Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
11. Oktober 2013

Musterlösung

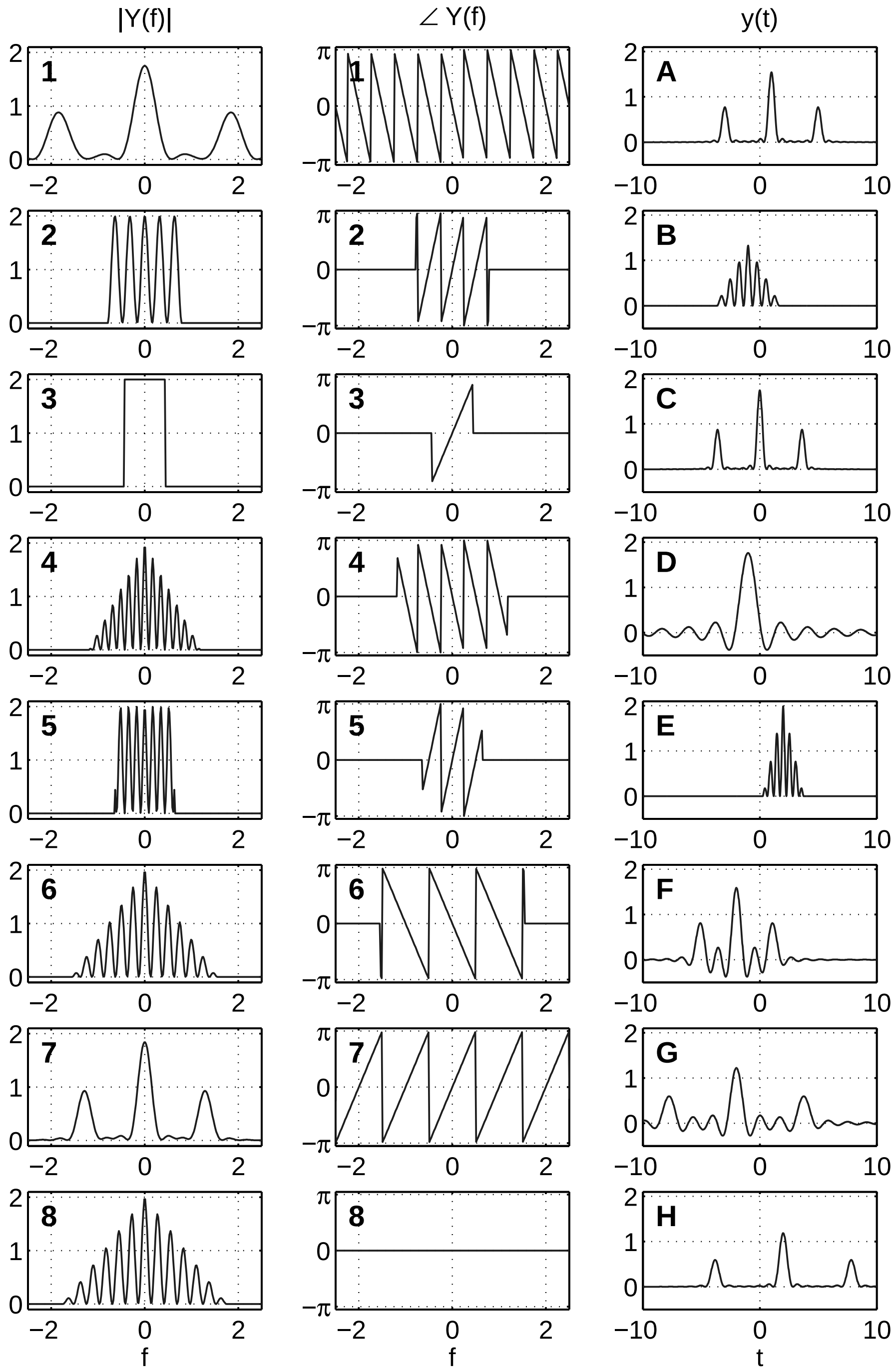
Zuordnungsaufgabe: 12
Aufgabe 1: 13
Aufgabe 2: 3
Aufgabe 3: 3
Aufgabe 4: 8
Aufgabe 5: 4
Aufgabe 6: 4
Aufgabe 7: 6
Aufgabe 8: 8
Aufgabe 9: 4
Aufgabe 10: 2
Aufgabe 11: 2
Aufgabe 12: 16
Aufgabe 13: 5
Aufgabe 14: 5
Aufgabe 15: 5

Gesamtpunkte: 100

ZU: Zuordnungsaufgabe (12 Punkte)

a) Fourier-Transformation

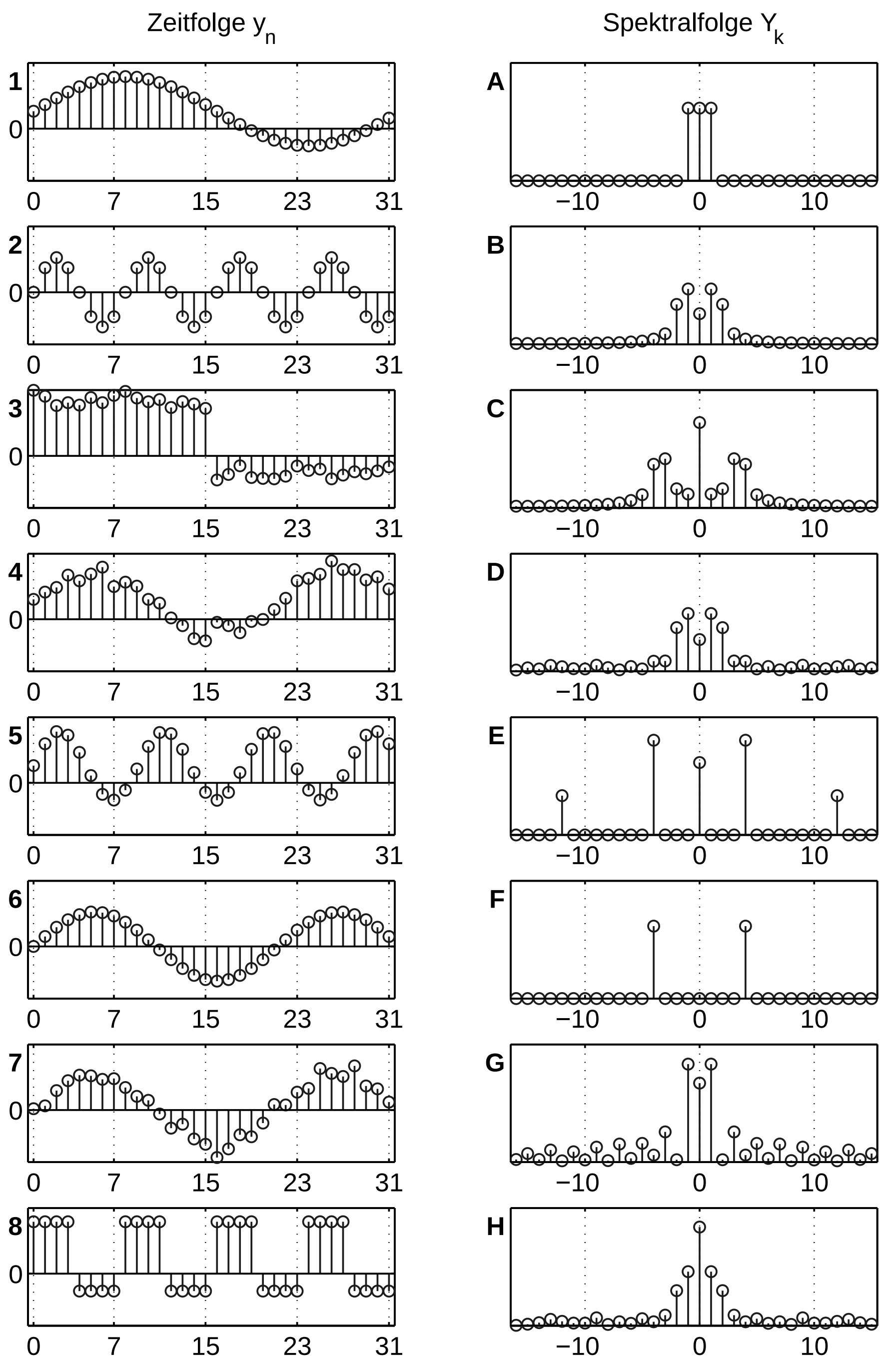
Im unteren Bild finden Sie in der rechten Spalte achtmal (A–H) jeweils ein kontinuierliches Zeitsignal. Leider sind die Fourier-Transformierten nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jeder Zeitfunktion $y(t)$ (A–H) das zugehörige Spektrum $Y(f)$ (1–8) an. *(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)*



