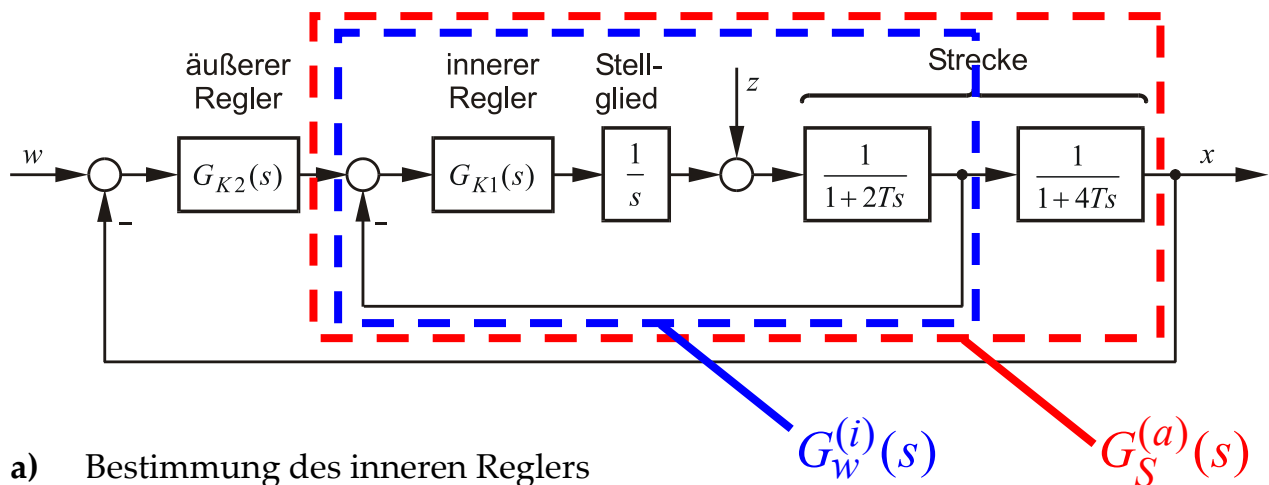


Aufgabe 48 (TU)



a) Bestimmung des inneren Reglers

$$G_w^{(i)}(s) = \frac{\frac{G_{K1}(s)}{s(1+2Ts)}}{1 + \frac{G_{K1}(s)}{s(1+2Ts)}} = \frac{1}{\frac{s(1+2Ts)}{G_{K1}(s)} + 1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{1+Ts}$$

$$\Rightarrow T = \frac{(1+2Ts)}{G_{K1}(s)} \Rightarrow G_{K1}(s) = \frac{(1+2Ts)}{T}$$

→ idealer PD-Regler

b) Für den äußeren Regelkreis sichtbare Strecke:

$$G_S^{(a)}(s) = G_w^{(i)}(s) \cdot \frac{1}{1+4Ts} = \frac{1}{(1+Ts)(1+4Ts)}$$

c) Die Führungs-Übertragungsfunktion des gesamten Kaskadenregelkreises lautet

$$G_{w,Kask}(s) = \frac{G_{K2}(s)G_S^{(a)}(s)}{1 + G_{K2}(s)G_S^{(a)}(s)} = \frac{K_{R2} \frac{1+4Ts}{s} \frac{1}{1+Ts} \frac{1}{1+4Ts}}{1 + K_{R2} \frac{1+4Ts}{s} \frac{1}{1+Ts} \frac{1}{1+4Ts}} = \frac{1}{1 + \frac{s(1+Ts)}{K_{R2}}} = \frac{1}{\frac{T}{K_{R2}}s^2 + \frac{1}{K_{R2}}s + 1}$$

d) beim einschleifigen Regelkreis ist durch das Stellglied bereits ein I-Anteil im offenen Kreis enthalten → Wahl: idealer PD-Regler, Kompensation von $T=4$

$$G_{K,einschl}(s) = K_{R,einschl}(1+4Ts)$$

Somit folgt für die Führungs-Übertragungsfunktion:

$$G_{w,einschl}(s) = \frac{G_{K,einschl}(s)G_{S,ges}(s)}{1 + G_{K,einschl}(s)G_{S,ges}(s)} = \frac{K_{R,einschl}(1+4Ts) \frac{1}{s} \frac{1}{1+2Ts} \frac{1}{1+4Ts}}{1 + K_{R,einschl}(1+4Ts) \frac{1}{s} \frac{1}{1+2Ts} \frac{1}{1+4Ts}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2T}{K_{R,einschl}}s^2 + \frac{1}{K_{R,einschl}}s + 1}$$

