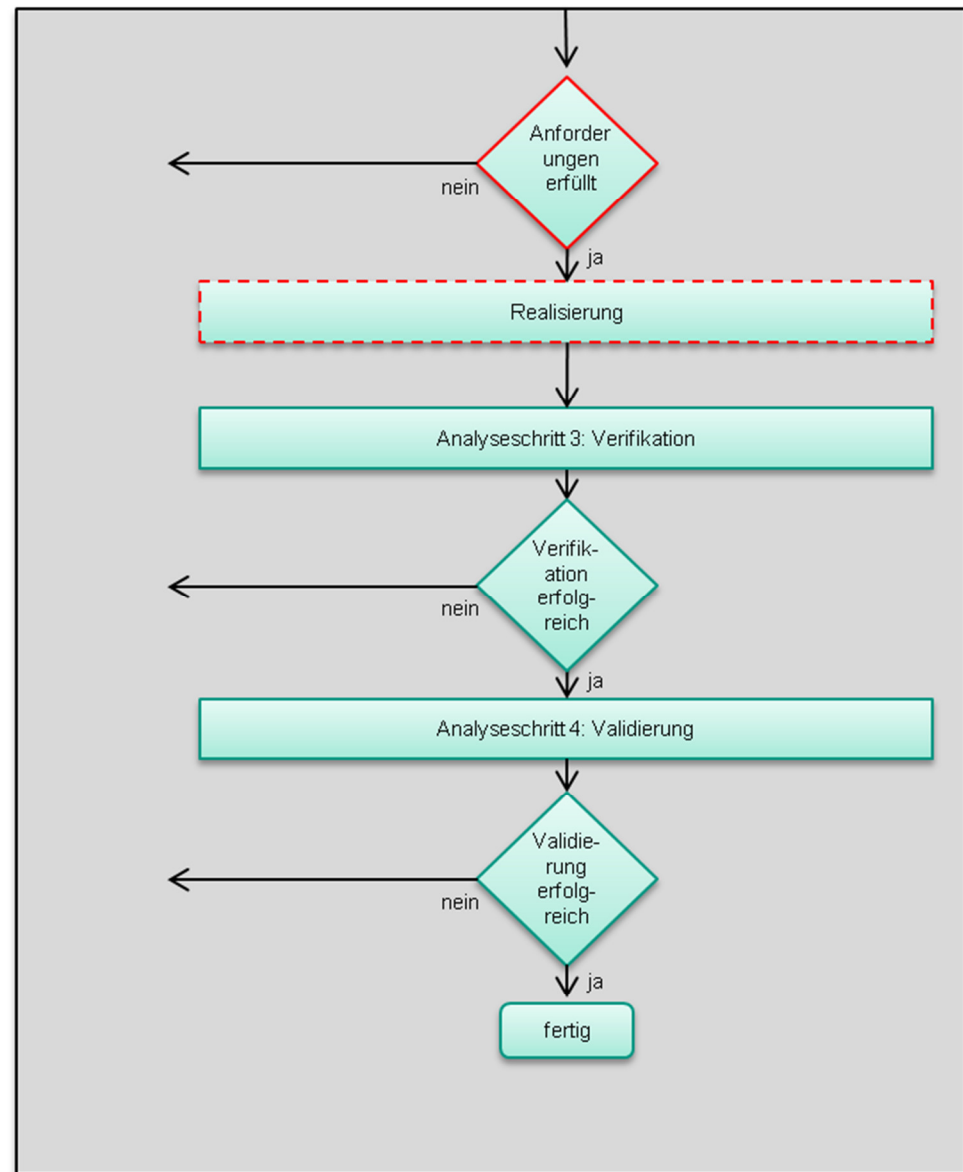
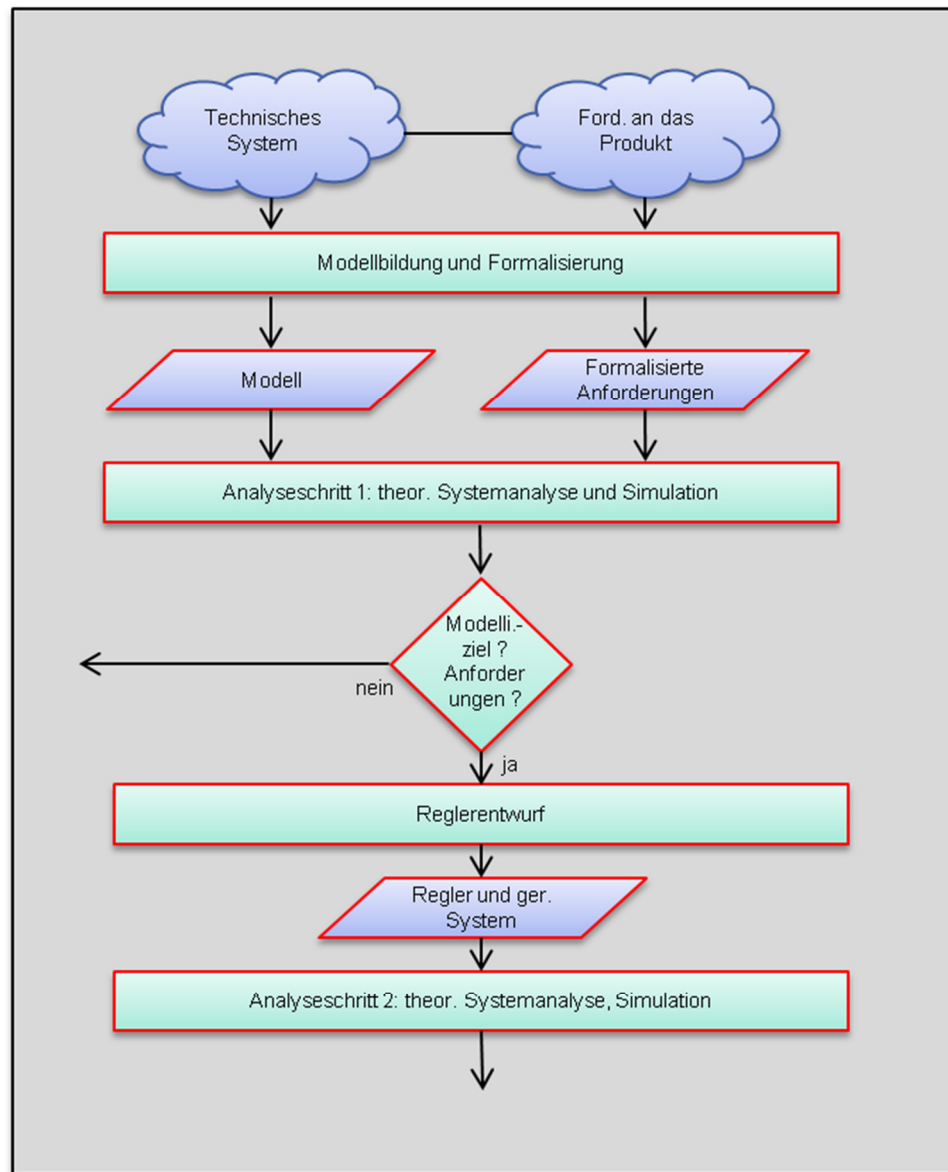
Tutorium