(4 Punkte)

b) Diskrete Fourier-Transformation

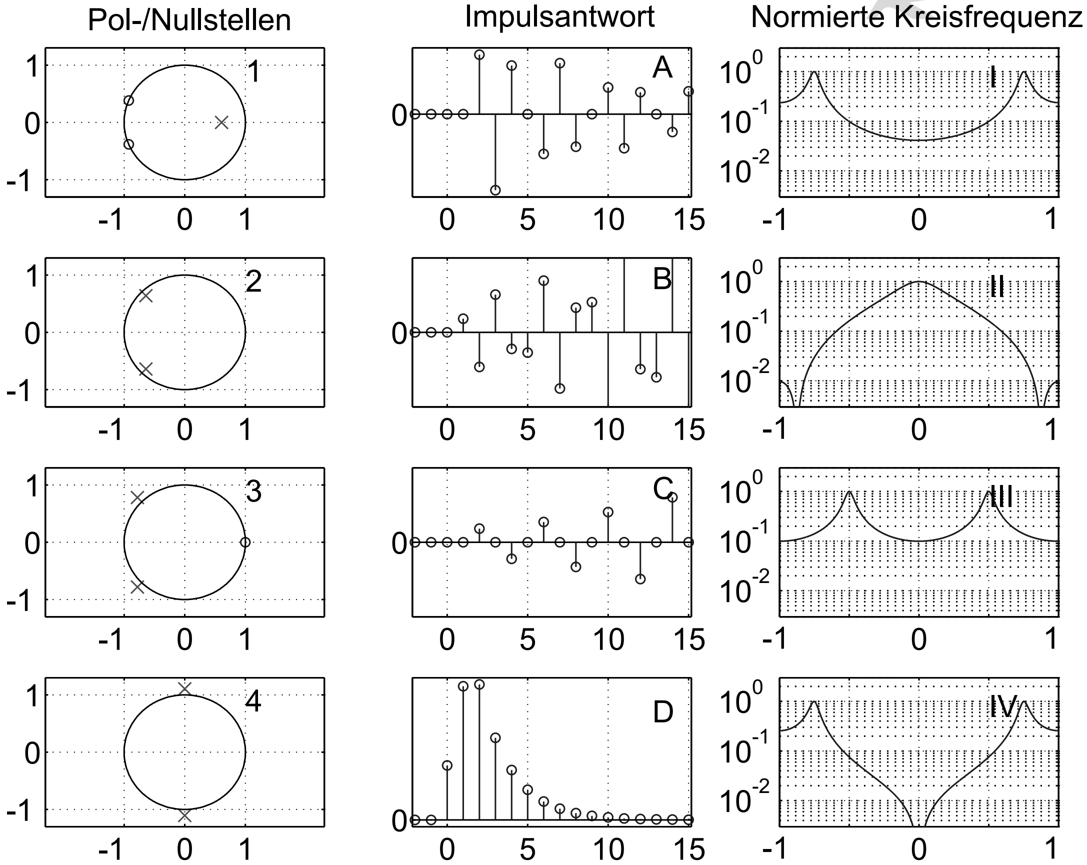
Im unteren Bild finden Sie in der rechten Spalte achtmal (A–H) jeweils eine diskrete Fourier-Transformierte. Leider sind die diskreten Zeitsignale nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jeder Zeitfolge y_n (1–8) die zugehörige Spektralfolge Y_k (A–H) an. *(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)*



(4 Punkte)

c) Zeitdiskrete Systeme

Im unteren Bild finden Sie in der linken Spalte vier Pol-Nullstellendiagramme zeitdiskreter Systeme. Ordnen Sie diesen jeweils die korrekte Impulsantwort (A–D) und den korrekten Amplitudengang (I–IV) zu. *(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)*



(4 Punkte)

Lösung

a) Fourier-Transformation

1-E
2-F
3-D
4-H
5-G
6-A
7-B
8-C *(Σ: 4 Punkte)*

b) Diskrete Fourier-Transformation

1-A
2-F
3-G
4-H
5-C
6-B
7-D
8-E *(Σ: 4 Punkte)*

c) Zeitdiskrete Systeme

1-D-II
2-A-I
3-B-IV
4-C-III *(Σ: 4 Punkte)*

Aufgabe 1: Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren - Haar-Wavelets (13 Punkte)

Gegeben sei auf dem Intervall $[0, 1]$ ein Funktionensystem, das sich aus der Funktion

$$\psi_1(t) = 1 \tag{1}$$

sowie den Funktionen, die der Vorschrift

$$\psi_{2^n+i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{2i-2}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2i-1}{2^{n+1}}, \\ -1 & \text{für } \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{2i}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

mit $1 \leq i \leq 2^n$ und $n \in \mathbb{N}_0$ genügen, zusammensetzt. Bei den durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen Funktionen spricht man auch von Haar-Wavelets. Hierbei stellt $\psi_{2^n+i}(t)$ eine Teilfolge für ein konkretes n der Haar-Funktionen dar. Die Menge der Folgen über n ergibt das Funktionensystem.

a) Skizzieren Sie das Haar-System für $n = 0$ und $n = 1$. *(4 Punkte)*

b) Handelt es sich bei $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ und $\psi_4(t)$ um ein orthogonales Funktionensystem? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von der vorhergehenden gelöst werden.

c) Geben Sie eine Rechenvorschrift in Abhängigkeit von n an, um aus dem oben gegebenen System $(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t))$ ein orthonormales System zu bestimmen. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von der vorhergehenden gelöst werden.

d) Wie lässt sich mit Hilfe eines orthonormalen Funktionensystems eine Funktion approximieren? Geben Sie hierzu allgemein die mathematischen Zusammenhänge in Matrixschreibweise an. Geben Sie auch die Gram'sche Matrix für eine orthonormale Basis an. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Es gilt $\psi_1(t) = 1$:

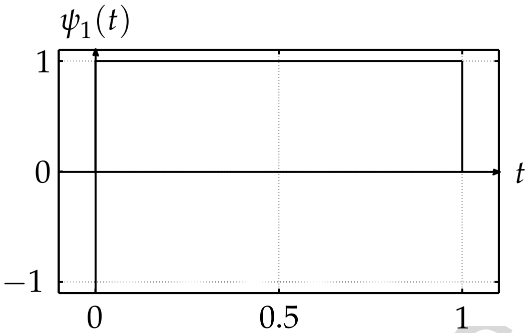


Abbildung L1: Funktion $\psi_1(t)$.

Für $n = 0$ gilt $1 \leq i \leq 1$:

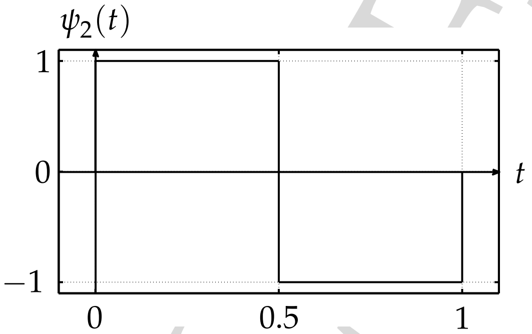


Abbildung L2: Funktion $\psi_2(t)$.