- e) Zeitkonstante und Dämpfung der Kaskadenregelung durch Vergleich mit klassischer Darstellung eines PT2-Gliedes:

$$G_{w,Kask}(s) = \frac{1}{\frac{T}{K_{R2}}s^2 + \frac{1}{K_{R2}}s + 1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{T_{Kask}^2s^2 + 2d_{Kask}T_{Kask}s + 1}$$

$$\rightarrow T_{Kask} = \sqrt{\frac{T}{K_{R2}}} \quad , \quad d_{Kask} = \frac{1}{2\sqrt{TK_{R2}}}$$

Zeitkonstante und Dämpfung der einschleifigen Regelung

$$G_{w,einschl}(s) = \frac{1}{\frac{2T}{K_{R,einschl}}s^2 + \frac{1}{K_{R,einschl}}s + 1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{T_{einschl}^2s^2 + 2d_{einschl}T_{einschl}s + 1}$$

$$\rightarrow T_{einschl} = \sqrt{\frac{2T}{K_{R,einschl}}} \quad , \quad d_{einschl} = \frac{1}{2\sqrt{2TK_{R,einschl}}}$$

Vergleich:

- (i) Dämpfung vorgeben:

$$d = d_{Kask} = d_{einschl} \stackrel{!}{\Rightarrow} K_{R2} = 2 \cdot K_{R,einschl} \Rightarrow T_{Kask} = 0,5 \cdot T_{einschl}$$

Bei vorgegebener Dämpfung ist die Kaskadenregelung doppelt so schnell wie der einschleifige Regelkreis.

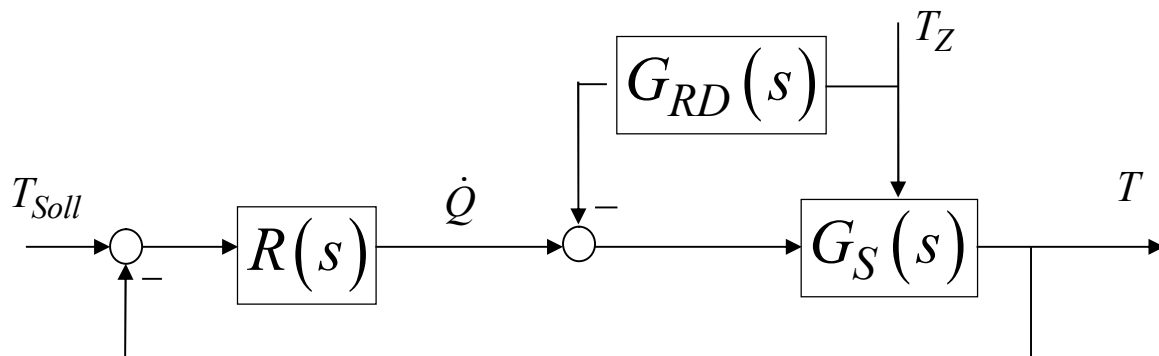
- (ii) Zeitkonstante vorgeben:

$$T = T_{Kask} = T_{einschl} \stackrel{!}{\Rightarrow} K_{R2} = 0,5 \cdot K_{R,einschl} \Rightarrow d_{Kask} = 2 \cdot d_{einschl} :$$

Bei vorgegebener Schnelligkeit ist die Kaskadenregelung doppelt so stark gedämpft wie der einschleifige Regelkreis.

Aufgabe 50 (TR)

- a) da Temperatur des zufließenden Mediums gemessen werden kann, bietet sich hier eine Störgrößenaufschaltung an



- b) Die Störung greift vor dem Mischprozess an, da sie eine bereits in Flüssigkeit vorliegende Wärme beschreibt und somit nicht mehr dem beschriebenen Heizprozess unterliegt.

