Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
12. Oktober 2012

Musterlösung

Aufgabe 1: 19
Aufgabe 2: 24
Aufgabe 3: 15
Aufgabe 4: 13
Aufgabe 5: 17

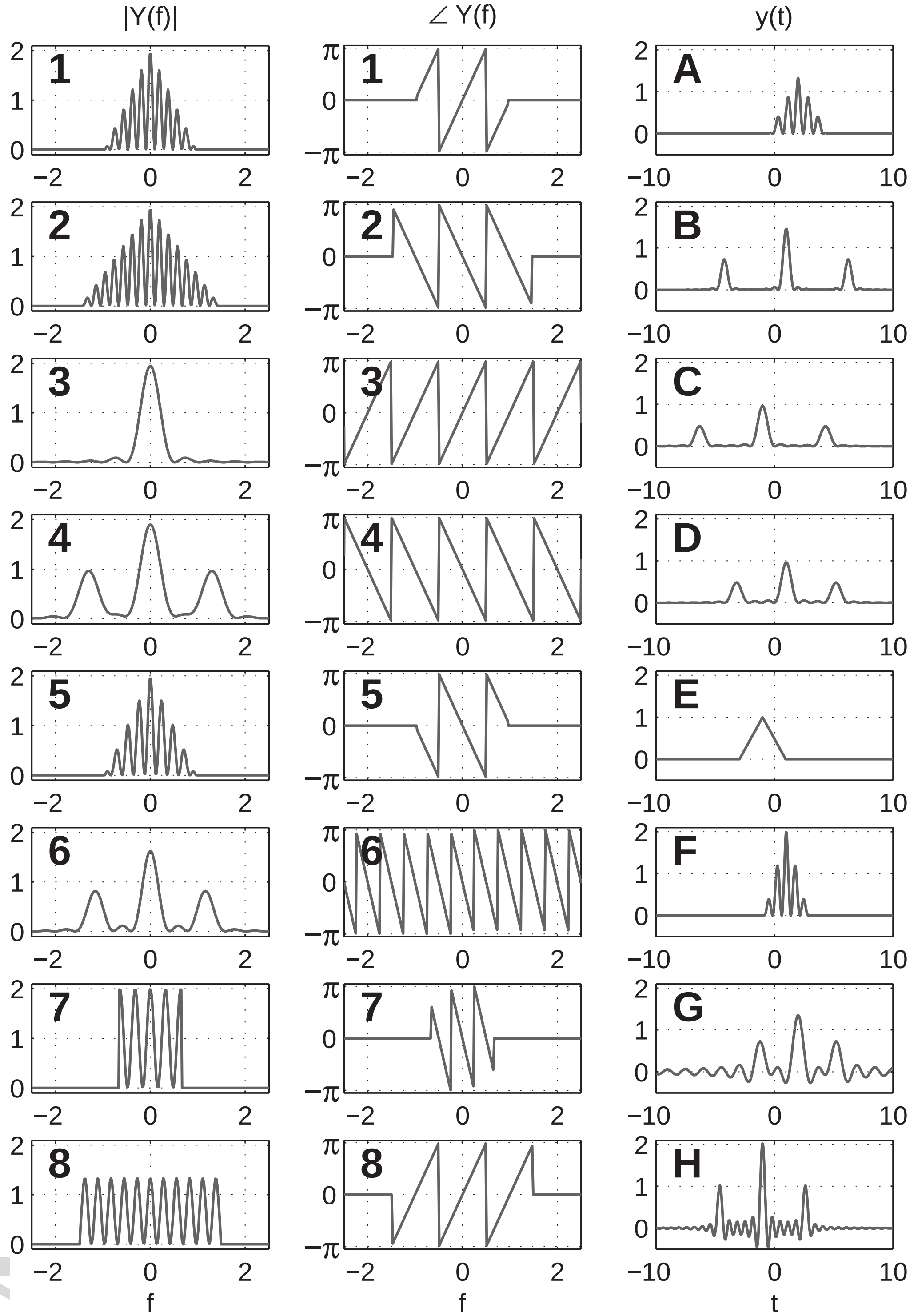
Gesamtpunkte: 100

Zuordnungsaufgaben (12 Punkte)

a) Fourier-Transformation *(4 Punkte)*

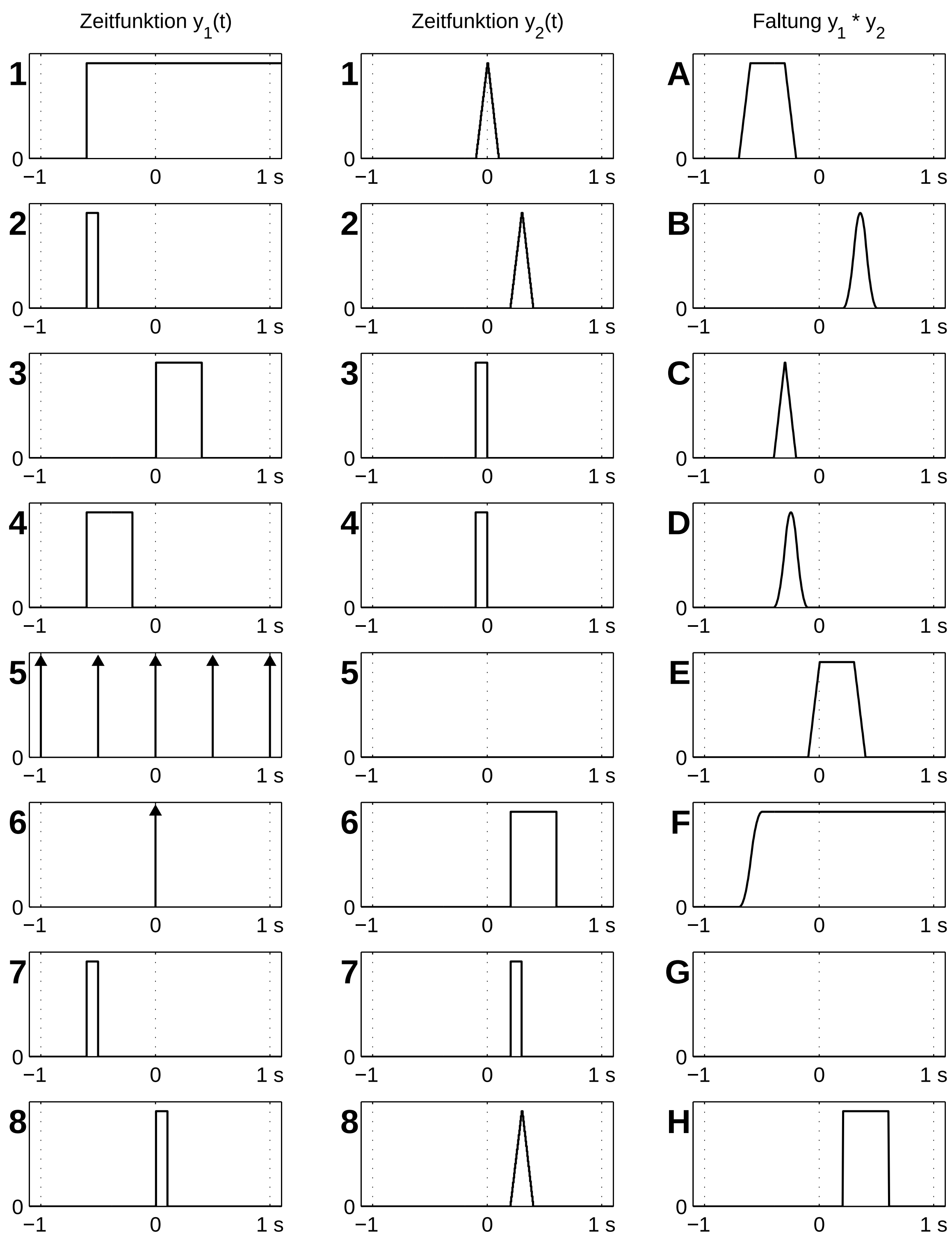
Im unteren Bild finden Sie in der rechten Spalte achtmal (A–H) jeweils ein kontinuierliches Zeitsignal. Leider sind die Fourier-Transformierten nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jeder Zeitfunktion $y(t)$ (A–H) das zugehörige Spektrum $Y(f)$ (1–8) an.