Für $n = 1$ gilt $1 \leq i \leq 2$:

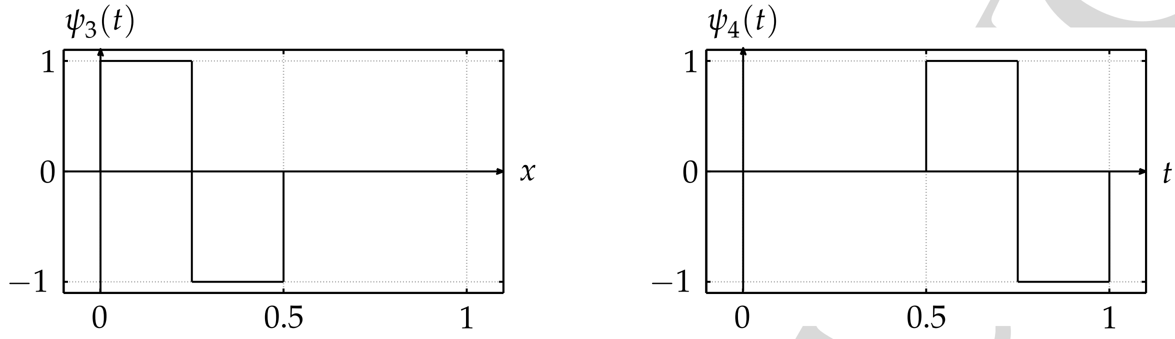


Abbildung L3: Funktionen $\psi_3(t)$ und $\psi_3(t)$.

(Σ: 4 Punkte)

b) Für Orthogonalität müssen die Innenprodukte der Funktionenpaare verschwinden:

$$\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t) \psi_j^*(t) \ \mathrm{d}t = 0 \ \text{ mit } \ i \in \{1,2,3,4\},\, j \in \{1,2,3,4\},\, j \neq i\,.$$

Dies ist aus den Skizzen sofort ersichtlich. ***(Σ: 2 Punkte)***

c) Es sei nun $\hat{\psi}_{2^n+i}(t)$ das zu $\psi_{2^n+i}(t)$ gehörende orthonormale Funktionensystem. Für $\hat{\psi}_{2^n+i}(t)$ muss die Bedingung

$$\langle \hat{\psi}_i(t), \hat{\psi}_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_i(t) \hat{\psi}_j^*(t) \ \mathrm{d}t = \delta_{ij}$$

erfüllt sein. Durch Normierung der einzelnen Funktionen,

$$\hat{\psi}_{2^n+i}(t) = \frac{\psi_{2^n+i}(t)}{\|\psi_{2^n+i}(t)\|}\,,$$

lässt sich ein orthonormales System berechnen:

$$\begin{aligned}
\|\psi_{2^n+i}(t)\|^2 &= \int_0^1 \psi_{2^n+i}^2(t) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{2i-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2i-1}{2^{n+1}}} 1 \cdot 1 \ \mathrm{d}t + \int_{\frac{2i-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2i}{2^{n+1}}} (-1)\cdot(-1) \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^n}\,,
\end{aligned}$$

und somit

$$\hat{\psi}_{2^n+i}(t) = \sqrt{2^n}\, \psi_{2^n+i}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{für } \ \frac{2i-2}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{2i-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{für } \ \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{2i}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Σ: 4 Punkte)

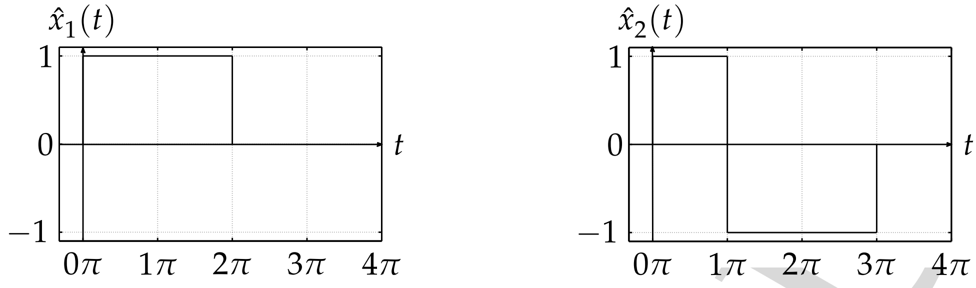
d) Um eine Funktion y zu approximieren, müssen die Koeffizienten a_i, mit welchen die einzelnen Basisfunktionen gewichtet werden, bestimmt werden. Durch $\mathbf{z} = \mathbf{G}\,\mathbf{a}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle y, \Phi_1(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \Phi_N(t) \rangle \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle \Phi_1(t), \Phi_1(t) \rangle & \cdots & \langle \Phi_1(t), \Phi_N(t) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \Phi_N(t), \Phi_1(t) \rangle & \cdots & \langle \Phi_N(t), \Phi_N(t) \rangle \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

lässt sich der Zusammenhang mathematisch beschreiben. Für ein orthonormales System ergibt sich die Gram'sche Matrix zu $\mathbf{G} = \mathbf{I}$. *(Σ: **3 Punkte**)*

Aufgabe 2: Grafische Faltung (3 Punkte)

Im Folgenden werden die Funktionen $\hat{x}_1(t)$ und $\hat{x}_2(t)$ betrachtet.



(a) Funktion $\hat{x}_1(t)$.　　(b) Funktion $\hat{x}_2(t)$.

Abbildung 1: Gegebene Funktionen $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$.

a) Berechnen Sie grafisch die Faltung $\hat{x}_1(t) * \hat{x}_2(t)$. Beachten Sie die Abstände auf der Abszisse. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die Lösung ist in Abbildung L4 unten zu sehen.

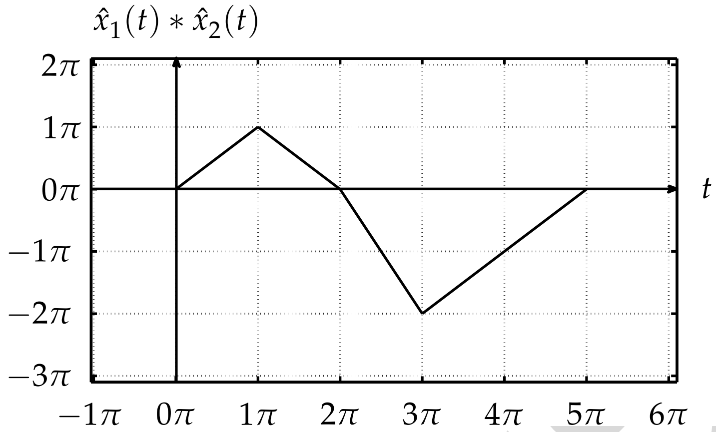


Abbildung L4: Faltung der Funktionen $\hat{x}_1(t)$ und $\hat{x}_2(t)$.

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 3: Fourier-Transformation - Differentiation der Spektralfunktion (3 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von

$$x(t) = -\mathrm{j}\,2\pi t\ \mathrm{e}^{-at^2}, \quad a > 0\,.$$

(3 Punkte)

Lösung

a) Unter Anwendung der Regel der Differentiation im Spektralbereich erhält man:

$$\begin{aligned} x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi f)^2}{a}}\right) \\ &= -\frac{2}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} f \pi^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi f)^2}{a}}\,. \end{aligned}$$

Bei der Lösung ist die innere Ableitung des Exponenten zu beachten. Daher steht in der Fourier-Transformierten vor dem Exponentialterm π^2. ***(Σ: 3 Punkte)***

Aufgabe 4: Zeitkontinuierliches System - DGL - AR Filter (8 Punkte)

Ein System S sei durch folgende Differentialgleichung charakterisiert:

$$\dddot{y}(t) = b_3 \dddot{x}(t) - a_0 y(t) - a_1 \dot{y}(t) - a_2 \ddot{y}(t), \quad a_0, a_1, a_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Stellen Sie das System grafisch in ARMA-Form dar. *(2 Punkte)*

b) Wie nennt man ein solches System? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von der vorhergehenden gelöst werden.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

des Systems S. Nehmen Sie hierzu an, dass alle Anfangswerte verschwinden. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von der vorhergehenden gelöst werden.

d) Zeigen Sie durch Rechnung mit Hilfe der Definition für Linearität, dass es sich beim System S um ein lineares System handelt. *(3 Punkte)*

Lösung

a) In ARMA-Form ergibt sich die in Abbildung L5 gezeigte Darstellung.