Die Störgrößenaufschaltung $G_{RD}(s)$ ist nicht realisierbar, da sie durch das Invertieren der Strecke $G_{heiz}(s)$ mehr Null- als Polstellen enthält.

Eine stationäre Störgrößenaufschaltung führt hier nicht zu einer Verbesserung, wenn der Regler $R(s)$ bereits einen I-Anteil enthält.

Eine realisierbare Störgrößenaufschaltung ist jedoch erreichbar, wenn sie einen zusätzlichen Pol enthält, der deutlich weiter links liegt, als die kompensierende Nullstelle, z.B.

$$G_{RD}(s) = \frac{1 + 300s}{5(s + 1)}$$

- c) idealer PID-Regler: Kompensation von $T_1=300$ und $T_2=100$

$$R(s) = k \frac{(1 + 300s)(1 + 100s)}{s}$$

Somit lautet der offene Kreis:

$$F_o(s) = \frac{5k}{s(1 + 20s)}$$

In der WOK laufen die beiden Pole aufeinander zu, treffen sich im Verzweigungspunkt $-1/40$ und streben dann parallel zur imaginären Achse auseinander. Die charakteristische Gleichung $1 + F_o(s) = 0$ bzw. $s^2 + 1/20s + 1/4k = 0$ soll nun für das gesuchte k auf einen doppelten Pol bei $-1/40$ führen. Dies ist erfüllt für $k = 1/400 = 0.0025$

Aufgabe 51 (TR)

a) • $G(s) = \frac{1}{s^2}$

- Anwendung des Hurwitz-Kriteriums (für den geschlossenen Kreis)

$$F_w = \frac{\frac{k(s+\alpha)}{s^2}}{1 + \frac{k(s+\alpha)}{s^2(s+2)}} = \frac{k(s+\alpha)(s+2)}{s^2(s+2) + k(s+\alpha)}$$

$$= \frac{ks^2 + k(2+\alpha)s + 2k\alpha}{s^3 + 2s^2 + ks + k\alpha}$$

$$\Rightarrow k \stackrel{!}{>} 0 \checkmark, \alpha \stackrel{!}{>} 0 \checkmark$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & k\alpha & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & k\alpha \end{vmatrix}$$

$$(1) \ 2 > 0 \checkmark$$

$$(2) \ 2k - k\alpha \stackrel{!}{>} 0 \Rightarrow 2 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 2 \checkmark$$

$$(3) \ k\alpha \cdot D_2 \stackrel{!}{>} 0 \Rightarrow \alpha > 0 \checkmark$$

$$\boxed{0 < \alpha < 2}$$

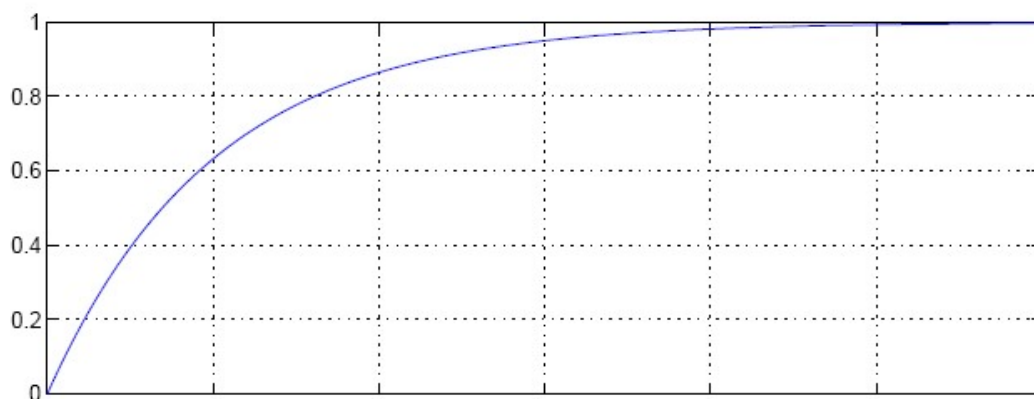
- stationäre Verstärkung von F_w :

$$\frac{2k\alpha}{k\alpha} = 2$$

$\Rightarrow$ Nie stationär genau!