Wurzelortskurve

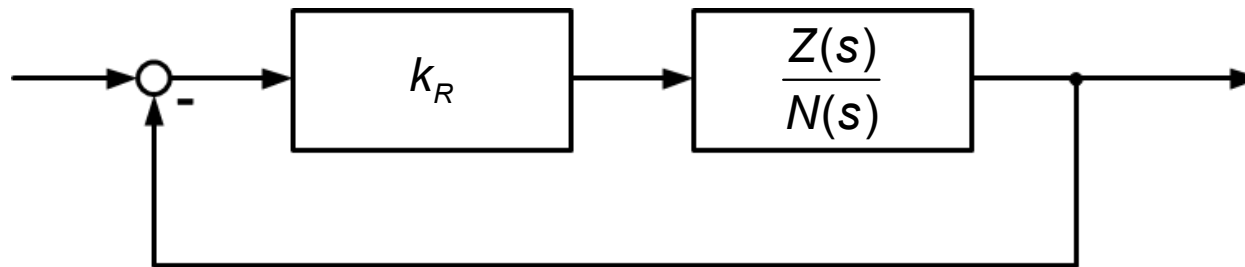
Konstruktionsregeln

Analyse/Reglerentwurf
mit MATLAB

Entwicklungsablauf für Regelungssysteme



Wurzelortskurve (WOK)