(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)



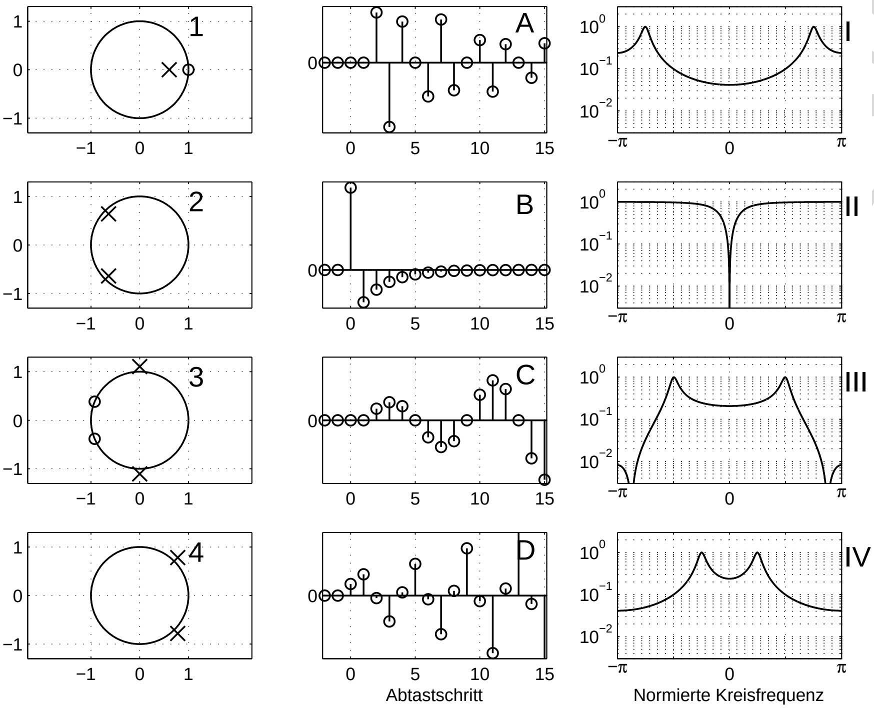
b) Faltung *(4 Punkte)*

Im unteren Bild finden Sie in der linken und mittleren Spalte acht (1–8) jeweils zueinandergehörige Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ und in der rechten Spalte acht Faltungen $y_1 * y_2$ (A–H). Leider sind die Faltungen nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jedem Funktionenpaar (1–8) die zugehörige Faltung (A–H) an. *(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)*



c) Zeitdiskrete Systeme *(4 Punkte)*

Im unteren Bild finden Sie in der linken Spalte vier Pol-/Nullstellendiagramme zeitdiskreter Systeme. Ordnen Sie diesen jeweils die korrekte Impulsantwort (A–D) und den korrekten Amplitudengang (I–IV) zu. *(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)*



Lösung

Fourier-Transformation

1-C
2-B
3-E
4-F
5-D
6-A
7-G
8-H *(Σ: 4 Punkte)*

Faltung

1-F
2-D
3-E
4-A
5-G
6-H
7-C
8-B *(Σ: 4 Punkte)*

Zeitdiskrete Systeme

1-B-II
2-A-I
3-D-III
4-C-IV *(Σ: 4 Punkte)*

Rechenaufgaben

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (19 Punkte)

Es sei ein Sägezahnsignal $x(t)$ wie in Abbildung 1 gegeben.

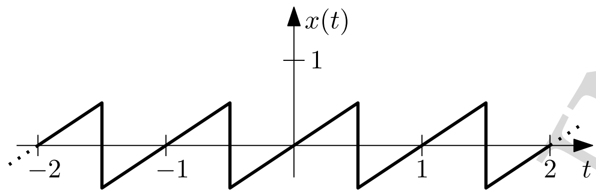


Abbildung 1: Sägezahnsignal $x(t)$.

a) Stellen Sie das Signal als Fourier-Reihe dar. Berechnen Sie dafür die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k für die beiden Fälle $k \neq 0$ und $k = 0$ getrennt voneinander. *(3 Punkte)*

b) Wie lauten die komplexen Koeffizienten der Fourier-Reihe des verzögerten Signals $x(t-\tau)$? Stellen Sie diese als Ausdruck von c_k dar. *(2 Punkte)*

c) Es sein nun das Signal in Abbildung 2 gegeben. Wie lauten die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k? *(1 Punkt)*

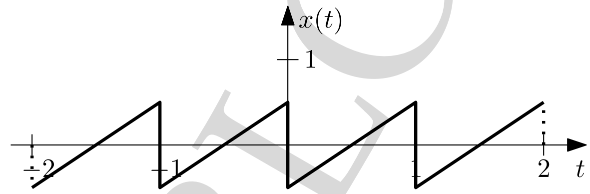


Abbildung 2: Sägezahnsignal $x_2(t)$.

d) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt. Nutzen Sie dafür die Parseval'sche Beziehung für Fourier-Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \, .$$

(3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

e) Das Spektrum der Signale $x_a(t)$ und $x_b(t)$ sei symmetrisch und bandbegrenzt auf dem Bereich $-a/2 \leq f \leq a/2$ bzw. $-b/2 \leq f \leq b/2$. Sie besitzen also die Bandbreiten a bzw. b. Wie groß ist die Bandbreite B der folgenden Signale? Begründen Sie Ihre Antwort stichwortartig.

$$\begin{aligned} 1: \quad & y(t) = x_a(t) + x_b(t) \\ 2: \quad & y(t) = x_a(t) * x_b(t) \end{aligned}$$

(3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

f) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Signals aus Abbildung 3. Stellen Sie dazu das Signal zunächst als Überlagerung von Dreieckfunktionen dar. *(3 Punkte)*

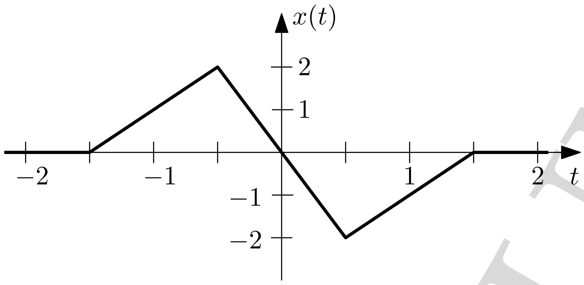


Abbildung 3: Zeitsignal $x(t)$.

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.
Sie haben die Funktionen $x(t)$ und $h(t)$ wie in Abbildung 4 gegeben.

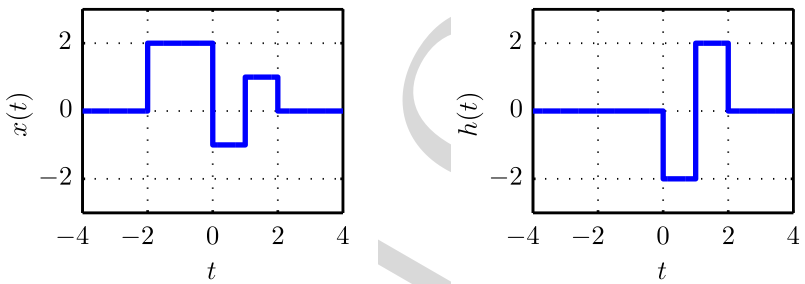


Abbildung 4: Vorgegebene Funktionen.

g) Skizzieren Sie das Ergebnis $y(t)$ der Faltung von $x(t)$ und $h(t)$. Hinweis: Beachten Sie charakteristische Punkte. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Mit der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten erhält man für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0} t}\, \mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k t}\, \mathrm{d}t \qquad (0{,}5)$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k t}}{(-\mathrm{j}\,2\pi k)^2} (-\mathrm{j}\,2\pi k t - 1) \right]_{-1/2}^{1/2} \qquad (0{,}5)$$

$$= \frac{1}{(-\mathrm{j}\,2\pi k)^2} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{2}} \left(-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{2} - 1 \right) - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{2}} \left(\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{2} - 1 \right) \right)$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi k} \frac{1}{(-\mathrm{j}\,2\pi k)^2} (-\mathrm{j}\,2\pi k) \qquad (0{,}5)$$

$$= (-1)^k \frac{\mathrm{j}}{2\pi k}\,. \qquad (0{,}5)$$

Für $k = 0$ ergibt sich

$$c_0 = \int_{-1/2}^{1/2} x(t) \ \mathrm{d}t = 0\ . \tag{1}$$

(Σ: 3 Punkte)

b) Durch Einsetzen des verzögerten Signals in die Definitionsgleichung erhält man für die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
c_{k,1} &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t-\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0} t} \ \mathrm{d}t \overset{u=t-\tau}{=} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}-\tau} y(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0}(u+\tau)} \ \mathrm{d}u && (1) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0}\tau} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}-\tau} y(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0} u} \ \mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0}\tau} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0} u} \ \mathrm{d}u && (0{,}5) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0}\tau}\, c_k\ . && (0{,}5)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass $y(t)$ sowie $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0} t}$ T_0-periodisch sind. Dadurch können die Integrationsgrenzen beliebig verschoben werden, da genau über eine Periodendauer integriert wird. ***(Σ: 2 Punkte)***

c) Das Signal ist um eine halbe Periodendauer verschoben. Daher ergibt sich mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b)

$$\begin{aligned}
c_k &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0}\tau}\, c_k = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T_0}\frac{T_0}{2}}\, c_k = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k}\, c_k && (0{,}5) \\
&= (-1)^k c_k\ . && (0{,}5)
\end{aligned}$$

(Σ: 1 Punkt)

d) Nach der Parseval'schen Beziehung gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \ \mathrm{d}t\ .$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) und Umformung erhält man

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

$$|c_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} |c_k|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} t^2 \, \mathrm{d}t \qquad (1)$$

$$|0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left| \frac{\mathrm{j}(-1)^k}{2\pi k} \right|^2 = \frac{1}{12} \qquad (0{,}5)$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 k^2} = \frac{1}{12} \qquad (0{,}5)$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{12} \qquad (0{,}5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (0{,}5)$$

(Σ: 3 Punkte)

e) Spektren überlagern sich (Linearität): (0,5)

$$Y(f) = X_a(f) + X_b(f) \qquad \Rightarrow \qquad B = \max(a, b) \qquad (1)$$

Faltung entspricht Multiplikation im Frequenzbereich: (0,5)

$$Y(f) = X_a(f) X_b(f) \qquad \Rightarrow \qquad B = \min(a, b) \qquad (1)$$

(Σ: 3 Punkte)

f) Signal $x(t)$ lässt sich als Differenz zweier Dreiecksignale darstellen (siehe auch Abbildung 5):

$$x(t) = 2d_2(t + 0{,}5) - 2d_2(t - 0{,}5) \; . \qquad (1)$$

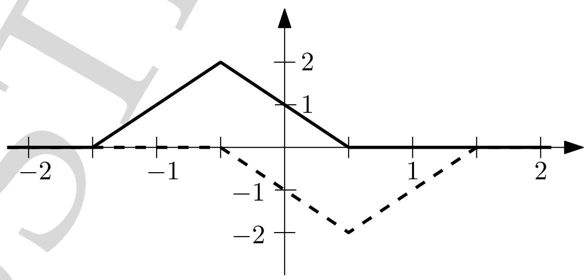


Abbildung 5: Zusammensetzung des Zeitsignals $x_a(t)$.