b) • $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/2}$

- Impulsantwort:



$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$$

Steigung im Ursprung: $\frac{1}{2}$

- $h(t) = t + 2e^{-\frac{t}{2}} - 2$, da $G(s)$ nicht sprungfähig.

c) • Nichtlineare Elemente:

– Multiplication $\ddot{x} \cdot x$

– Quadrat $\dot{x}^2$

- Ableitungen müssen gleich 0 sein $\Rightarrow x_R = u_R$

- Linearisierung:

$$g(x, \dot{x}, \ddot{x}, u) = \ddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) \cdot x(t) - \dot{x}^2(t) + x(t) - u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial g}{\partial \ddot{x}} \right|_{AP} \cdot \Delta \ddot{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right|_{AP} \cdot \Delta \dot{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{AP} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{AP} \cdot \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \Delta \ddot{x} + 2x_R \cdot \Delta \ddot{x} - 2\dot{x}_R \cdot \Delta \dot{x} + (2\ddot{x}_R + 1) \cdot \Delta x - 1 \cdot \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \ddot{x}(t) + 2\Delta \ddot{x} + \Delta x = \Delta u$$

$$\Rightarrow (s^3 + 2s^2 + 1)X(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1}$$

d) • $T_R = 10$

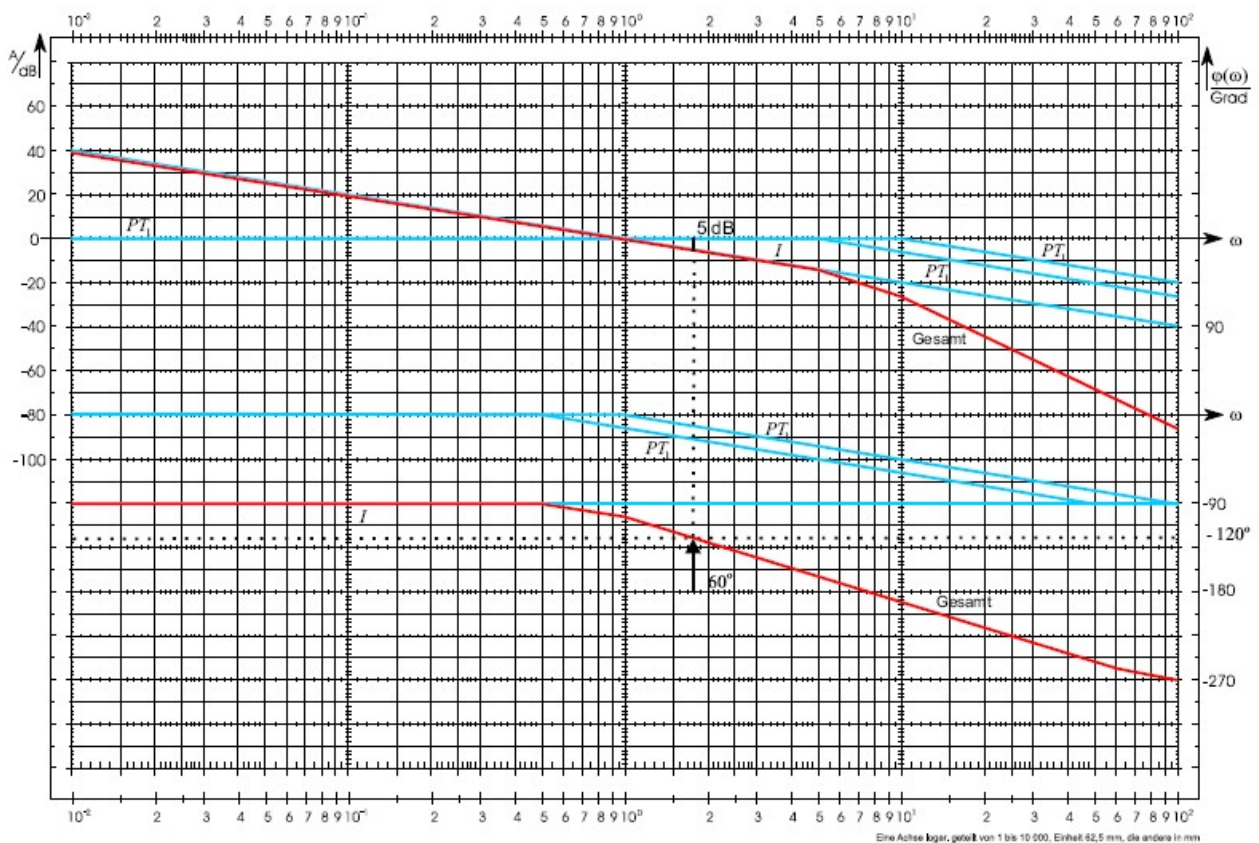
$$F_o = \frac{1}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.2s)}$$