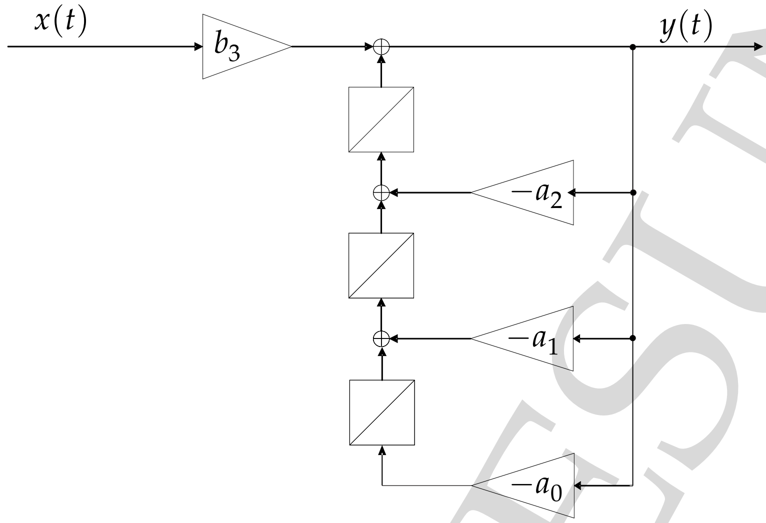


Abbildung L5: Darstellung Struktur AR-Filter.

*(Σ: **2 Punkte**)*

b) AR-Filter (1P) (Auto-Regressive). Das Eingangssignal wirkt direkt auf das Ausgangssignal, während das Ausgangssignal rückgekoppelt wird. *(Σ: **1 Punkt**)*

c) Die Übertragungsfunktion für AR-Filter lautet in der allgemeinen Form

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\beta_M s^M}{\sum_{\nu=0}^{M} \alpha_\nu s^\nu}.$$

Damit kann man die Übertragungsfunktion direkt aus Abbildung L5 ablesen (man beachte die Definition der ARMA-Darstellung im Skript):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_3 s^3}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Alternativ lässt sich die Übertragungsfunktion mit Hilfe der Regel Differentiation der Zeitfunktion berechnen:

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) &= b_3 s^3 X(s) - a_2 s^2 Y(s) - a_1 s Y(s) - a_0 Y(s) \\ b_3 s^3 X(s) &= \left(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) Y(s). \end{aligned}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

d) Linearität (Superposition + Homogenität):

$$\dddot{x}(t) = \frac{1}{b_3}\dddot{y}(t) + \frac{a_2}{b_3}\ddot{y}(t) + \frac{a_1}{b_3}\dot{y}(t) + \frac{a_0}{b_3}y(t)$$

$$
\begin{aligned}
S\{c_1\dddot{x}_1(t)+c_2\dddot{x}_2(t)\} =&\frac{1}{b_3}\left(c_1\dddot{y}_1(t)+c_2\dddot{y}_2(t)\right)+\frac{a_2}{b_3}\left(c_1\ddot{y}_1(t)+c_2\ddot{y}_2(t)\right)\\
&+\frac{a_1}{b_3}\left(c_1\dot{y}_1(t)+c_2\dot{y}_2(t)\right)+\frac{a_0}{b_3}\left(c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\right)\\
=&c_1\left(\frac{1}{b_3}\dddot{y}_1(t)+\frac{a_2}{b_3}\ddot{y}_1(t)+\frac{a_1}{b_3}\dot{y}_1(t)+\frac{a_0}{b_3}y_1(t)\right)\\
&+c_2\left(\frac{1}{b_3}\dddot{y}_2(t)+\frac{a_2}{b_3}\ddot{y}_2(t)+\frac{a_1}{b_3}\dot{y}_2(t)+\frac{a_0}{b_3}y_2(t)\right)\\
=&c_1S\{\dddot{x}_1(t)\}+c_2S\{\dddot{x}_2(t)\}
\end{aligned}
$$

Alternativ (ohne Beachtung mathematisch exakter Notation):

$$
\begin{aligned}
S\{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\} =& \frac{1}{b_3}\left(c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\right)+\frac{a_2}{b_3}\left(\int c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\right)\\
&+\frac{a_1}{b_3}\left(\int\int c_1y_1(t)+c_2ty_2(t)\right)\\
&+\frac{a_0}{b_3}\left(\int\int\int c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\right)\\
=& c_1\left(\frac{1}{b_3}y_1(t)+\frac{a_2}{b_3}\int y_1(t)+\frac{a_1}{b_3}\int\int y_1(t)+\frac{a_0}{b_3}\int\int\int y_1(t)\right)\\
&+c_2\left(\frac{1}{b_3}y_2(t)+\frac{a_2}{b_3}\int y_2(t)+\frac{a_1}{b_3}\int\int y_2(t)+\frac{a_0}{b_3}\int\int\int y_2(t)\right)\\
=& c_1S\{x_1(t)\}+c_2S\{x_2(t)\}
\end{aligned}
$$

Es handelt sich also um ein lineares System.

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 5: Zeitkontinuierliches System (4 Punkte)

Gegeben sei nun ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

a) Das System habe eine Polstelle bei $s_{\infty 1} = -1$. Bestimmen Sie a_1 und a_0 in Abhängigkeit der anderen Polstelle $s_{\infty 2}$. *(2 Punkte)*

b) Wählen Sie $s_{\infty 2}$ nun so, dass sich $a_0 = 2$ ergibt und bestimmen Sie die Impulsantwort $g(t)$. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Es ergibt sich für die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = s\frac{1}{(s+1)(s-s_{\infty 2})} \stackrel{!}{=} \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_0}\,.$$

Für den Nenner folgt:

$$(s+1)(s-s_{\infty 2}) = s^2 + s(1-s_{\infty 2}) - s_{\infty 2}\,.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - s_{\infty 2}\,, \\ a_0 &= -s_{\infty 2}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Mit $s_{\infty 2} = -2$ ergibt sich

$$G(s) = s\frac{1}{(s+1)(s+2)}\,.$$

PBZ:

$$\begin{aligned} G(s) &= s\frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \left(\frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right) \end{aligned}$$

$$G(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad h(t) = \left(-1\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t}\right)\sigma(t)$$

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 6: Stabiilität - Endwertsatz (4 Punkte)

Es sei ein **kausales** System durch seine Impulsantwort

$$g(t) = \delta(t) - \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}, \quad T > 0,$$

gegeben.

a) Prüfen Sie anhand der Impulsantwort durch Rechnung im Zeitbereich die Stabilität des Systems. *(2 Punkte)*

b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus der vorigen Teilaufgabe mittels des Endwertsatzes der Laplace-Transformation. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Für Stabilität muss die Impulsantwort absolut integrierbar sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \ \mathrm{d}t \overset{!}{<} \infty \,.$$

Für kausale Systeme verschwindet die Impulsantwort für negative Zeiten. Daher ist es ausreichend, den Zeitbereich $[0 \ldots \infty)$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} |g(t)| \ \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \left| \delta(t) - \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \right| \ \mathrm{d}t &= \int_{0}^{\infty} \left| \delta(t) + -\left(\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right) \right| \ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{0}^{\infty} |\delta(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \ \mathrm{d}t \\
&\leq 1 + \left[\frac{1}{T}(-1)T\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right]_0^{\infty} = 1 - \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right]_0^{\infty} = 1 - (0-1) = 2 \leq \infty \,.
\end{aligned}$$

Beim Schritt von der ersten zur zweiten Zeile bedient man sich der Dreieckungleichung unter Beachtung der Definition der Betragsfunktion. ***(Σ: 2 Punkte)***

b) Wenn die Impulsantwort für $t \to \infty$ abklingt, dann ist Stabilität gewährleistet. Der Grenzwert $t \to \infty$ von $g(t)$ lässt sich über den Endwertsatz

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

mit Hilfe der Laplace-Transformierten $G(s)$

$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g(t)$$

bestimmen:

$$\lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{Ts^2}{1+Ts} = \frac{0}{1} = 0 \,.$$

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 7: Übertragungsfunktion aus Pol-Nullstellenplan, Minimalphasensystem (6 Punkte)

In Abbildung 2 ist das Pol-Nullstellendiagramm eines Systems zu sehen. Polstellen werden durch ein Kreuz, Nullstellen durch einen Kreis dargestellt. Bei mehrfachen Polstellen/Nullstellen ist dies durch eine Zahl in Klammern gekennzeichnet.