$$F_O(s) = k_R \frac{Z(s)}{N(s)}$$

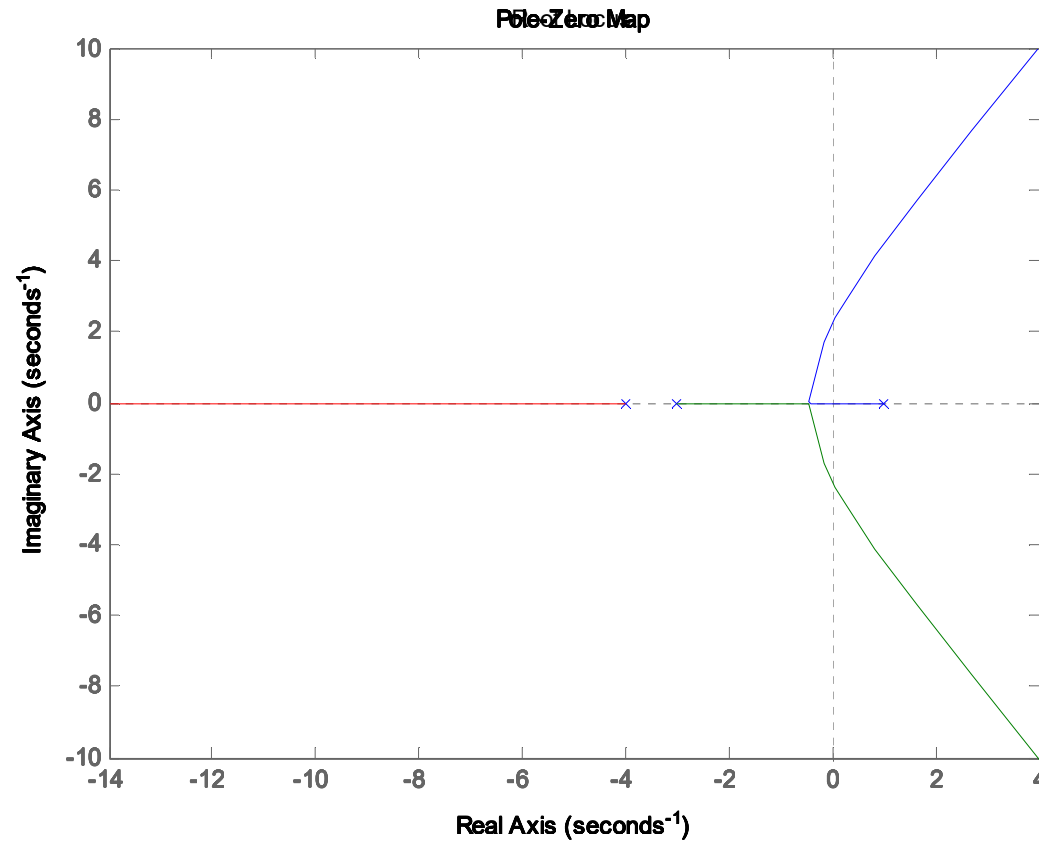
$$G_w(s) = \frac{k_R Z(s)}{k_R Z(s) + N(s)}$$

➔ charakteristisches Polynom: $k_R Z(s) + N(s) = 0$

- Bei Variation von k_R verändert sich charakteristisches Polynom und damit auch die Lage der Pole von $G_w(s)$
- WOK zeigt die Lage der Pole des **geschlossenen** RKes in der s-Ebene in Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors k_R
- Äste starten ($k=0$) in den Polen des **offenen** Kreises und enden ($k \rightarrow \infty$) in den Nullstellen des **offenen** Kreises oder im Unendlichen



Wurzelortskurve - Beispiel



Wurzelortskurve - Auswertung



■ Lage der Pole: Stabilität

➔ Aus gegebener WOK kann Stabilitätsaussage über geschlossenen Kreis getroffen werden

- Sind für gewisse k_R alle Äste der WOK in der linken HE:

➔ RK mit P-Regler stabilisierbar

- Ist mindestens ein Ast für alle k_R in der rechten HE:

➔ RK mit keinem P-Regler stabilisierbar

➔ Hinzufügen weiterer Dynamik
(Pole/Nullstellen) durch Regler nötig

■ Berechnung des stabilen Bereichs für k_R aus charakteristischer Gleichung.:

$$1 + F_o(s) = 0 \quad \rightarrow \quad N(s) + k_R Z(s) = 0$$

- SP mit imag.Achse gesucht $\rightarrow s=j\omega$ setzen und Aufspalten in Real- und Imaginärteil

➔ Da beide Teile gleich Null zu setzen sind, erhält man 2 Gleichungen

- daraus 2 Parameter bestimmbar: Verstärkung k_R bei der G_w grenzstabil,
Eigenfrequenz ω der zugehörigen Dauerschwingung

Aufgabe 37 (UE)

- Gegeben: Strecke $G_S(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$ mit WOK
- Gesucht: realer PD-Regler $G_R(s) = k \frac{1+T_R s}{1+T_N s}, \quad k \geq 0$

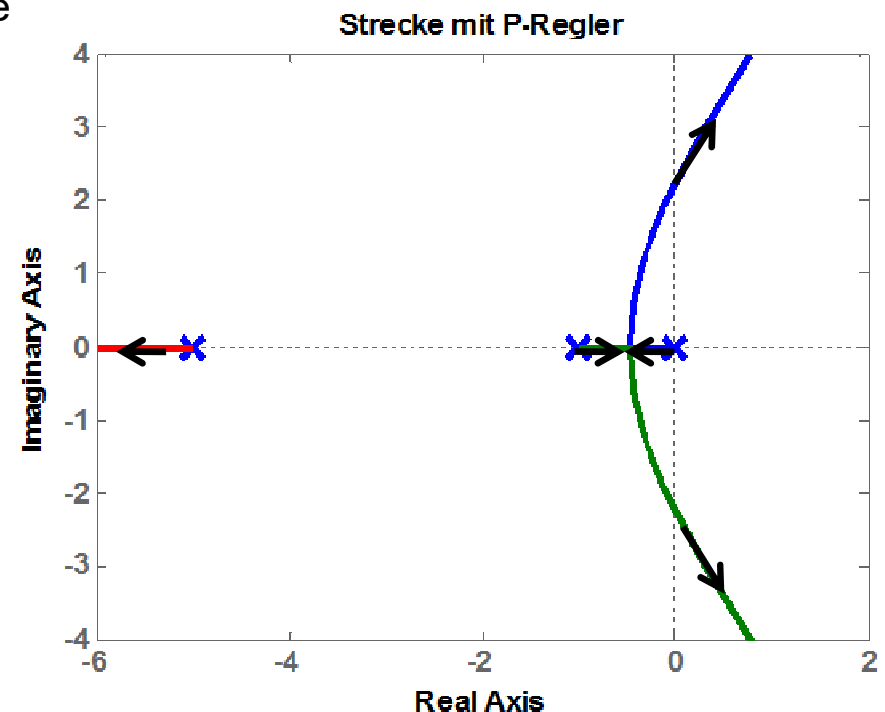
■ a) Analyse der WOK

- Kreuze = Pole, Kreise = NSten
- WOK läuft von Polen zu NSten bzw. ins Unendliche

- System mit P-Regler KANN instabil werden, da Teile der WOK in der rechten Halbebene verlaufen
- Eigenfrequenz an der Stabilitätsgrenze wird berechnet durch:

- $1+F_o(j\omega)$ gleich Null setzen
- Auflösen nach ω
- $f = \omega/2\pi$

- Ergebnis: $f_{\text{eig}} = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} = 0,36 \text{ Hz}$



Aufgabe 37 (2)

■ b) zunächst idealer PD-Regler:

→ Kompensation der größten Streckenzeitkonstanten $T_{R1}=1$

$$\rightarrow G_R(s) = k \cdot (1 + s)$$

$$\rightarrow F_o(s) = k \cdot (1 + s) \frac{1}{s(s+1)(s+5)} = k \frac{1}{s(s+5)}$$

→ WOK kann skizziert werden

- Gefordert: Dämpfung des geregelten Systems $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Zur Erinnerung:

- Konjugiert komplexes Polpaar i.A. beschrieben durch Nennerterm $1 + 2dT_s + T^2s^2$
- Somit Lage der Pole bei $s_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1 - d^2}$