Daraus folgt für die Fourier-Transformierte:

$$X(f) = 2\,\mathrm{si}^2(\pi f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f} - 2\,\mathrm{si}^2(\pi f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f} \qquad (1)$$

$$= 2\,\mathrm{si}^2(\pi f) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f} \right) \qquad (0{,}5)$$

$$= -4\,\mathrm{j}\,\mathrm{si}^2(\pi f) \sin(\pi f) \; . \qquad (0{,}5)$$

(Σ: 3 Punkte)

g) Die Faltung der beiden Signale liefert das Signal $y(t)$:

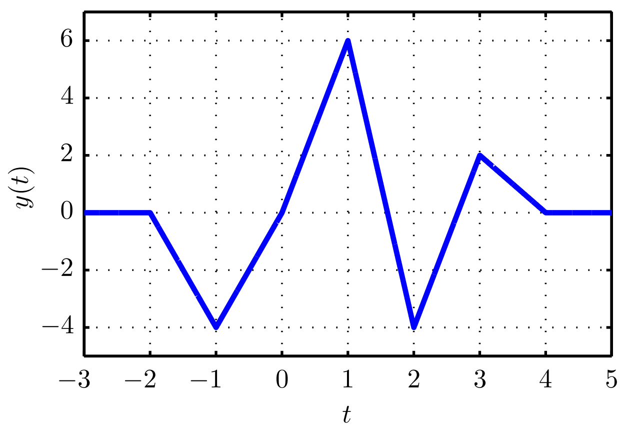


Abbildung 6: Faltung.

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (24 Punkte)

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit über eine Straße. Der Stoßdämpfer des Fahrzeugs kann durch eine Feder und ein Dämpfungsglied beschrieben werden (vgl. Abbildung 7). Die Höhe des Fahrzeugs zur Zeit t wird mit $h(t)$ bezeichnet. Die Höhe der Straße mit $r(t)$.

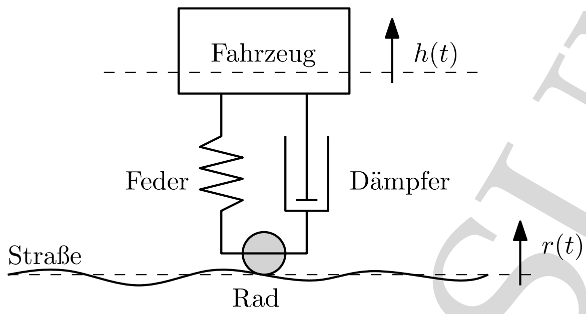


Abbildung 7: Modell eines Fahrzeugs mit Stoßdämpfer.

Die vertikalen Auslenkungen von Fahrzeug und Straße sind durch die lineare Differentialgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t) = -k\Big(h(t) - r(t)\Big) - d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h(t) - r(t)\Big)$$

verknüpft, wobei m die Masse des Fahrzeugs, k die Federkonstante und d die Dämpfungskonstante beschreiben. Es gelte nun

$$m = 1, \qquad k = 2 \qquad \text{und} \qquad d = 3\,.$$

a) Stellen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = H(s)/R(s)$ auf. *(2 Punkte)*

b) Das Fahrzeug fahre nun zum Zeitpunkt $t = 0$ über einen Bordstein der Höhe R_0. Für $t < 0$ gelte $r(t) = 0$, für $t \geq 0$ gelte $r(t) = R_0$. Für $t < 0$ sei außerdem die Höhe des Fahrzeugs $h(t)$ gleich null. Leiten Sie einen Ausdruck für $h(t)$ für $t \geq 0$ her. *(3 Punkte)*

c) Welchen Wert nimmt $h(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ an? *(1 Punkt)*

d) Welchen stationären Endwert nimmt $h(t)$ an? *(2 Punkte)*

e) Wenn das Fahrzeug über ein sinusförmiges Straßenprofil fährt, schwingt das Fahrzeug ebenfalls sinusförmig. Wie groß ist die Amplitude des Fahrzeugs im Vergleich zur Amplitude der Straße in Abhängigkeit der Frequenz (Tipp: Amplitudengang)? Der Ausdruck muss nicht vereinfacht werden. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Es sei der Signalflussplan in Abbildung 8 gegeben.

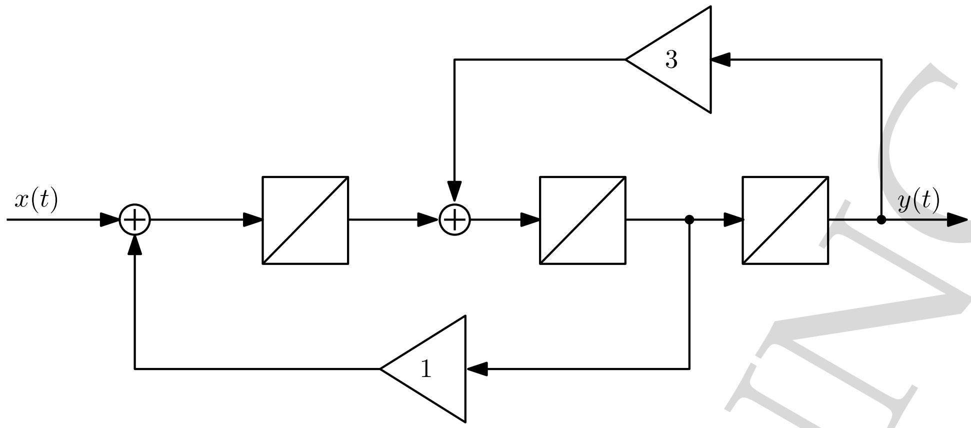


Abbildung 8: Signalflussplan.