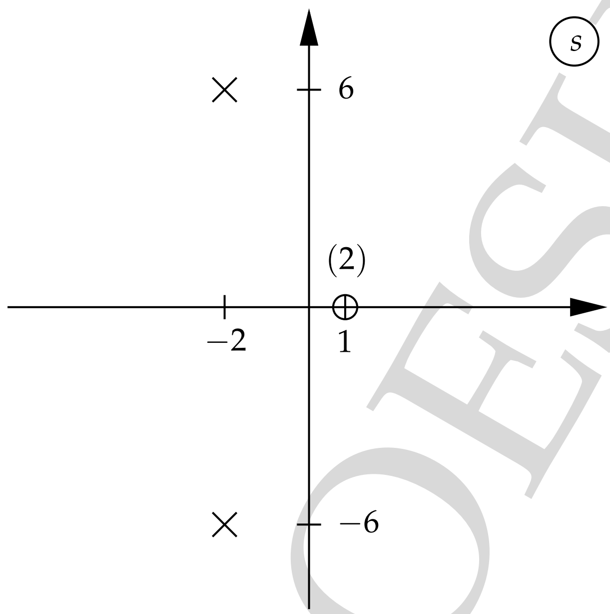


Abbildung 2: Pol-Nullstellendiagramm.

a) Geben Sie die Systemfunktion $G(s)$ an. *(2 Punkte)*

b) Beschreibt die Systemfunktion $G(s)$ ein stabiles System? (Begründung) *(1 Punkt)*

c) Zerlegen Sie die Systemfunktion $G(s)$ in ein Minimalphasensystem $G_M(s)$ und einen Allpass $G_A(s)$, so dass gilt:

$$G(s) = G_M(s) \cdot G_A(s) .$$

Geben Sie die Ergebnisse jeweils als Quotient zweier Polynome in s an. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die Pol- und Nullstellen lassen sich aus dem Diagramm ablesen:

$$\begin{aligned} s_{01} &= s_{02} = 1, \\ s_{\infty 1} &= -2 + 6\mathrm{j}, \\ s_{\infty 2} &= -2 - 6\mathrm{j}\,. \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Übertragungsfunktion schreiben als

$$G(s) = k\frac{(s-1)^2}{(s+2-\mathrm{j}6)(s+2+\mathrm{j}6)} = k\frac{s^2-2s+1}{s^2+4s+40}.$$

Lösungen, bei denen der konstante Faktor k nicht explizit in der Gleichung für die Übertragungsfunktion auftaucht (äquivalent zur Annahme k=1), werden auch mit voller Punktzahl bewertet. ***(Σ: 2 Punkte)***

b) Die Systemfunktion $G(s)$ beschreibt ein stabiles System, da die Pole in der linken s-Halbebene liegen, das bedeutet es gilt $\mathrm{Re}\{s_\infty\} < 0$. ***(Σ: 1 Punkt)***

c) Die doppelte Nullstelle von $G(s)$ bei $s_0 = 1$ gehört zum Allpass. Dieser enthält dann entsprechend eine doppelte Polstelle bei $s_\infty = -1$. An dieser Stelle taucht entsprechend eine doppelte Nullstelle im Minimalphasensystem auf. Hieraus folgen die Übertragungsfunktionen

$$G_\mathrm{A}(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2} = \frac{s^2-2s+1}{s^2+2s+1}$$

des Allpasses und

$$G_\mathrm{M}(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2+4s+40} = \frac{s^2+2s+1}{s^2+4s+40}$$

des Minimalphasensystems. ***(Σ: 3 Punkte)***

Aufgabe 8: DFT und Leckeffekt (8 Punkte)

Eine alternierende Rechteckfolge werde mit sechs Abtastwerten gemäß Abbildung 3 abgetastet.

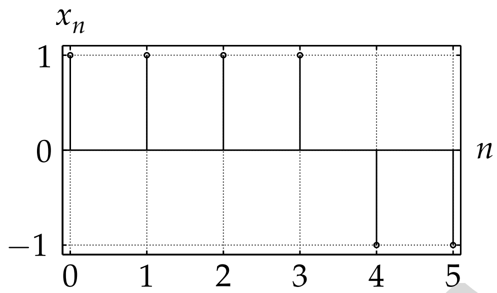


Abbildung 3: Zeitdiskretes Signal x_n.

a) Berechnen Sie die 6-Punkte-DFT des Signals x_n. Dazu können Sie bei Bedarf die untenstehende Tabelle verwenden.

Tabelle 1: Werte von $\sin(\alpha)$.

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

(4 Punkte)

b) Skizzieren Sie das DFT-Betragsspektrum. *(2 Punkte)*

c) In Abbildung 4 ist der Betrag der DFT des abgetasteten Signals berechnet, wobei zwei weitere Abtastwerte hinzugenommen wurden (bei gleicher Abtastzeit). Welcher Effekt unterscheidet die 6-Punkte-DFT aus Aufgabenteil **a)** und die 8-Punkte-DFT aus Abbildung 4? Wieso tritt dieser Effekt bei der DFT in Abbildung 4 nicht auf? *(2 Punkte)*

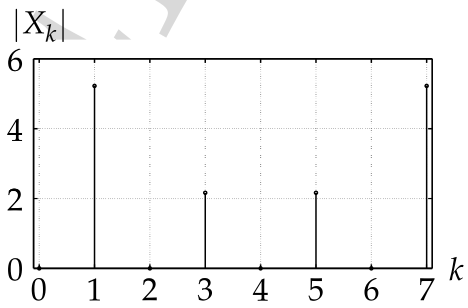


Abbildung 4: Betragsspektrum der 8-Punkte-DFT.

Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{5} x_n\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{6}} = \sum_{n=0}^{5} x_n\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi\frac{kn}{3}} \\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{2\pi}{3}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{4\pi}{3}k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{5\pi}{3}k} \\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}k} - \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{2\pi}{3}k} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi}{3}k} + (-1)^k \\
&= 1 + (-1)^k - 2\mathrm{j}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right)\right).
\end{aligned}
$$

Aus der gegebenen Tabelle folgt:

$$
\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) = [0,\ \sqrt{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\sqrt{3}]\,.
$$

Damit ergibt sich die DFT zu:

$$
X_k = [2,\ -2\mathrm{j}\sqrt{3},\ 2,\ 0,\ 2,\ 2\mathrm{j}\sqrt{3}]\,.
$$

(Σ: 4 Punkte)

b) Die Skizze des Betragsspektrums ist in Abbildung L6 zu sehen.

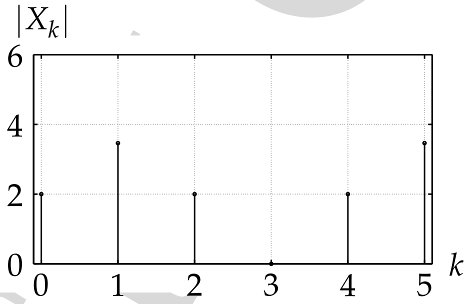


Abbildung L6: Betragsspektrum der 6-Punkte-DFT.

