Formelsammlung

zu Signale und Systeme (Version vom 21. Januar 2021)

1 Allgemein

1.1 Trigonometrie

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}) \\
\cos(x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}) \\
\tan(x) &= -\mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}} \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} \\
1 &= \sin^2(x) + \cos^2(x)
\end{aligned}
$$

1.2 Residuensatz

Das Residuum einer Funktion $f(z)$ an einem Pol z_∞ der Ordnung k ist geben durch

$$
\operatorname{Res}\{f(z)\,;z_\infty\} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_\infty}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left\{(z-z_\infty)^k f(z)\right\}\ .
$$

Für Pole im Innern der Kurve C gilt

$$
\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\{f(z)\,;z_{\infty k}\}\ .
$$

2 Fourier-Transformation

2.1 Allgemein

$$
X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\ \mathrm{d}t\,, \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\ \mathrm{d}f
$$

Reelle Fourier-Reihe (periodische Signale):

$$
\begin{aligned}
x_\mathrm{p}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right) + b_k\sin\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right)\right] \\
a_k &= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_\mathrm{p}(t)\cos\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right)\ \mathrm{d}t\,, \qquad k\in\{0,1,2,\dots\} \\
b_k &= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_\mathrm{p}(t)\sin\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right)\ \mathrm{d}t\,, \qquad k\in\{1,2,3,\dots\}
\end{aligned}
$$

Komplexe Fourier-Reihe (periodische Signale):

$$
X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_\mathrm{p}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{T_0}t}\ \mathrm{d}t \qquad x_\mathrm{p}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{k}{T_0}t}
$$

Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale:

$$
X_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f n t_\mathrm{A}} \qquad x_n = \frac{1}{f_\mathrm{A}}\int_{-f_\mathrm{A}/2}^{f_\mathrm{A}/2} X_*(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n t_\mathrm{A}}\ \mathrm{d}f
$$

Diskrete Fourier-Transformation:

$$
X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}} \qquad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}
$$

2.2 Eigenschaften

Konjugiert komplexe Funktion:

$$x^*(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ X^*(-f)$$

Umkehrung der Zeit- bzw. Frequenzachse:

$$x(-t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(-f)$$

Symmetrie:

$$X(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ x(-f)$$

Inneres Produkt (Parseval'sche Beziehung):

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\ \mathrm{d}f
$$

2.3 Rechenregeln

Maßstabsänderung, Skalierung:

$$x(at) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Zeitverschiebung:

$$x(t-t_0) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}\cdot X(f)$$

Modulation:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\cdot x(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(f-f_0)$$

Differentiation der Zeitfunktion:

$$x^{(n)}(t) = (\mathrm{j}2\pi f)^n X(f)$$

Differentiation der Spektralfunktion:

$$(-\mathrm{j}2\pi t)^n x(t) = X^{(n)}(f)$$

Integration der Zeitfunktion:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ \mathrm{d}\tau \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{X(f)}{\mathrm{j}2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

Multiplikation im Zeitbereich:

$$x_1(t)\cdot x_2(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(f) * X_2(f)$$

Faltung im Zeitbereich:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(f)\cdot X_2(f)$$

2.4 Korrespondenzen

$$
\begin{aligned}
1 \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(f) \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\
\operatorname{sign}(t) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{-\mathrm{j}}{\pi f} \\
\sigma(t) = \begin{cases} 1\,, & t\ge 0 \\ 0\,, & t<0 \end{cases} \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{\mathrm{j}}{2\pi f} \\
r_T(t) = \begin{cases} 1\,, & |t|\le T/2 \\ 0\,, & |t|>T/2 \end{cases} \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ T\operatorname{si}(\pi f T) = T\operatorname{sinc}(fT) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \\
d_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{T}t+1\,, & t\in[-T/2,0] \\ 1-\frac{2}{T}t\,, & t\in[0,T/2] \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{T}{2}\operatorname{si}^2\left(\pi f\frac{T}{2}\right) \\
\cos(2\pi f_0 t) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)) \\
\sin(2\pi f_0 t) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\mathrm{j}}{2}(\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)) \\
\mathrm{e}^{-a|t|} \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}\,, \quad a>0 \\
\mathrm{e}^{-a|t|}\operatorname{sign}(t) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ -\mathrm{j}\frac{4\pi f}{a^2+(2\pi f)^2}\,, \quad a>0 \\
\mathrm{e}^{-at}\sigma(t) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{a+\mathrm{j}2\pi f}\,, \quad a>0 \\
t\,\mathrm{e}^{-at}\sigma(t) \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{(a+\mathrm{j}2\pi f)^2}\,, \quad a>0 \\
\mathrm{e}^{-at^2} \ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-(\pi f)^2/a}\,, \quad a>0
\end{aligned}
$$

3 Laplace-Transformation

3.1 Allgemein

Einseitige Laplace-Transformation:

$$
X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(f)\,\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t, \qquad x(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} X(s)\,\mathrm{e}^{st}\ \mathrm{d}s
$$

3.2 Eigenschaften

Anfangswertsatz:

$$\lim_{t\to 0+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

Endwertsatz:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0+} sX(s)$$

3.3 Rechenregeln

Zeitverschiebung nach rechts, $t_0 > 0$:

$$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-t_0 s}\left[X(s) + \int_{-t_0}^{0} x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right]$$

Zeitverschiebung nach links, $t_0 > 0$:

$$x(t+t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{t_0 s}\left[X(s) - \int_{0}^{t_0} x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right]$$

Dämpfung der Zeitfunktion, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$x(t)\cdot \mathrm{e}^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet X(s-\alpha)$$

Skalierungssatz, $a > 0$:

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Differentiation der Zeitfunktion:

$$x^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} x^{(i)}(0-)$$

Differentiation der Bildfunktion:

$$(-1)^n t^n x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X^{(n)}(s)$$

Integration der Zeitfunktion:

$$\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} X(s)$$

Multiplikation im Zeitbereich:

$$x_1(t)\cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} X_1(\xi) X_2(s-\xi)\,\mathrm{d}\xi \propto X_1(s) * X_2(s)$$

Faltung im Zeitbereich:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s)\cdot X_2(s)$$

3.4 Korrespondenzen

$$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-t_0 s},\ t_0 > 0$$

$$1 \text{ bzw. } \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{1}{2} t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^3}$$

$$\frac{1}{n!} t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$\mathrm{e}^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}$$

$$t\mathrm{e}^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{n!} t^n \mathrm{e}^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

$$\delta(t) - \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{Ts}{1+Ts}$$

$$1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s(1+Ts)}$$

$$t - T\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2(1+Ts)}$$

$$\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+2\delta s+\delta^2+\omega^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s+\delta}{s^2+2\delta s+\delta^2+\omega^2}$$

4 Z-Transformation

4.1 Allgemein

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}, \qquad x_n = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\oint_C X(z)\, z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

4.2 Eigenschaften

Anfangswertsatz, $x_n = 0,\ n < 0$:

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Endwertsatz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{z\to 1} (z-1)\, X(z)$$

Summation:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = X(1)$$

Parseval'sche Gleichung:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{1,n} x_{2,n}^* = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\oint_C X_1(z)\, X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right) z^{-1}\,\mathrm{d}z$$

4.3 Rechenregeln

Verschiebungssatz:

$$x_{n-n_0} \circ\!\!-\!\!\bullet z^{-n_0} X(z), \qquad r_+ < |z| < r_-$$

Verschiebung um $n_0 > 0$ nach links für kausale Wertefolge:

$$x_{n+n_0} \circ\!\!-\!\!\bullet z^{n_0} X(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x_i z^{n_0-i}, \qquad r_+ < |z|$$

Lineare Gewichtung:

$$n x_n \circ\!\!-\!\!\bullet -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}, \qquad r_+ < |z| < r_-$$

Modulation der Wertefolge:

$$a^n \cdot x_n \circ\!\!-\!\!\bullet X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad ar_+ < |z| < ar_-$$

Zeitumkehr:

$$x_{-n} \circ\!\!-\!\!\bullet X\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \frac{1}{r_-} < |z| < \frac{1}{r_+}$$

Multiplikation im Zeitbereich:

$$x_{1,n}\cdot x_{2,n} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\oint_C X_1(\xi)\, X_2\left(\frac{z}{\xi}\right)\xi^{-1}\,\mathrm{d}\xi, \qquad r_{1+}r_{2+} < |z| < r_{1-}r_{2-}$$

Faltung im Zeitbereich:

$$x_{1,n} * x_{2,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{1,m} x_{2,n-m} \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(z)\cdot X_2(z), \qquad \max_i\{r_{i+}\} < |z| < \min_i\{r_{i-}\}$$

4.4 Korrespondenzen

$$\delta_n \circ\!\!-\!\!\bullet 1, \qquad \text{alle } z$$

$$\delta_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet z^{-k}, \qquad \begin{cases} 0 < |z| & \text{für } k > 0 \\ |z| < \infty & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq k \\ 0 & \text{für } n < k \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^{-k+1}}{z-1}, \qquad \begin{cases} 1 < |z| & \text{für } k \geq 0 \\ 1 < |z| < \infty & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

$$-\sigma_{-n-1} = \begin{cases} -1 & , \quad n \leq -1 \\ 0 & , \quad n \geq 0 \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-1}, \qquad |z| < 1$$

$$n\cdot\sigma_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad 1 < |z|$$

$$n^2\cdot\sigma_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, \qquad 1 < |z|$$

$$a^{n-1}\cdot\sigma_{n-1} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{z-a}, \qquad |a| < |z|$$

$$a^n\cdot\sigma_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-a}, \qquad |a| < |z|$$

$$n\cdot a^n\cdot\sigma_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{za}{(z-a)^2}, \qquad |a| < |z|$$

$$r^n\sin(\omega n)\cdot\sigma_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{zr\sin(\omega)}{z^2 - 2zr\cos(\omega) + r^2}, \qquad r,\omega \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq r < |z|$$

$$r^n\cos(\omega n)\cdot\sigma_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z(z - r\cos(\omega))}{z^2 - 2zr\cos(\omega) + r^2}, \qquad r,\omega \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq r < |z|$$

$$\begin{cases} a^n & \text{für } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)}, \qquad 0 < |z|$$

5 Filter-Transformationen

Im Folgenden ist f_D die Durchlassfrequenz.

Tiefpass-Tiefpass-Transformation:

$$f' = \frac{f}{f_\mathrm{D}}$$

Hochpass-Tiefpass-Transformation:

$$f' = \frac{f_\mathrm{D}}{f}$$

Bandpass-Tiefpass-Transformation (symmetrische Bandpässe):

$$f' = \frac{f^2 - f_\mathrm{D} f_{-\mathrm{D}}}{(f_\mathrm{D} - f_{-\mathrm{D}}) f}$$

6 Numerische Integration

Im Folgenden ist t_A die Abtastzeit.

Rechteckregel vorwärts:

$$s = \frac{z-1}{t_\mathrm{A}}$$

Rechteckregel rückwärts:

$$s = \frac{z-1}{t_\mathrm{A} z}$$

Trapezregel / bilineare Transformation:

$$s = \frac{2}{t_\mathrm{A}}\frac{z-1}{z+1}$$