

**Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León**

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

**Klausur im Fach
Signale und Systeme
24. Oktober 2014**

Musterlösung

Aufgabe 1: 18

Aufgabe 2: 17

Aufgabe 3: 18

Aufgabe 4: 14

Gesamtpunkte: 67

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale

Gegeben seien die Funktionen $g(t)$ und $h(t)$:

$$g(t) = \cos(2\pi t), \quad h(t) = 2 \operatorname{si}(2\pi t) e^{j2\pi f_0 t}.$$

- a) Berechnen Sie

$$\mathcal{F}\{g(t) \cdot h(t)\}$$

durch Rechnung im Frequenzbereich.

- b) Zeichnen Sie

$$\mathcal{F}\{g(t) \cdot h(t)\} * \mathcal{F}\{4 \sin(2\pi t)\}.$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- c) Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionsgleichung des Dirac-Impulses, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- d) Bestimmen Sie A derart, dass durch die Funktionen Φ_k ,

$$\Phi_k(t) = A e^{j2\pi kt/T}, \quad k \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{R},$$

ein orthonormales Funktionensystem im Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ gegeben ist (Rechnung erforderlich!).

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Bei der Entwicklung unstetiger Funktionen in eine Fourier-Reihe kann es zu ungewollten „Überschwingern“ kommen.

- e) Wie nennt man diese Überschwinger?
f) Wo treten diese auf?
g) Wie verändert sich die Amplitude der Überschwinger durch Erhöhung der Ordnung der Fourier-Reihe?

Lösung

a) Es gilt für die Fourier-Transformierten:

$$g(t) = \cos(2\pi t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \frac{1}{2} (\delta(f+1) + \delta(f-1)), \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

$$h(t) = 2 \operatorname{si}(2\pi t) e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ \rightarrow \bullet \quad r_2(-(f-f_0)) \quad (1 \text{ Punkt})$$

und somit:

$$\mathcal{F}\{g(t) \cdot h(t)\} = \frac{1}{2} (\delta(f+1) + \delta(f-1)) * r_2(-(f-f_0)). \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Mit $f' = -(f-f_0) \leftrightarrow f = -f' + f_0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\delta(-f' + f_0 + 1) + \delta(-f' + f_0 - 1)) * r_2(f') \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-f' + f_0 + 1 - \tau) r_2(\tau) + \delta(-f' + f_0 - 1 - \tau) r_2(\tau) \, d\tau \end{aligned}$$

Erste Lösungsmöglichkeit (Substitution: $\tau' = -\tau$):

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau' - (f-f_0-1)) r_2(-\tau') + \delta(\tau' - (f-f_0+1)) r_2(-\tau') \, d\tau' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau' - (f-f_0-1)) r_2(\tau') + \delta(\tau' - (f-f_0+1)) r_2(\tau') \, d\tau' \\ &= \frac{1}{2} (r_2(f - (f_0+1)) + r_2(f - (f_0-1))). \quad (2 \text{ Punkte}) \end{aligned}$$

Zweite Lösungsmöglichkeit (Symmetrie Dirac-Impuls):

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - (f_0 - f + 1)) r_2(\tau) + \delta(\tau - (f_0 - f - 1)) r_2(\tau) \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} (r_2(f - (f_0+1)) + r_2(f - (f_0-1))). \quad (2 \text{ Punkte}) \end{aligned}$$

Für eine gezeichnete Lösung werden keine Punkte vergeben.

b) Die gesuchten Spektren sind in den Abbildungen L1 und L2 zu sehen.

Die Skizzen in Abbildung L1 sind nicht verlangt und dienen ausschließlich der Anschauung.

c) Die Definitionsgleichung lautet:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \delta(t - t_0) \, dt, \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