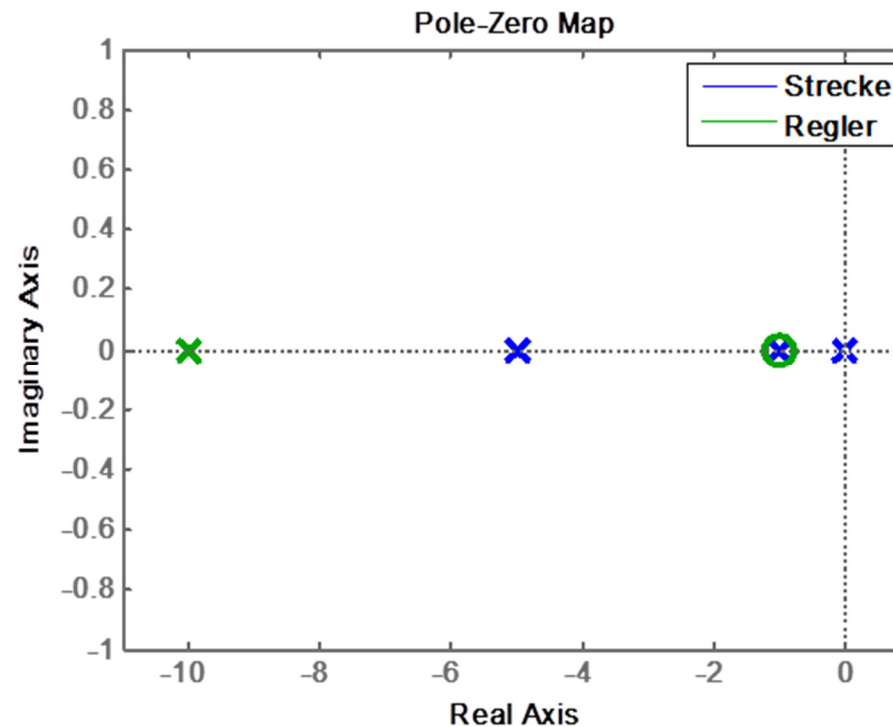
- Forderung bedeutet also: Imaginärteil gleich Realteil, d.h. Lage der Pole bei $s_{1,2} = \frac{5}{2}(-1 \pm j)$

- Charakteristische Gleichung mit Forderung gleichsetzen ergibt $k = \frac{25}{2}$

➔ Regler vollständig bestimmt: $G_R(s) = \frac{25}{2} \cdot (1 + s)$

Aufgabe 37 (3)

- c) realer PD-Regler: zusätzlicher Pol bei -10



- Polkonfiguration qualitativ wie in a)
- Verlauf der WOK qualitativ wie in a)
- für bestimmte k stabil

WOK - Konstruktionsregeln

- Hilfreich zum Skizzieren der WOK „von Hand“ bei komplizierteren Verläufen
- Nicht immer alle Regeln anwendbar/nötig
 - R3 nur wenn Pole/NSten auf der reellen Achse
 - R4/5 nur wenn Äste gegen Unendlich laufen
 - R6/7 nur wenn Verzweigungspunkte existieren
 - R9 nur wenn Schnittpunkte mit imaginärer Achse vorliegen
- Manche Regeln nur zum exakten Bestimmen eines Punktes/Winkels bei bereits bekannter prinzipieller Form
- Regeln werden erst durch Anwendung klar
→ bitte üben !



WOK – Konstruktionsregeln (2)

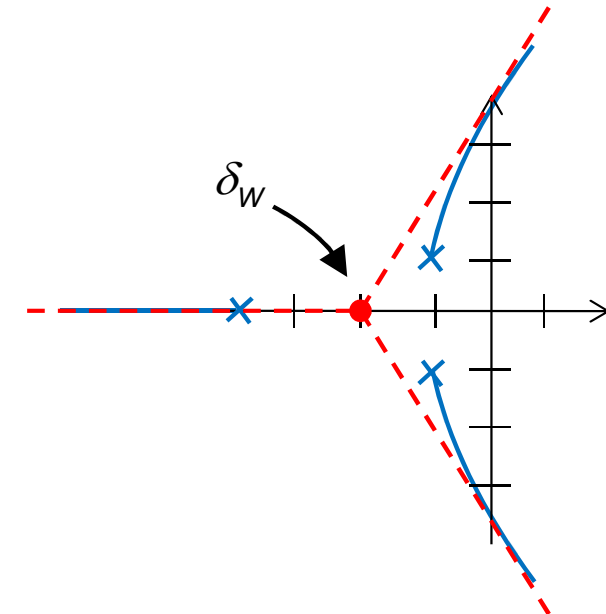
- R1: *Start und Ende*
 - Äste beginnen in Polen des offenen Kreises und enden in den Nullstellen des offenen Kreises bzw. im Unendlichen