f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/X(s)$. *(2 Punkte)*

g) Ist das System stabil? *(1 Punkt)*

h) Bestimmen Sie die Impulsantwort $g(t)$. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Ein System antwortet auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = -x(t) + 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\, x(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau\ . \qquad (*)$$

i) Erläutern Sie den Begriff LTI. Welche beiden Eigenschaften erfüllen LTI-Systeme? *(2 Punkte)*

j) Zeigen Sie, dass es sich bei dem gegebenen System um ein LTI-System handelt, indem Sie die beiden Eigenschaften überprüfen. *(3 Punkte)*

k) Geben Sie die Definition der Faltung an und ersetzen Sie in Gleichung $(*)$ das Integral durch den Faltungsoperator. *(2 Punkte)*

l) Stellen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/X(s)$ des Systems auf. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung erhält man

$$ms^2 H(s) = -k\Big(H(s) - R(s)\Big) - s\Big(H(s) - R(s)\Big)\ . \qquad (1)$$

Umformung liefert die Übertragungsfunktion

$$G(s) = H(s)/R(s) = \frac{ds + k}{ms^2 + ds + k} = \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2}\ . \qquad (1)$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Das Straßenprofil entspricht

$$r(t) = R_0\, \sigma(t)\ . \qquad (0{,}5)$$

Es gilt also

$$H(s) = G(s)R(s) \tag{0,5}$$
$$= \frac{3s+2}{s^2+3s+2} R_0 \frac{1}{s} \tag{0,5}$$
$$= R_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+2} \right) . \tag{0,5}$$

Durch Rücktransformation erhält man den Verlauf der Fahrzeughöhe zu

$$h(t) = R_0 \left(1 + \mathrm{e}^{-t} - 2\,\mathrm{e}^{-2t} \right) . \tag{1}$$

(Σ: 3 Punkte)

c) Durch Einsetzen erhält man

$$h(0) = R_0 \left(1 + \mathrm{e}^{-0} - 2\,\mathrm{e}^{-2\cdot 0} \right) = 0 . \tag{1}$$

(Σ: 1 Punkt)

d) Durch Anwendung des Grenzwertsatzes ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) \tag{1}$$
$$= R_0 \frac{3\cdot 0+2}{0^2+3\cdot 0+2} = R_0 . \tag{1}$$

(Σ: 2 Punkte)

e) Die Verstärkung der Amplitude bei einer sinusförmigen Eingangsschwingung wird bei LTI-Systemen durch den Amplitudengang beschrieben:

$$A(f) = \left| G(s)|_{s=\mathrm{j}\,2\pi f} \right| \tag{1}$$
$$= \left| \frac{3\,\mathrm{j}\,2\pi f + 2}{(\mathrm{j}\,2\pi f)^2 + 3\,\mathrm{j}\,2\pi f + 2} \right| . \tag{1}$$

Für den Zusammenhang zwischen der Amplitude der Straße $\hat{r}$ und der Amplitude des Fahrzeugs $\hat{h}$ gilt also

$$\hat{h} = A(f)\hat{r} = \left| \frac{3\,\mathrm{j}\,2\pi f + 2}{(\mathrm{j}\,2\pi f)^2 + 3\,\mathrm{j}\,2\pi f + 2} \right| \hat{r} .$$

(Σ: 2 Punkte)

f) Führt man hinter dem ersten Integrator die Hilfsgröße $w(t)$ ein, so ergeben sich im Laplacebereich

$$W(s) = \frac{1}{s}(X(s) + sY(s)) , \tag{0,5}$$
$$s^2 Y(s) = 3Y(s) + W(s) . \tag{0,5}$$

Durch ineinander Einsetzen und Umformen erhält man

$$s^2 Y(s) = 3Y(s) + \frac{1}{s}(X(s) + sY(s)) \tag{0,5}$$
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 - 4s} = \frac{1}{s(s+2)(s-2)} . \tag{0,5}$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Das System ist nicht stabil (0,5), da eine Polstelle bei $s = 2$ liegt und deren Realteil also größer null ist (0,5). ***(Σ: 1 Punkt)***

h) Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s-2)} = -\frac{1/4}{s} + \frac{1/8}{s-2} + \frac{1/8}{s+2} \,. \tag{1}$$

Rücktransformation liefert

$$g(t) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{2t} - 2\right)\sigma(t) \,. \tag{1}$$

(Σ: 2 Punkte)

i) Die Abkürzung LTI steht für Linear Time-Invariant (1). Die beiden Eigenschaften sind also die Linearität (0,5) und die Zeitinvarianz (0,5). ***(Σ: 2 Punkte)***

j) Es müssen die Eigenschaften Linearität und Zeitinvarianz erfüllt sein.
Linearität: $S\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} = c_1S\{x_1(t)\} + c_1S\{x_1(t)\}$ (0,5)

$$\begin{aligned}
S\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} &= -\left(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\right) \\
&\qquad + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\left(c_1x_1(t-\tau) + c_2x_2(t-\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau \\
&= -c_1x_1(t)) + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\, c_1x_1(t)\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad - c_2x_2(t)) + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\, c_2x_2(t)\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= c_1\left(-x_1(t) + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\, x_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&\quad + c_2\left(-x_2(t) + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\, x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) && (0{,}5) \\
&= c_1S\{x_1(t)\} + c_1S\{x_1(t)\} && (0{,}5)
\end{aligned}$$

Zeitinvarianz: $S\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$ (0,5)

$$\begin{aligned}
S\{x(t-t_0)\} &= -x(t-t_0) + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\, x(t-t_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau && (0{,}5) \\
&= y(t-t_0) && (0{,}5)
\end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

k) Die Faltungsoperation ist definiert als

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \,. \tag{1}$$

Aus der gegebenen Gleichung wird dadurch

$$y(t) = -x(t) + 2(\mathrm{e}^{-t}\,\sigma(t)) * x(t) \,. \tag{1}$$

Durch die Sprungfunktion $\sigma(t)$ wird die Integration von 0 bis ∞ berücksichtigt.
(Σ: 2 Punkte)

l) Durch Laplace-Transformation der Gleichung

$$y(t) = -x(t) + 2(\mathrm{e}^{-t}\,\sigma(t)) * x(t)$$

erhält man

$$Y(s) = -X(s) + 2\frac{1}{s+1}X(s) \qquad (1)$$

und damit

$$G(s) = -1 + 2\frac{1}{s+1} = \frac{1-s}{1+s}\,. \qquad (1)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass die Faltungsoperation im Laplace-Bereich einer Multiplikation entspricht. Außerdem gilt

$$\mathrm{e}^{-t} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s+1}\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (15 Punkte)

Ein Signal $x(t)$ durchläuft die Signalverarbeitungskette in Abbildung 9, bestehend aus einem Abtastglied und einem Rekonstruktionsfilter (idealer Tiefpass).

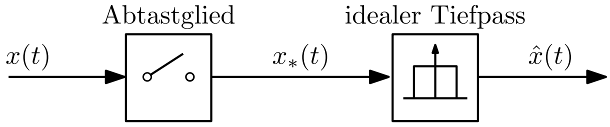


Abbildung 9: Signalverarbeitungskette.

Das Eingangssignal besitzt das Spektrum $X(f)$ aus Abbildung 10.