(Σ: 2 Punkte)

c) Der Leckeffekt tritt auf. Bei der 8-Punkte-DFT erfassen die acht Punkte im Zeitbereich genau eine Periode der Rechteckfolge. Daher wird die Rechteckfolge bei der periodischen Fortsetzung (aufgrund der Frequenzdiskretisierung) fehlerfrei fortgesetzt und man erhält keinen Leckeffekt. Bei der 6-Punkte-DFT würde ein Zeitsignal entstehen, bei dem eine unvollständige Periode einer Rechteckfolge periodisch fortsetzt wird.
(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 9: Unterabtastung (4 Punkte)

Ein bandbegrenztes Messsignal $y(t)$ mit der Fourier-Transformierten $Y(f)$, der Mittenfrequenz $f_0 = 12\,\text{kHz}$ und der Bandbreite $B = 2\,\text{kHz}$ ($Y(f) = 0$ für $|f - f_0| > 1\,\text{kHz}$) soll mit Hilfe der Unterabtastung abgetastet werden.

a) Bestimmen Sie die kleinste Abtastfrequenz f_A bei symmetrischem Bandspektrum und Projektion der Mittenfrequenz f_0 auf $f = 0$. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die kleinste Abtastfrequenz f_A bei unsymmetrischem Bandspektrum und Projektion der Mittenfrequenz f_0 auf $f = \frac{f_\text{A}}{4}$. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Es folgt für die kleinste Abtastfrequenz:

$$f_\mathrm{A} = \frac{f_0}{r} = \frac{12\,\mathrm{kHz}}{r} \quad \wedge \quad f_\mathrm{A} > \mathrm{B} = 2\,\mathrm{kHz} \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{max} = 5\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

$$\Rightarrow \quad f_\mathrm{A,min} = 2{,}4\,\mathrm{kHz}$$

b) Es folgt für die kleinste Abtastfrequenz:

$$f_\mathrm{A} = \frac{4\,f_0}{4\,r+1} = \frac{48\,\mathrm{kHz}}{4r+1} \quad \wedge \quad f_\mathrm{A} > 2\mathrm{B} = 4\,\mathrm{kHz} \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{max} = 2\,.$$

$$\Rightarrow \quad f_\mathrm{A,min} = 5{,}333\,\mathrm{kHz}$$

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 10: Aliasing (2 Punkte)

Ein reelles Signal besitzt nur in einem bestimmten Frequenzbereich Spektralanteile. Es werden folgende vier Fälle betrachtet:

(I) $[3\,\text{kHz}, 8\,\text{kHz}]$;   (II) $[2\,\text{kHz}, 4\,\text{kHz}]$;   (III) $[6\,\text{kHz}, 9\,\text{kHz}]$;   (IV) $[11\,\text{kHz}, 14\,\text{kHz}]$.

a) Das Signal wird nun mit der Abtastfrequenz $f_\text{A} = 10\,\text{kHz}$ abgetastet. In welchen Fällen tritt Aliasing auf? Begründen Sie Ihre Antworten (eventuell anhand von Skizzen). *(2 Punkte)*

Lösung

a) Durch Aufzeichnen der Spektren (Wiederholung mit der Abtastfrequenz) ist ersichtlich, dass lediglich im Fall (I) Aliasing auftritt. ***(Σ: 2 Punkte)***

Aufgabe 11: Schnelle Fourier-Transformation (2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass sich durch Rekursion ein Rechenvorteil der schnellen Fourier-Transformation (FFT) gegenüber der konventionellen DFT ergibt, indem Sie die Wertefolge x_n einer 2^P-Punkte-DFT für den Fall $P = 3$ als 2^{P-1}-mal 2-Punkte-DFTs darstellen.

(2 Punkte)

Lösung

a) Die Definitionsgleichung der diskreten Fourier-Transformation ist gegeben durch:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi kn}{N}} \,. \tag{L1}$$

Eine Wertefolge für $P = 3$ ist gegeben durch:

$$x_n = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] \,.$$

2-Punkte DFT einer Funktion $x(t)$:

$$X_k = x_0 + x_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} \,.$$

Für $N = 3$ ergibt sich eine 8-Punkte DFT:

$$X_k = x_0 + x_1 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k}{4}} + x_2 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k}{2}} + x_3 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k3}{4}} + x_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} + x_5 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k5}{4}} + x_6 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k6}{4}} + x_7 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k7}{4}} \,.$$

Ausklammern ergibt:

$$\begin{aligned} X_k &= x_0 + x_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} + x_1 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k}{4}} + x_5 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k5}{4}} + x_2 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k}{2}} + x_6 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k6}{4}} + x_3 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k3}{4}} + x_7 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k7}{4}} \\ &= \left(x_0 + x_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}\right) + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k}{4}} \left(x_1 + x_5 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}\right) \\ &\quad + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k}{2}} \left(x_2 + x_6 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}\right) + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\pi k3}{4}} \left(x_3 + x_7 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}\right) \,. \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, dass sich eine 8-Punkte-DFT als 4 2-Punkte-DFTs schreiben lässt.

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 12: Zeitdiskretes System (16 Punkte)

Es wird das zeitdiskrete System aus Abbildung 5 mit dem Eingang $y_{\mathrm{e},n}$ und dem Ausgang $y_{\mathrm{a},n}$ betrachtet.

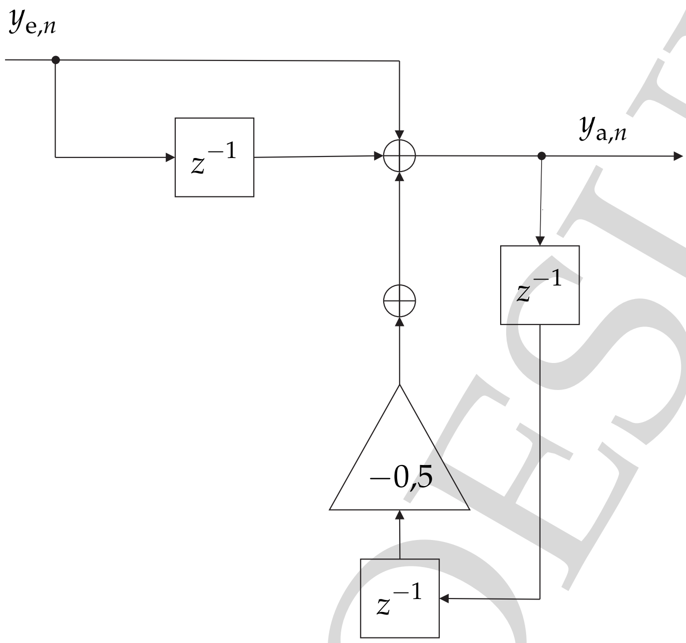


Abbildung 5: Zeitdiskretes System.

Das System befindet sich anfangs in Ruhe, das heißt, dass alle Anfangswerte des Systems verschwinden.

a) Stellen Sie die Differenzengleichung des Systems auf. Ist das System kausal? *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion. *(2 Punkte)*

c) Zeichnen Sie einen Pol-Nullstellen-Plan des Systems. Ist das System stabil? Ist es minimalphasig? *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil **a)** nicht gelöst haben, rechnen Sie von hier an mit der folgenden Differenzengleichung weiter:

$$y_{\mathrm{a},n} = -2y_{\mathrm{a},n-1} + \frac{1}{2}y_{\mathrm{a},n-2} + 2y_{\mathrm{e},n} + 2y_{\mathrm{e},n-1}\,.$$

d) Geben Sie einen Signalflussplan des Systems an, der weniger Verzögerungsglieder als obige Darstellung benötigt. *(2 Punkte)*

e) Stellen Sie mittels des Signalflussplans eine Zustandsraumdarstellung des Systems auf. Zeichnen Sie hierzu die gewählten Zustandsgrößen in den Signalflussplan ein. *(3 Punkte)*

f) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung. *(2 Punkte)*

g) Bestimmen Sie das Eingangssignal $y_{\mathrm{e},n}$ so, dass $y_{\mathrm{a},n} = \delta_n$ gilt. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Aus der Zeichnung liest man

$$y_{\mathrm{a},n} = -\frac{1}{2} y_{\mathrm{a},n-2} + y_{\mathrm{e},n} + y_{\mathrm{e},n-1}$$

und somit

$$y_{\mathrm{a},n} + \frac{1}{2} y_{\mathrm{a},n-2} = y_{\mathrm{e},n} + y_{\mathrm{e},n-1}$$

ab. Da der aktuelle Ausgangswert nur von aktuellen und vergangenen Ein- und Ausgangswerten abhängt, ist das System kausal. *(Σ: **2 Punkte**)*

b) Die Übertragungsfunktion ergibt sich aus der Differenzengleichung zu

$$G(z) = \frac{Y_\mathrm{a}(z)}{Y_\mathrm{e}(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2+z}{z^2+\frac{1}{2}}.$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

c) Die Nullstellen der Übertragungsfunktion sind $z_{0,1} = 0$, $z_{0,2} = -1$ und die Systempole $z_{\infty,1,2} = \pm \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es gilt $|z_{\infty,i}| \leq 1$ sowie $|z_{0,i}| \leq 1$ und somit ist das System stabil und minimalphasig.
Der Pol-Nullstellenplan ist klar und wird hier daher nicht explizit angegeben.
*(Σ: **2 Punkte**)*

d) Aus der Differenzengleichung erhält man den Signalflussplan in Abbildung L7.