- R2: *Symmetrie*
 - der WOK zur reellen Achse

- R3: *Punkte auf der reellen Achse*
 - gehören zur WOK, wenn rechts davon ungerade Anzahl reeller Pole/Nsten des offenen Kreises liegen

WOK – Konstruktionsregeln (3)

- R4: *Wurzelschwerpunkt*
 - Schnittpunkt der Asymptoten aller gegen Unendlich strebenden Äste



- Berechnung durch:

Summe der Realteile der Pole des offenen Kreises

Summe der Realteile der NSten des offenen Kreises

$$\delta_w = \frac{\sum_{v=1}^n \operatorname{Re}\{p_v\} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}\{n_{\mu}\}}{n - m}$$

„Polüberschuss“:
Differenz der Anzahl der Pole und NSten des offenen Kreises

WOK – Konstruktionsregeln (4)

■ R5: *Anstiegswinkel der Asymptoten*

- Im Wurzelschwerpunkt
- Winkel von der reellen Achse (in positiver Richtung)
- Berechnung durch:

$$\varphi_i = (2i + 1) \frac{\pi}{n - m}, \quad i = 0, \dots, n - m - 1.$$

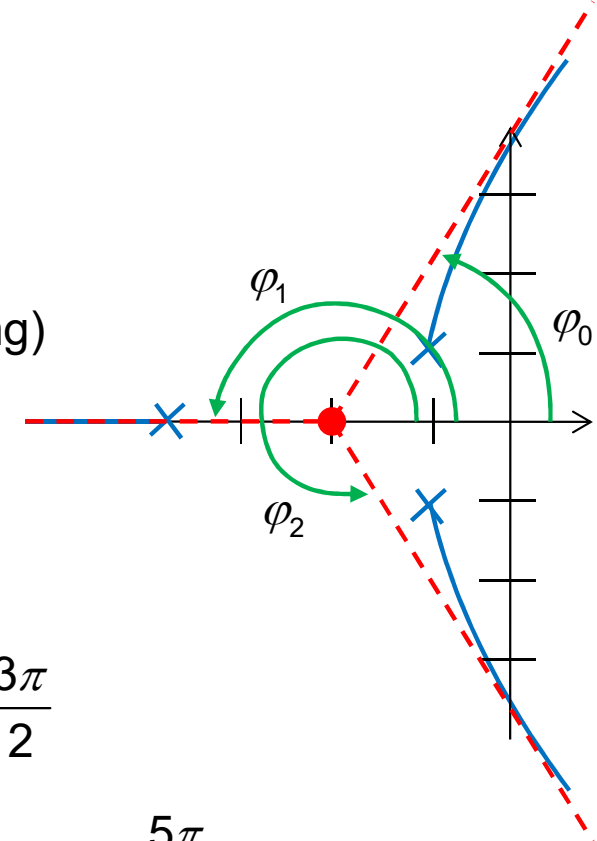
- Bsp: bei Polüberschuss 2:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$$

- bei Polüberschuss 3:

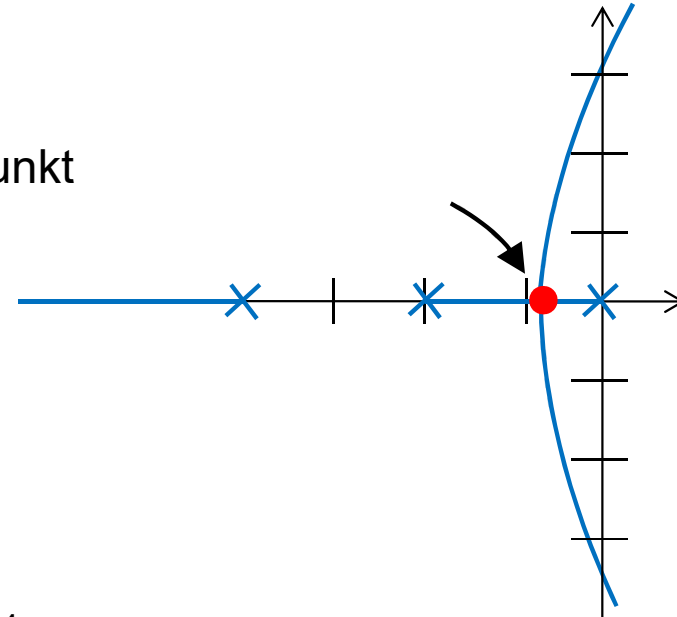
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$$

usw.