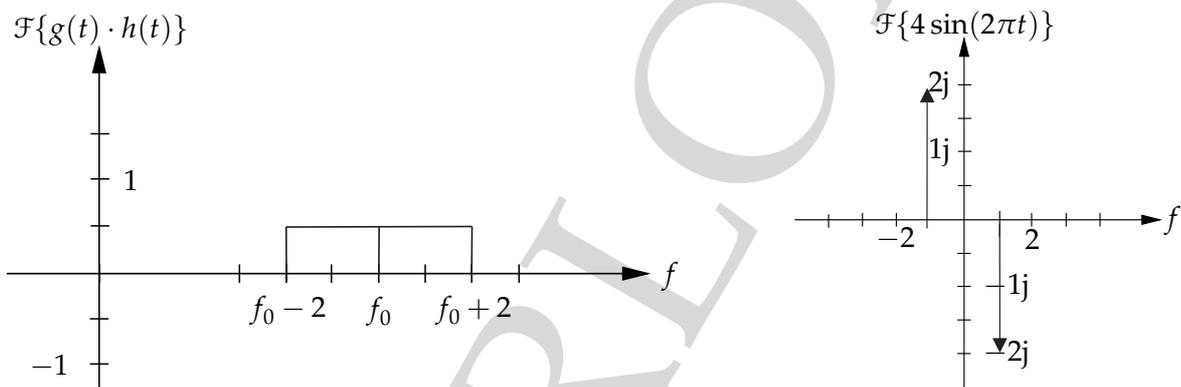


Abbildung L1: Die Funktionen vor der Faltung.

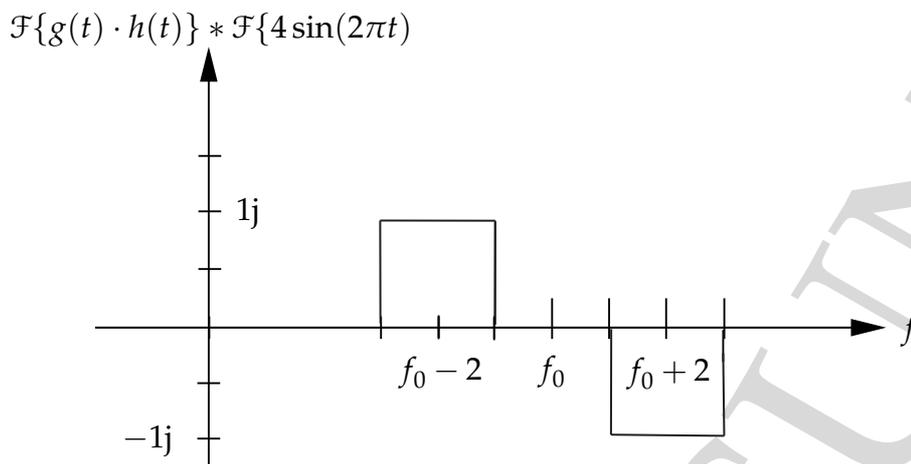


Abbildung L2: $\mathcal{F}\{g(t) \cdot h(t)\} * \mathcal{F}\{4 \sin(2\pi t)\}$.

mit $y(t)$ stetig an der Stelle t_0 .

Mit der Wahl $y(t) = 1$ gilt:

(1 Punkt)

$$1 = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt.$$

(1 Punkt)

Substitution von $t' = t - t_0$ ergibt:

$$1 = \int_{t'=-\infty-t_0}^{\infty-t_0} \delta(t') dt'$$

$$1 = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt.$$

(0,5 Punkte)

d) Für orthonormale Funktionensysteme $\{\phi_i\}_i$ in $[a, b]$ gilt:

$$\langle \phi_{k_1}, \phi_{k_2} \rangle = \int_a^b \phi_{k_1}(t) \cdot \phi_{k_2}^*(t) dt = \delta_{k_1 k_2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k_1 \neq k_2 \\ 1 & \text{für } k_1 = k_2 \end{cases}$$

(0,5 Punkte)

und somit:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{k_1}, \Phi_{k_2} \rangle &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{j2\pi k_1 \frac{t}{T}} \cdot A e^{-j2\pi k_2 \frac{t}{T}} dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 e^{j2\pi \frac{t}{T} (k_1 - k_2)} dt. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Für $k_1 \neq k_2$:

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{k_1}, \Phi_{k_2} \rangle &= \frac{A^2 T}{j 2\pi(k_1 - k_2)} \cdot \left[e^{j 2\pi(k_1 - k_2) \frac{t}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A^2 T}{j 2\pi(k_1 - k_2)} \cdot \left[e^{j \pi(k_1 - k_2)} - e^{-j \pi(k_1 - k_2)} \right].\end{aligned}\quad (1 \text{ Punkt})$$