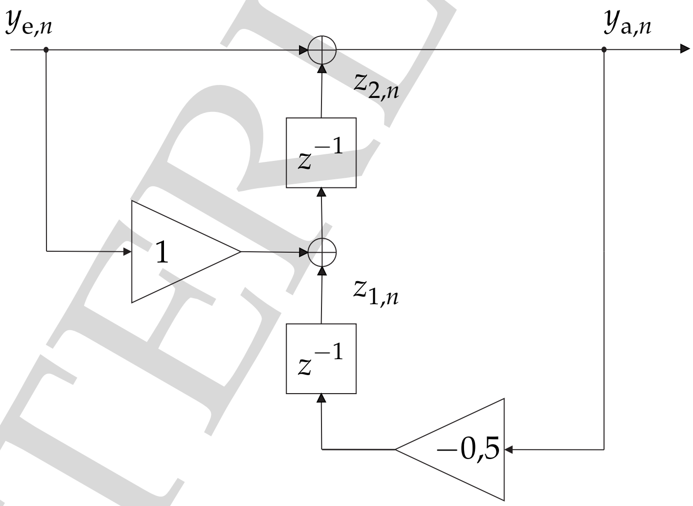


Abbildung L7: Signalflussplan.

*(Σ: **2 Punkte**)*

e) Als Zustandsgrößen werden die Ausgänge „nach“ den Verzögerungsgliedern gewählt. Somit folgt $z_{1,n+1} = -0{,}5\, y_{\mathrm{a},n}$ und $z_{2,n+1} = z_{1,n} + y_{\mathrm{e},n}$. Die Ausgangsgleichung ist $y_{\mathrm{a},n} = z_{2,n} + y_{\mathrm{e},n}$. Einsetzen liefert die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z}_n + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} y_{\mathrm{e},n}\,, \\
y_{\mathrm{a},n} &= (0, 1)\mathbf{z}_n + (1) y_{\mathrm{e},n}\,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

f) Aus der Zustandsraumdarstellung folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

und somit

$$\begin{aligned} G(z) &= (0,1)\frac{1}{z^2+0{,}5}\begin{pmatrix} z & -0{,}5 \\ 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{z^2+0{,}5}(1,z)\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = \frac{z^2+z}{z^2+0{,}5}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Nach Voraussetzung soll $Y_{\mathrm{a}}(z) = 1$ gelten. Somit folgt

$$Y_{\mathrm{e}}(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{z^2+0{,}5}{z^2+z} = 1 - \frac{z}{z+z^2} + \frac{0{,}5}{z^2+z}$$

Durch Rücktransformation entsteht die Eingangsfolge

$$y_{\mathrm{e},n} = \delta_n - (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} + \frac{1}{2}(-1)^{n-2}\sigma_{n-2}.$$

(Σ: 3 Punkte)

Alternativlösung mit Hinweis:

d) Aus der Differenzengleichung

$$y_{\mathrm{a},n} = -2y_{\mathrm{a},n-1} + \frac{1}{2}y_{\mathrm{a},n-2} + 2y_{\mathrm{e},n} + 2y_{\mathrm{e},n-1}$$

erhält man den folgenden Signalflussgraphen: ***(Σ: 2 Punkte)***

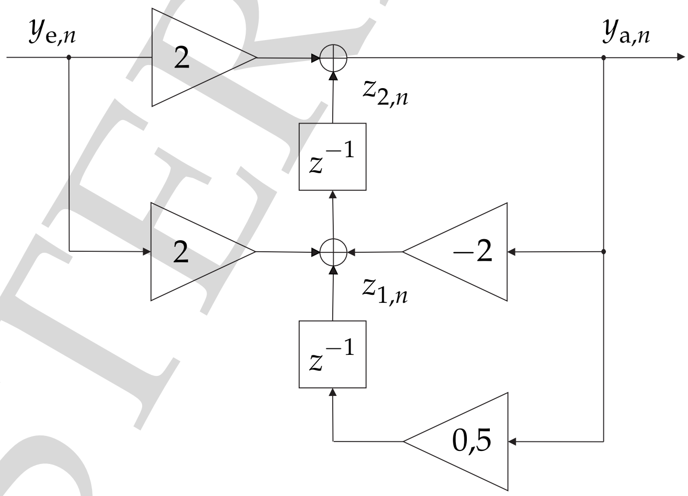


Abbildung L8: Signalflussgraph.

e) Als Zustandsgrößen werden die Ausgänge „nach" den Verzögerungsgliedern gewählt. Somit folgt $z_{1,n+1} = 0{,}5\,y_{\mathrm{a},n}$ und $z_{2,n+1} = z_{1,n} + 2\,y_{\mathrm{e},n} - 2\,y_{\mathrm{a},n}$. Die Ausgangsgleichung ist $y_{\mathrm{a},n} = z_{2,n} + 2\,y_{\mathrm{e},n}$. Einsetzen liefert die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{z}_n + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} y_{\mathrm{e},n} \\ y_{\mathrm{a},n} &= (0,1)\mathbf{z}_n + (2)y_{\mathrm{e},n}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

f) Aus der Zustandsraumdarstellung folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

und somit

$$\begin{aligned} G(z) &= (0,1)\frac{1}{z(z+2)-0,5}\begin{pmatrix} z+2 & 0{,}5 \\ 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{z(z+2)-0,5}(1,z)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 = 2\frac{z^2+z}{z^2+2z-0,5}. \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Nach Voraussetzung soll $Y_{\mathrm{a}}(z) = 1$ gelten. Somit folgt

$$Y_{\mathrm{e}}(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+2z-\frac{1}{2}}{z^2+z}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2+z}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z} - \frac{\frac{3}{2}}{z(z+1)}\right).$$

Durch Rücktransformation entsteht die Eingangsfolge

$$y_{\mathrm{e},n} = \frac{1}{2}\left(\delta_n + \delta_{n-1} - \frac{3}{2}\,(-1)^{n-2}\,\sigma_{n-2}\right).$$

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 13: Zeitdiskrete Impulsantwort (5 Punkte)

Betrachten Sie ein zeitdiskretes, kausales LTI-System mit der Impulsantwort g_n wie in Abbildung 6 dargestellt.

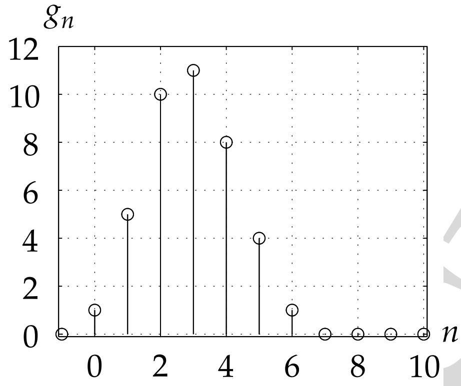


Abbildung 6: Impulsantwort g_n.