Ablesen aus dem Bode-Diagramm: Amplitude muss um 5 dB angehoben werden.

$$5 \text{ dB} = 20 \log_{10} k_R$$

$$10^{\frac{5}{20}} = 10^{\frac{1}{4}} = k_R$$

- Die Phasenreserve ist hier ein Maß für die Dämpfung, da die Amplitude immer mit mindestens 20 dB pro Dekade fällt.
- Die Verwendung eines PD-Reglers wäre nicht sinnvoll, da der offene Kreis (also die Strecke) kein I-Verhalten aufweist und somit der geschlossene Kreis nicht stationär genau wäre.



e) G_1 : PT_2 -Glieder mit reellen Polen $\rightarrow N_2$

G_2 : PT_2 -Glieder mit konjugiert komplexen Polen $\rightarrow N_1$

G_3 : I_2 -Glieder $\rightarrow N_3$

G_4 : I -Glieder $\rightarrow N_4$

G_5 : PT_1 -Glieder $\rightarrow N_6$

G_6 : Allpass-Verhalten: Nullstelle in der rechten s-Halbebene bewirkt eine Phasendrehung um $+90^\circ \rightarrow N_5$

	stabil	stationär genau
G_1	ja	nein
G_2	ja	nein
G_3	nein	–
G_4	ja	ja
G_5	ja	nein
G_6	ja	nein

Begründung der Stabilität: Das spezielle Nyquist-Kriterium kann bei jeder Übertragungsfunktion angewendet werden. Nur bei G_3 ist der Punkt -1 nicht links.

Begründung der stationären Genauigkeit: Bei G_1 , G_2 , G_5 und G_6 befinden sich keine I -Glieder im offenen Kreis. G_4 ist ein I -Glieder. G_3 ist nicht stabil $\Rightarrow$ Es existiert kein stationärer Zustand.

Aufgabe 52 (TR)

a) Es fehlt ein Ast der WOK, folglich ist ein Pol und ggf. eine Nullstelle zu ermitteln.

- Der Anstiegswinkel der Asymptoten beträgt $\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ der offene Kreis weist keine Nullstelle auf und der fehlende Ast der WOK strebt somit gegen ∞ .

$$\phi_i = (2i + 1) \cdot \frac{\pi}{m - n}, \quad i = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow m - n = 3$$

- Über die Formel zur Berechnung des Wurzelschwerpunktes kann nun der fehlende Pol zu -5 errechnet werden:

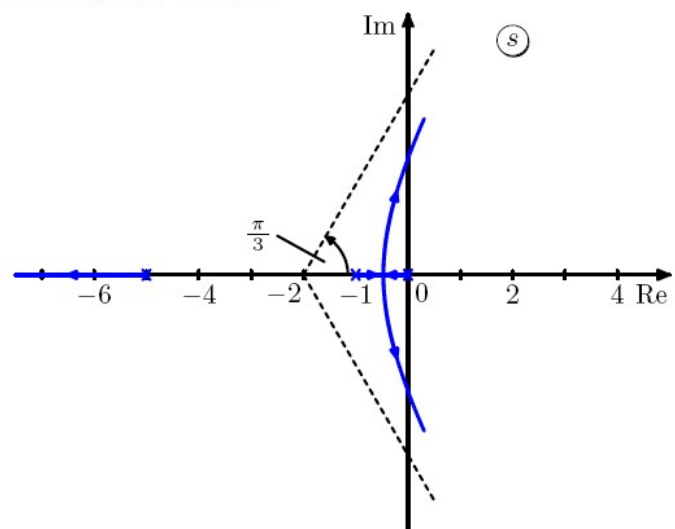
$$\delta_w = \frac{\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re}\{p_\nu\} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}\{n_\mu\}}{n - m}$$