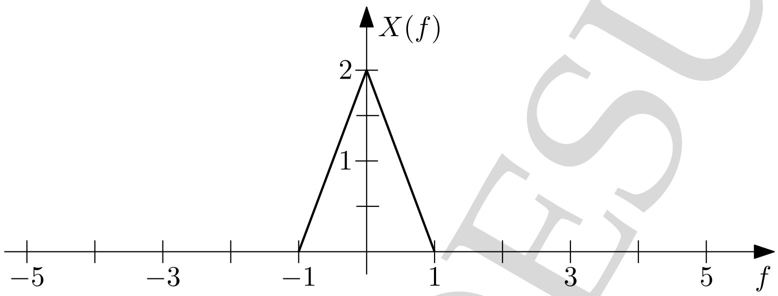


Abbildung 10: Spektrum des Signals $x(t)$.

Die Abtastfrequenz des Analog-Digital-Umsetzers sei f_A. Das Rekonstruktionsfilter sei ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz $f_\mathrm{A}/2$.

a) Wie muss die Abtastfrequenz f_A gewählt werden, damit das rekonstruierte Signal $\hat{x}(t)$ dem Eingangssignal $x(t)$ entspricht? *(2 Punkte)*

b) Was passiert, wenn eine geringere Abtastfrequenz gewählt wird? Wie nennt man diesen Effekt? *(2 Punkte)*

c) Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals $\hat{X}(f)$ für $f_\mathrm{A} = 3$ und $f_\mathrm{A} = 1$ sowie die Spektren des rekonstruierten Signals. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Eine diskrete Folge Y_k der Länge N sei die diskrete Fourier-Transformierte (N-Punkte-DFT) einer reellen Zeitfolge y_n. Die Werte von Y_k seien nur für $k = 0, \ldots, M$ mit $M < N$ bekannt.

d) Wie groß muss M sein, damit die fehlenden Y_k mit $k = M+1, \ldots, N-1$ bestimmt werden können? Unterscheiden Sie gerade bzw. ungerade N. *(2 Punkte)*

e) Geben Sie eine allgemeine Vorschrift an, mit der die fehlenden Y_k berechnet werden können. *(1 Punkt)*

f) Die diskrete Fourier-Folge Y_k ist nun die DFT der Länge $N = 6$ einer reellen Zeitfolge y_n. Von Y_k sind folgende Werte bekannt:

$$Y_0 = 0 \qquad Y_1 = 1 + \mathrm{j} \qquad Y_2 = 2 \qquad Y_3 = 1$$

Bestimmen Sie die restlichen Werte von Y_k. *(1 Punkt)*

g) Es gelte nun für die DFT:

$$Y_0 = 0 \qquad Y_1 = \mathrm{j} \qquad Y_2 = 0 \qquad Y_3 = 1 \qquad Y_4 = 0 \qquad Y_5 = -\mathrm{j}$$

Berechnen sie y_n als funktionalen Zusammenhang und vereinfachen Sie diesen. Geben Sie y_n nicht als Zahlenwerte an. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Nach dem Abtasttheorem muss die Abtastfrequenz größer als der doppelte Wert der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz sein (1). In diesem Fall muss also $f_{\mathrm{A}} \geq 2$ gelten, damit $x(t) = \hat{x}(t)$ gilt (1). ***(Σ: 2 Punkte)***

b) Bei geringerer Abtastung kommt es zur Überlagerung der spektralen Wiederholungen (1). Diesen Effekt nennt man Aliasing (1). ***(Σ: 2 Punkte)***

c) Man erhält die Spektren in Abbildungen 11 und 12 (1 Punkt pro Zeichnung).

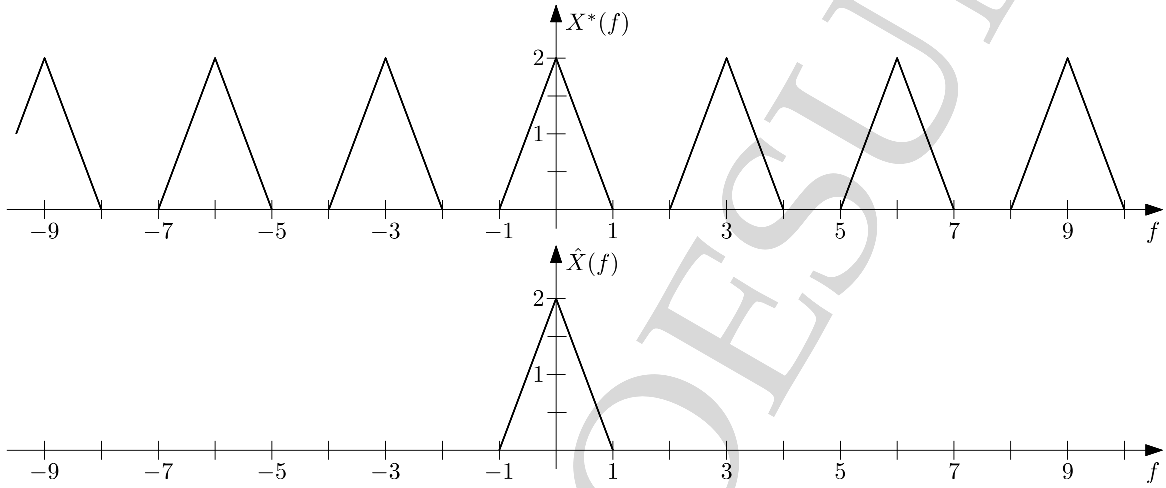


Abbildung 11: Spektrum des Signals $x^*(t)$ und $\hat{x}(t)$ bei $f_{\mathrm{A}} = 3$.