Das System entstehe durch Reihenschaltung zweier zeitdiskreter, kausaler LTI-Systeme mit den Impulsantworten $g_{1,n}$ und $g_{2,n}$.

a) Berechnen Sie die Impulsantwort $g_{1,n}$, falls die Impulsantwort $g_{2,n}$ durch

$$g_{2,n} = \sigma_n - \sigma_{n-2}$$

gegeben ist. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Die Impulsantwort des zweiten Systems ist $g_{2,n} = \sigma_n - \sigma_{n-2}$, lässt sich somit darstellen als $g_{2,n} = \delta_n + \delta_{n-1}$ (Erleichterung der Rechnung im z-Bereich!). Somit ergibt sich die z-Transformierte

$$G_2(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}\,.$$

Oder alternativ:

$$g_{2,n} = \sigma_n - \sigma_{n-2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-1}}{z-1} = \frac{z^2-1}{z(z-1)} = \frac{(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = 1 + \frac{1}{z}\,.$$

Wegen $G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$ folgt aufgrund kausaler Systeme aus dem Ansatz

$$G_1(z) = g_{1,0} + g_{1,1}z^{-1} + g_{1,2}z^{-2} + g_{1,3}z^{-3} + \cdots$$

folgende Gleichung:

$$G(z) \cdot z = \left(1 + 5z^{-1} + 10z^{-2} + 11z^{-3} + 8z^{-4} + 4z^{-5} + z^{-6}\right) z \overset{!}{=}$$
$$\left(g_{1,0} + g_{1,1}z^{-1} + g_{1,2}z^{-2} + g_{1,3}z^{-3} + \cdots\right)(z+1) = G_1(z) \cdot (z+1)\,.$$

Dies führt auf

$$z + 5z^0 + 10z^{-1} + 11z^{-2} + 8z^{-3} + 4z^{-4} + z^{-5} =$$
$$g_{1,0}z + (g_{1,0} + g_{1,1})z^0 + (g_{1,1} + g_{1,2})z^{-1} + (g_{1,2} + g_{1,3})z^{-2} + \cdots$$

und damit:

$$\begin{aligned}
&g_{1,0} = 1 \\
&g_{1,0} + g_{1,1} = 5 \Rightarrow g_{1,1} = 4, \quad && g_{1,1} + g_{1,2} = 10 \Rightarrow g_{1,2} = 6 \\
&g_{1,2} + g_{1,3} = 11 \Rightarrow g_{1,3} = 5, && g_{1,3} + g_{1,4} = 8 \Rightarrow g_{1,4} = 3 \\
&g_{1,4} + g_{1,5} = 4 \Rightarrow g_{1,5} = 1, && g_{1,5} + g_{1,6} = 1 \Rightarrow g_{1,6} = 0 \\
&g_{1,6} + g_{1,7} = 0 \Rightarrow g_{1,7} = 0, && g_{1,7} + g_{1,8} = 0 \Rightarrow g_{1,8} = 0\,.
\end{aligned}$$

Alle weiteren Amplituden ergeben sich mit diesen Gleichungen ebenfalls zu null, $g_{1,n} = 0\,, n \geq 6$. ***(Σ: 5 Punkte)***

Aufgabe 14: Diskrete Faltung mit Gaussfilter - Glättungsfilter kontinuierliche Signale (5 Punkte)

Bei der Aufnahme von digitalen Bildern mit elektronischen Sensoren treten Störungen in Form von Bildrauschen auf. Um diese Störungen zu unterdrücken, werden in der Bildverarbeitung Tiefpassfilter eingesetzt. Die Impulsantwort eines typischen Filters ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Das abgetastete Signal ist für $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ in Abbildung 7 zu sehen. Es gilt $g_n = g(nt_\mathrm{A})$, wobei t_A die Abtastschrittweite ist.

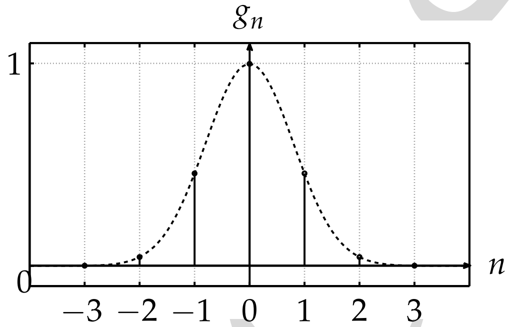


Abbildung 7: Wertefolge g_n sowie gestrichelt die einhüllende Funktion $g(x)$.

Für die Abtastwerte des Filters ergibt sich die diskrete Folge g_n aus Tabelle 2.

Tabelle 2: Werte des Filters g_n.

n	-2	-1	0	1	2
g_n	0,05	0,5	1,0	0,5	0,05

a) Eine vollständige Bildzeile lässt sich durch die Pixelwerte der Folge b_n aus Tabelle 3 beschreiben.

Tabelle 3: Werte von Bildpunkten.

n	0	1	2	3	4
b_n	1	2	10	2	10

Berechnen Sie die diskrete Faltung $g_n * b_n$. Nehmen Sie für Pixel außerhalb des Bildes den Wert null an: $b_n = 0$ für $n \in \{\ldots, -2, -1, 5, 6, \ldots\}$. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Diskrete Faltung:

$$f_n = b_n * g_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \, g_{n-m} \,.$$

$$f_0 = b_0 * g_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \, g_{0-m} = \sum_{m=-2}^{2} b_m \, g_{0-m}$$
$$= 2{,}5 \,.$$

$$f_1 = b_1 * g_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \, g_{1-m} = \sum_{m=-2}^{3} b_m \, g_{1-m} = \sum_{m=0}^{3} b_m \, g_{1-m}$$
$$= 7{,}6 \,.$$

$$f_2 = b_2 * g_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \, g_{2-m} = \sum_{m=0}^{4} b_m \, g_{2-m}$$
$$= b_0 \, g_2 + b_1 \, g_1 + b_2 \, g_0 + b_3 \, g_{-1} + b_4 \, g_{-2}$$
$$= 12{,}575 \,.$$

$$f_3 = b_3 * g_3 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \, g_{3-m} = \sum_{m=1}^{4} b_m \, g_{3-m}$$
$$= 12{,}10 \,.$$

$$f_4 = b_4 * g_4 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \, g_{4-m} = \sum_{m=2}^{4} b_m \, g_{4-m}$$
$$= 11{,}50 \,.$$

(Σ: 5 Punkte)

Aufgabe 15: SNR - Fourier-Transformation (5 Punkte)

Ein Maß für den Rauschanteil eines Signals ist das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR):

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{Signal}}}{P_{\mathrm{Rauschen}}} ,$$

wobei P_{Signal} die mittlere Signalleistung und P_{Rauschen} die mittlere Rauschleistung (für Leistungssignale) darstellt. Die mittlere Leistung eines Signals $x(t)$ lässt sich als Integral über die spektrale Leistungsdichte berechnen

$$P_{xx} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} S_{xx}(f) \, \mathrm{d}f .$$

Hierbei stellt B die Bandbreite des Signals dar. Das Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(f)$ berechnet sich als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau .$$

Die Autokorrelationsfunktionen für das Signal $u(t)$ sowie für das Störsignal $e(t)$ seien bekannt:

$$r_{ee}(\tau) = \delta(\tau) ,$$
$$r_{uu}(\tau) = \frac{\sin(\pi \tau f_0)}{\tau \pi} .$$

Hierbei stellt $\delta(\tau)$ den Dirac-Impuls dar. Für die Berechnung des SNR sind nur die Störanteile mit $|f| \leq \frac{f_0}{2}$ zu beachten.

a) Berechnen Sie das SNR mittels der oben genannten Formeln. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Zum Bestimmen des SNR müssen zunächst die spektralen Leistungsdichten bestimmt werden. Dies sind nichts anderes als die Fourier-Transformierten der Autokorrelationsfunktionen und somit:

$$S_{ee}(f) = \int_{\infty}^{\infty} r_{ee}(\tau)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\ \mathrm{d}\tau = \int_{\infty}^{\infty} \delta(\tau)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\ \mathrm{d}\tau.$$

$$S_{uu}(f) = \int_{\infty}^{\infty} r_{uu}(\tau)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\ \mathrm{d}\tau = \int_{\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau f_0)}{\tau\pi}(\tau)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Mit der Symmetrieeigenschaft der Fourier-Transformation sowie der Achsensymmetrie des Dirac-Impulses ergibt sich:

$$r_{ee}(\tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S_{ee}(f) = 1\,.$$

Die Fourier-Transformierte von $r_{uu}(\tau)$ ist gerade die Rechteckfunktion (wieder Symmetrie der Fourier-Transformation und Achsensymmetrie der Bildfunktion):

$$r_{uu}(\tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S_{uu}(f) = r_{f_0}(f)\,.$$

Die mittleren Leistungen ergeben sich zu:

$$P_{ee} = \int_{-\frac{f_0}{2}}^{\frac{f_0}{2}} 1\ \mathrm{d}f = f_0\,.$$

$$P_{uu} = \int_{-\frac{f_0}{2}}^{\frac{f_0}{2}} r_{f_0}(f)\ \mathrm{d}f = f_0\,.$$

Damit ergibt sich das Signal-Rausch-Verhältnis zu: SNR $= 1$. ***(Σ: 5 Punkte)***