Es folgt für das Integral im Fall $k_1 \neq k_2$:

$$\int_a^b \Phi_{k_1}(t) \cdot \Phi_{k_2}^*(t) dt = A^2 T \frac{\sin(\pi(k_1 - k_2))}{\pi(k_1 - k_2)} = 0 \quad (1 \text{ Punkt})$$

Für $k_1 = k_2$ folgt:

$$\langle \Phi_{k_1}, \Phi_{k_2} \rangle = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^0 dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T = 1 \quad (1 \text{ Punkt})$$

Damit ergibt sich

$$A = \frac{1}{\sqrt{T}}. \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Somit ist $\Phi_k(t)$ für $A = \frac{1}{\sqrt{T}}$ ein orthonormales Funktionensystem für $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\langle \Phi_{k_1}, \Phi_{k_2} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k_1 \neq k_2 \\ 1 & \text{für } k_1 = k_2 \end{cases}.$$

Die alleinige Angabe des Ergebnisses ist nicht ausreichend für die volle Punktzahl und wird mit 0,5 Punkten bewertet.

- e) Man nennt diese Überschwinger Gibbs'sche Überschwinger. (0,5 Punkte)
- f) Sie treten an Unstetigkeitsstellen auf. (0,5 Punkte)
- g) Die Amplitude der Überschwinger bleibt gleich. Eine Verbesserung der Approximation einer Funktion durch die Fourier-Reihe ist an den Sprungstellen durch Erhöhung der Ordnung der Fourier-Reihe nicht möglich. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme

Gegeben sei das in der folgenden Abbildung gegebene System.

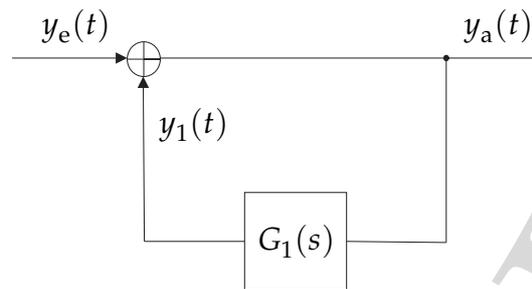


Abbildung 1: System mit Rückführung.

Hier stellen $y_e(t)$ das Eingangssignal, $y_a(t)$ das Ausgangssignal und $y_1(t)$ das rückgeführte Signal dar.

- a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y_a(s)}{Y_e(s)}$$

in Abhängigkeit des unbekanntes Übertragungsglieds $G_1(s)$.

- b) Das System wird nun mit

$$y_e(t) = \sigma(t)$$

angeregt. Am Ausgang wird

$$y_a(t) = e^{-t}$$

für $t \geq 0$ gemessen. Berechnen Sie $G_1(s)$.

- c) Prüfen Sie Ihr Ergebnis für $G_1(s)$ durch Rechnung im **Zeitbereich**, indem Sie zunächst $y_1(t)$ berechnen und ihr Ergebnis mit

$$y_a(t) = y_e(t) + y_1(t)$$

vergleichen.

- d) Das System wird nun mit dem Signal

$$y_2(t) = \cos(t) + \sin(t), \quad t > 0,$$

angeregt. Berechnen und skizzieren Sie die Systemantwort $y_a(t)$.

- e) Ist das Gesamtsystem stabil?

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei die folgende Funktion im Laplace-Bereich:

$$Y(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right).$$

- f) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte $y(t)$. Nutzen Sie die Beziehung $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$ und die Differentiationsregel der Laplace-Transformation.
- g) Kann es sich bei $Y(s)$ um die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems handeln? (Begründung!)