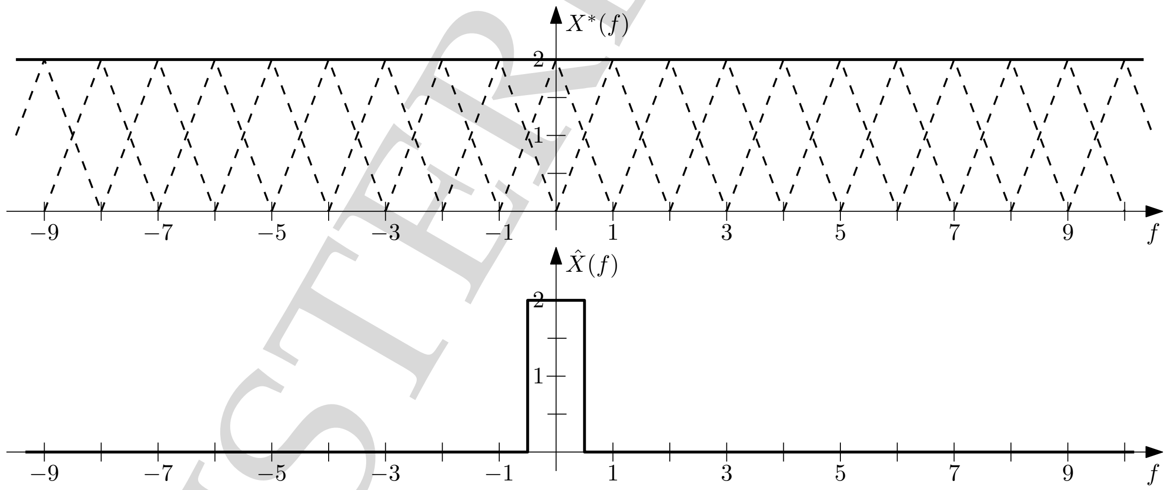


Abbildung 12: Spektrum des Signals $x^*(t)$ und $\hat{x}(t)$ bei $f_{\mathrm{A}} = 1$.

(Σ: 4 Punkte)

d) Bei einer reellen Zeitfolge ist der Realteil der DFT eine gerade Funktion und der Imaginärteil der DFT eine ungerade Funktion. D. h. es müssen alle Werte bis inklusive der Nyquist-Frequenz bekannt sein. Hieraus folgt für gerade bzw. ungerade N:

$$M \geq \frac{N-2}{2} + 2 = \frac{N}{2} + 1 \qquad M \geq \frac{N-1}{2} \qquad \text{(je 1)}$$

(Σ: 2 Punkte)

e) Aus der Symmetrieeigenschaft des Real- bzw. Imaginärteils des DFT einer reellen Zeitfolge folgt:

$$k \in M+1 \ldots N-1: \quad Y_k = Y^*_{N-k} \tag{1}$$

(Σ: 1 Punkt)

f) $Y_4 = 2 \qquad Y_5 = 1 - \mathrm{j}$ ***(Σ: 1 Punkt)***

g)

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{5} Y_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi k n}{3}} && (1) \\ &= \frac{1}{6}\left[\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi n}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi n} - \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi n}{3}}\right] && (1) \\ &= \frac{1}{6}\left[(-1)^n - 2\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right] && (1) \end{aligned}$$

Ein anderer Lösungsweg kann auch zu

$$y_n = \frac{(-1)^n}{6}\left(2\sin\left(2\pi\frac{n}{3}\right)+1\right)$$

führen. ***(Σ: 3 Punkte)***

Aufgabe 4: Diskrete Systeme (13 Punkte)

Es sei die z-Transformierte

$$X(z) = \frac{\frac{3}{4}z + \frac{3}{2}}{z^2 + 5z + 4}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die Konvergenzgebiete und berechnen Sie die kausale Rücktransformierte von $X(z)$ über die Definition der geometrischen Reihe. *(5 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Ein zeitdiskretes LTI-System wird durch die Differenzengleichung

$$x_n = 3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}$$

beschrieben.

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = Y(z)/X(z)$ an. *(2 Punkte)*

c) Ist das System stabil? *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Es sei eine Folge

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}^{n/2} & n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ 1 & n = 1, 3, 5, 7, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wie in Abbildung 13 gegeben.

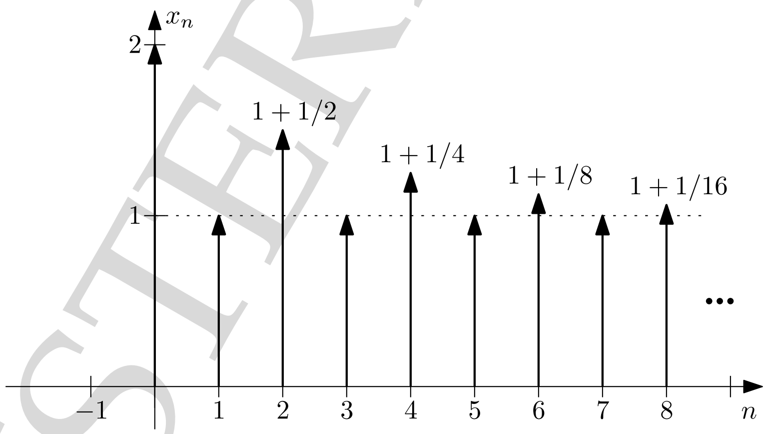


Abbildung 13: Zeitfolge x_n.

d) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Geben Sie das Konvergenzgebiet an. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Partialbruchzerlegung von $X(z)$ liefert:

$$X(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+4}\right) \tag{1}$$

Die Konvergenzgebiete sind in Abbildung 14 zu sehen. (1)

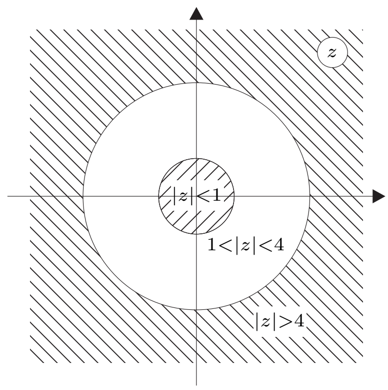


Abbildung 14: Konvergenzbereiche.

Kausale Folge für das Konvergenzgebiet $|z| > 4$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+4} &= \frac{1}{4z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{4}{z}} && (1)\\
&= \frac{1}{4z}\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^{-k} + \frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{z}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^{n-1}\,z^{-n} && (1)\\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{(-1)^{n-1}}{4}\sigma_{n-1} + \frac{1}{2}(-4)^{n-1}\sigma_{n-1} && (1)
\end{aligned}
$$

(Σ: 5 Punkte)

b) Die Übertragungsfunktion lautet

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{3-4z^{-1}+z^{-2}} && (1)\\
&= \frac{\frac{1}{3}z^2}{z^2-\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}}\,. && (1)
\end{aligned}
$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Durch Umformung erhält man

$$
G(z) = \frac{\frac{1}{3}z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-1)}\,. \qquad (1)
$$

Es liegt also eine Polstelle auf dem Einheitskreis (0,5), weshalb das System nicht stabil ist (0,5). ***(Σ: 2 Punkte)***

d) Durch Einsetzen der Folge x_n in die Definitionsgleichung der z-Transformation erhält man