WOK – Konstruktionsregeln (5)

- R6: *Verzweigungspunkt*
 - mehrerer Äste
 - i.A. NICHT gleich dem Wurzelschwerpunkt



- Berechnung durch

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - n_{\mu}} - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - p_{\nu}} = 0.$$

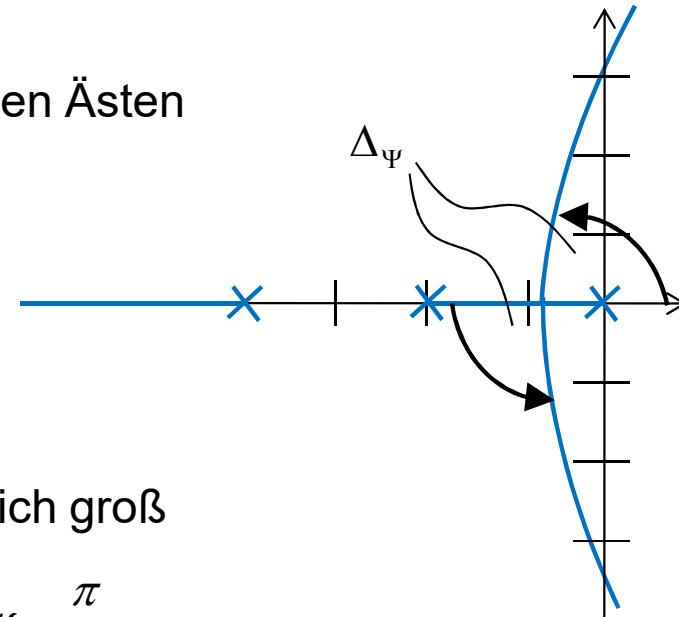
Summe der Inversen der
Nullstellenfaktoren

Summe der Inversen der
Polstellenfaktoren

Achtung: NICHT Inverse des
Produkts, sondern Summe der
Inversen

WOK – Konstruktionsregeln (6)

- R7: *Verzweigungswinkel*
 - d.h. Winkel zwischen sich verzweigenden Ästen
 - Im Verzweigungspunkt



- Alle Winkel am Verzweigungspunkt gleich groß
- → Bei r sich schneidenden Ästen:
$$\Delta\psi = \frac{\pi}{r}$$

- Im Beispiel: $r=2 \rightarrow \Delta\psi = \frac{\pi}{2}$

WOK – Konstruktionsregeln (7)

- R8: *Polaustrittswinkel (Nullstelleneintrittswinkel)*
 - Winkel zwischen dem aus einem Pol austretenden (bzw. in eine Nullstelle eintretenden) Ast und der positiven reellen Achse

- Berechnung durch:

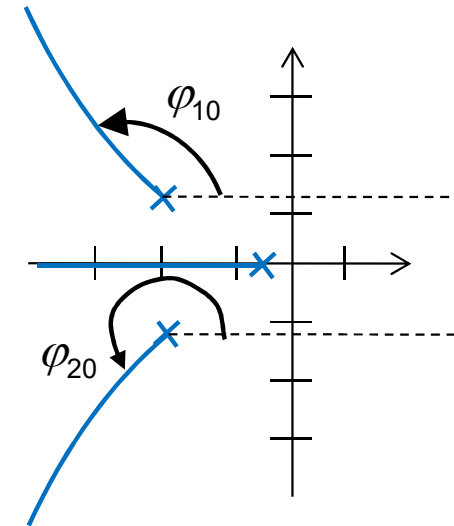
$$\varphi_{\rho i} = -\frac{1}{\varepsilon_{\rho} r_{\rho}} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ s_{\lambda} \neq s_{\rho}}}^{m+n} \varepsilon_{\lambda} \angle(s_{\rho} - s_{\lambda}) + (2i + 1) \frac{\pi}{\varepsilon_{\rho} r_{\rho}}, \quad i = 0, \dots, r_{\rho} - 1$$