Lösung

a) Es ergibt sich:

$$y_1(t) = g_1(t) * y_a(t) \quad \circ \bullet \quad Y_1(s) = G_1(s)Y_a(s)$$

$$y_a(t) = y_e(t) + y_1(t) \quad \circ \bullet \quad Y_a(s) = Y_e(s) + Y_1(s)$$

$$Y_a(s) = Y_e(s) + Y_1(s) = Y_e(s) + G_1(s)Y_a(s) \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$G(s) = \frac{Y_a(s)}{Y_e(s)} = \frac{1}{1 - G_1(s)} \quad (1 \text{ Punkt})$$

b) Für die Laplace-Transformierten der Signale gilt:

$$y_a(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{1+s} \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

$$y_e(t) = \sigma(t) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{s} \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{1+s} s = \frac{1}{1 - G_1(s)} \Rightarrow 1 - G_1(s) = \frac{1+s}{s} \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$G_1(s) = -\frac{1}{s} \quad (1 \text{ Punkt})$$

c) Mit $g_1(t) = -\sigma(t)$ ergibt sich:

$$y_1(t) = y_a(t) - y_e(t), \quad (L1)$$

$$y_1(t) = y_a(t) * g_1(t). \quad (L2)$$

(je 0,5 Punkte)

Da $y_a(t) = 0$ für $t < 0$ ist, lässt sich Gleichung (L2) mit $g_1(t) = -\sigma(t)$ schreiben als:

$$y_1(t) = e^{-t} \sigma(t) * (-1)\sigma(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \sigma(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$= - \int_0^t e^{-\tau} d\tau = e^{-t} - 1. \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Eingesetzt in Gleichung (L1) ergibt sich somit für $t \geq 0$:

$$y_1(t) = e^{-t} \sigma(t) - \sigma(t) = e^{-t} - 1 = y_a(t) - y_e(t). \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

d) Mit

$$G_1(s) = -\frac{1}{s}$$

gilt für die Gesamtübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{s}{s+1}. \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Mit der Laplace-Transformierten des Eingangssignals laut Korrespondenztabelle

$$Y_2(s) = \mathcal{L}\{\cos(t) + \sin(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

ergibt sich der Ausgang zu

$$Y_a(s) = Y_2(s)G(s) = \frac{s}{s+1} \frac{s+1}{s^2+1} \circ \bullet \cos(t)\sigma(t). \quad (1 \text{ Punkt})$$

Abbildung L3 zeigt das Ausgangssignal.

(1 Punkt)

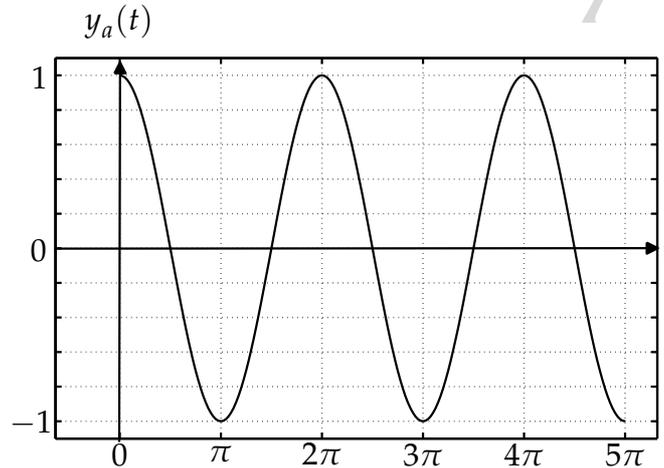


Abbildung L3: Darstellung des Ausgangssignals $\cos(t)$ bis $t = 5\pi$.

e) Das System ist stabil, da der Realteil der Polstelle der Übertragungsfunktion negativ ist. (1 Punkt)

f) Für die Differentiation der Bildfunktion gilt

$$-ty(t) \circ \bullet \frac{d}{ds} Y(s). \quad (1 \text{ Punkt})$$

Mit dem Hinweis ergibt sich

$$\frac{d}{ds} \ln \left(\frac{s+2}{s+1} \right) = \frac{s+1}{s+2} \frac{s+1 - (s+2)}{(s+1)^2} \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$= \frac{-1}{(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

$$\circ \bullet (e^{-2t} - e^{-t})\sigma(t). \quad (1 \text{ Punkt})$$

Für die Zeitfunktion erhält man also

$$y(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \sigma(t). \quad (1 \text{ Punkt})$$

g) Bei einem LTI-System lässt sich die Übertragungsfunktionen als gebrochen rationaler Bruch darstellen. Dies ist hier nicht gegeben. Es handelt sich also um kein LTI-System.

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale

Gegeben sei ein reelles Signal $y(t)$, dessen Spektrum mit der Bandbreite B in Abbildung 2 gezeigt ist.