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} 1z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n/2} z^{-2n} && (1)\\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z^2}\right)^{n} && (1)\\
&= \frac{z}{z-1} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z^2}} && (1)\\
&= \frac{z}{z-1} + \frac{2z^2}{2z^2-1}\,.
\end{aligned}
$$

Das Konvergenzgebiet ist $|z| > 1$ (1). ***(Σ: 4 Punkte)***

Aufgabe 5: Gemischte Aufgaben (17 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

a) Geben Sie für folgende Systeme jeweils an, ob die Bedingungen für Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität erfüllt sind. Das Signal y ist dabei stets das Ausgangssignal und x das Eingangssignal.

$$\begin{aligned} 1: &\quad y(t) = x(t)\cos(\omega t) \\ 2: &\quad y(t) = \sqrt{t}x(t+2)+1 \\ 3: &\quad y_n = 2x_n + x_{n-3} \end{aligned}$$

(3 Punkte)

b) Leiten Sie das Additionstheorem der Trigonometrie

$$\cos(2\pi at)\sin(2\pi bt) = \frac{1}{2}\left(\sin(2\pi(a+b)t) - \sin(2\pi(a-b)t)\right)$$

mithilfe der Fourier-Transformation her. *(5 Punkte)*

c) Die Laplace-Transformierte eines Signals $x(t)$ lautet

$$X(s) = \ln(1+s), \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1\,.$$

Bestimmen Sie das Signal $x(t)$. Verwenden Sie den Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln(s) = \frac{1}{s}.$$

(4 Punkte)

d) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für

$$G(s) = 10^{-4}\frac{(s+1)^2(s+10)(s+1000)}{s^2(s+100)}$$

in das entsprechende Diagramm in den Lösungsblättern ein. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Bewertung: (-0,5) für jede falsche Aussage

	linear	zeitinvariant	kausal
1	ja	nein	ja
2	nein	nein	nein
3	ja	ja	ja

(Σ: 3 Punkte)

b) Fourier-Transformation liefert

$$\cos(2\pi at)\sin(2\pi bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}(\delta(f+a)+\delta(f-a)) * \frac{\mathrm{j}}{2}(\delta(f+b)-\delta(f-b))\,. \qquad (2)$$

Durch Umformung erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Big(\delta(f+a)+\delta(f-a)\Big) * \frac{\mathrm{j}}{2}\Big(\delta(f+b)-\delta(f-b)\Big)& \\
= \frac{\mathrm{j}}{4}\Big(\delta(f+a)*\delta(f+b)-\delta(f+a)*\delta(f-b)& \\
+\delta(f-a)*\delta(f+b)-\delta(f-a)*\delta(f-b)\Big)& \qquad (1)\\
= \frac{\mathrm{j}}{4}\Big(\delta(f+a+b)-\delta(f+a-b)+\delta(f-a+b)-\delta(f-a-b)\Big)& \\
= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{j}}{2}\Big(\delta(f+(a+b))-\delta(f-(a+b)\Big)\right.& \\
\left.+\frac{\mathrm{j}}{2}\Big(\delta(f-(a-b))-\delta(f+(a-b))\Big)\right) .& \qquad (1)
\end{aligned}$$

Rücktransformation liefert

$$\frac{1}{2}\left(\sin(2\pi(a+b)t)-\sin(2\pi(a-b)t)\right) . \qquad (1)$$

(Σ: 5 Punkte)

c) Durch Differentiation der Bildfunktion erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln(1+s)=\frac{1}{1+s} . \qquad (1)$$

Gleichzeitig gilt mit der Rechenregel zur Differentiation der Zeitfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) \;\bullet\!\!-\!\!\!\circ\; -tx(t) . \qquad (1)$$

Mit der Korrespondenz

$$\frac{1}{1+s} \;\bullet\!\!-\!\!\!\circ\; \mathrm{e}^{-t}\,\sigma(t) \qquad (1)$$

ergibt sich

$$x(t)=-\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\sigma(t) . \qquad (1)$$

(Σ: 4 Punkte)

d) Die Übertragungsfunktion muss umgeformt werden, um die Knickfrequenzen abzulesen.

$$G(s)=10^{-4}\frac{(s+1)^2(s+10)(s+1000)}{s^2(s+100)}=10^{-2}\frac{(1+s)^2(1+\frac{1}{10}s)(1+\frac{1}{1000}s)}{s^2(1+\frac{1}{100}s)}$$

Das Bode-Diagramm ist in Abbildung 15 dargestellt.

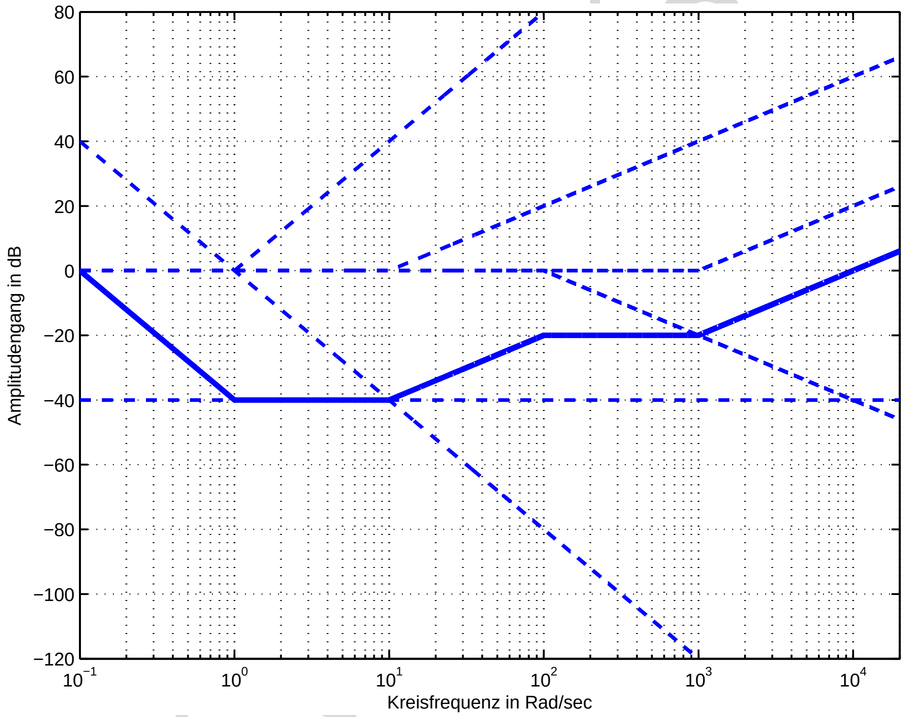


Abbildung 15: Bode-Diagramm.