$$-2 = \frac{-1 + 0 + p_3}{3}$$

$$\Rightarrow p_3 = -5$$

- Nun muss die Verstärkung geeignet bestimmt werden:

$$F_o(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{1}{5}s)(1 + s)}$$



- b) Es muss eine Nullstelle in der linken s -Halbebene eingefügt werden. Hierdurch ändert sich der Anstiegswinkel der Asymptoten zu $\frac{\pi}{2}$ und die Zweige der Wurzelortkurve bleiben in der linken Halbebene, vorausgesetzt der Wurzelschwerpunkt befindet sich links der imaginären Achse.
- Beim Regelglied handelt es sich um ein PD -Glied bzw. um einen idealen PD -Regler.
 - Die Nullstelle muss sich links oder auf der imaginären Achse befinden, da sich andernfalls ein Ast der Wurzelortkurve von 0 nach rechts bewegt.

$$G(s) = 1 + T_n s = T_n \cdot \left(\frac{1}{T_n} + s \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_n} \stackrel{!}{\geq} 0 \text{ bzw. } T_n \stackrel{!}{\geq} 0$$

Weiterhin muss der Wurzelschwerpunkt links der imaginären Achse liegen:

$$\begin{aligned} \delta_w &\stackrel{!}{<} 0 \\ \delta_w &= \frac{-1 - 5 - \operatorname{Re}\{n\}}{2} = \frac{-1 - 5 + \operatorname{Re}\{\frac{1}{T_n}\}}{2} \\ \Rightarrow -6 + \operatorname{Re}\{\frac{1}{T_n}\} &\stackrel{!}{<} 0 \\ \Rightarrow T_n &\stackrel{!}{>} \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- c) Schnittpunkt der WOK mit der Imaginärachse:

$$1 + F_o(j\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{5k}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 5)} = 0$$

$$\Rightarrow 5k - 6\omega^2 - j\omega^3 + 5j\omega = 0$$

$$\operatorname{Re}\{\dots\} = 0 \quad 5k - 6\omega^2 = 0$$

$$\operatorname{Im}\{\dots\} = 0 \quad 5\omega - \omega^3 = \omega(5 - \omega^2) = 0$$

$$i) \quad \omega = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$ii) \quad \omega = \pm\sqrt{5} \Rightarrow k = 6$$

$$\text{Natürliche Frequenz: } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\sqrt{5}}{2\pi}$$

d) *PI*-Regler:

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} \right)$$

$$K_R = 0.45 \cdot K_{R,\text{krit.}} = 0.45 \cdot 6 \quad (= 2.7)$$

$$T_N = 0.85 \cdot T_{\text{krit.}} = 0.85 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{\text{krit.}}} = \frac{0.85 \cdot 2 \cdot \pi}{\sqrt{5}} \quad (\approx 2.39)$$

e) • Bedingungen für einen stationären Zustand:

$$x_{3R} = 0$$

$$x_{5R} = 0$$

• Überprüfung, ob diese Bedingungen erfüllt werden:

$$u_{1R} = 1 \Rightarrow x_{7R} = 2$$

$$u_{3R} = 1 \Rightarrow x_{8R} = 2$$

$$\begin{matrix} ! \\ x_{5R} = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_{4R} = -2$$

$$\Rightarrow x_{6R} = x_{7R} + x_{4R} = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{3R} = x_{6R} \cdot x_{2R} = 0 \quad \forall x_{2R}$$

$\Rightarrow$ Stationärer Zustand existiert.

• Werte der Variablen $x_{1R}, \dots, x_{8R}$ in diesem stationären Zustand:

$$x_{1R} = x_{2R} = u_{2R}$$

$$x_{3R} = 0$$

$$x_{4R} = -2$$

$$x_{5R} = 0$$

$$x_{6R} = 0$$

$$x_{7R} = 2$$

$$x_{8R} = 2$$