Vorfaktoren

$$\varepsilon_{\lambda} = \begin{cases} +1, & \text{falls } s_{\lambda} \text{ eine Nullstelle } n_{\mu} \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } s_{\lambda} \text{ eine Polstelle } p_{\nu} \text{ ist} \end{cases}$$

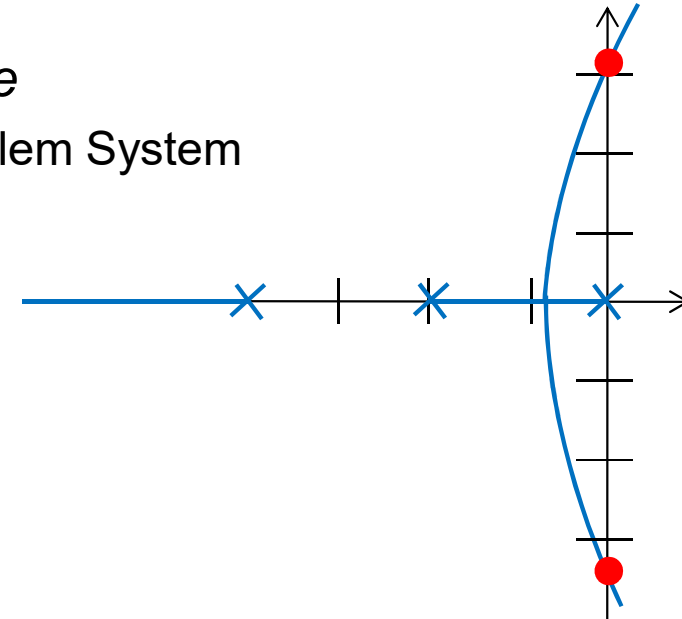
Winkel der Vektoren von anderen Polen/NSten zum betrachteten Pol/NSte

Zusätzlicher Offset



WOK – Konstruktionsregeln (8)

- R9: *Schnittpunkte mit der imaginären Achse*
 - Bezeichnen Lage der Pole bei grenzstabilem System



- Berechnung durch:

$$kP_o(j\omega) + Q_o(j\omega) = 0$$

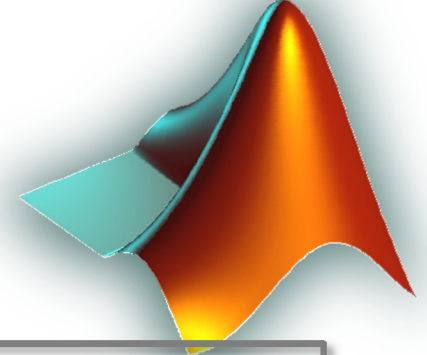
Zählerpolynom des offenen Kreises

Nennerpolynom des offenen Kreises

- Dann Aufspalten in Gleichungen für Real- und Imaginärteil und Bestimmen von ω (Imaginärteil des Schnittpunktes) und k (zugehör. Verstärkung)

Aufgabe 40 (UE)

- Strecke: $G_S(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+5)}$
- Regler: $G_R(s) = k_R, \quad k_R \geq 0$
- Gesucht:
 - Wurzelortskurve zeichnen
 - Wurzelschwerpunkt (R4)
 - Anstiegswinkel (R5)
 - Verzweigungspunkte (R6)
 - Polaustrittswinkel (R8)
 - Stabilitätsbereich für k_R



rlocus (sys)

- **Vorgehen:** (generell beim Zeichnen der WOK, nicht nur bei der A40)
 - Pole/NSten des offenen Kreises zeichnen
 - Teile der WOK auf reeller Achse zeichnen
 - Polüberschuss berechnen → Anzahl Asymptoten? → ggf. Wurzelschwerpunkt + Anstiegswinkel
 - Qualitativen Verlauf überlegen → Verzweigungen? → ggf. Verzweigungspunkte (und –winkel)
 - Polaustrittswinkel (und ggf. Schnittpunkte mit j-Achse)
 - Restlichen Verlauf abschätzen und zeichnen (Richtungen)