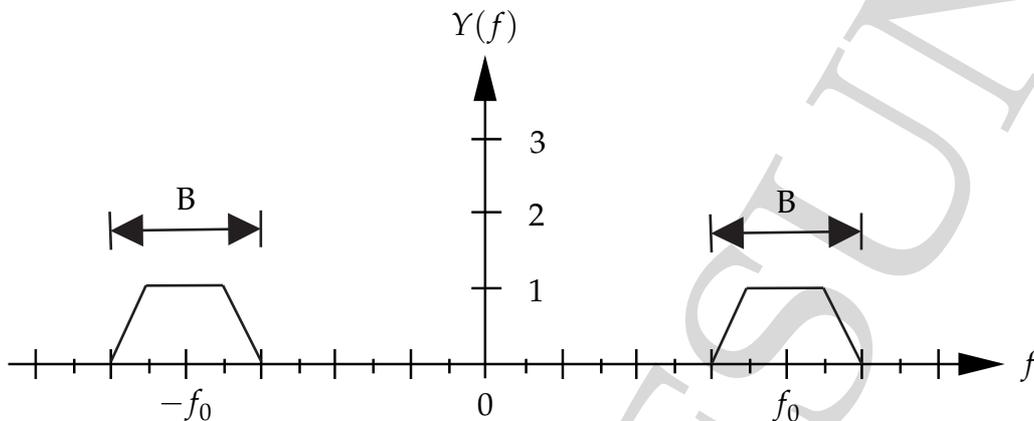


Abbildung 2: Spektrum $Y(f)$.

Weiterhin gilt: $Y(f) = 0$ für $2|f - f_0| \geq B$, $Y(f) = 0$ für $2|f + f_0| \geq B$.

- a) Wie muss man $y(t)$ abtasten, um laut Abtasttheorem eine fehlerfreie Rekonstruktion bei der Digital-Analog-Umsetzung zu gewährleisten?

Ihnen steht ein Analog-Digital-Umsetzer zur Verfügung, dessen maximale Abtastfrequenz $f_{A,\max} = f_0$ beträgt.

- b) Welches Verfahren können Sie anwenden, um $y(t)$ ohne Bandüberlappungsfehler abtasten zu können?
- c) Bestimmen Sie die kleinste Abtastfrequenz f_A , indem Sie das Signal $y(t)$ entsprechend Aufgabenteil b) abtasten, sodass kein Aliasing entsteht. Skizzieren Sie das Spektrum $Y^*(f)$ des so abgetasteten Signals.

Ihr Nutzsignal $y(t)$ wird nun mit dem reellen Störsignal $s(t)$ additiv überlagert, dessen Spektrum in Abbildung 3 zu sehen ist.

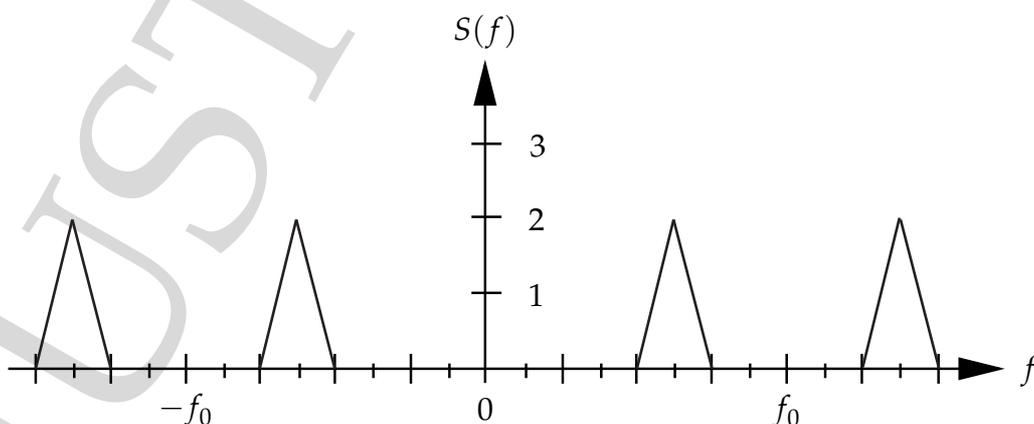


Abbildung 3: Spektrum des Störsignals $s(t)$.

- d) Wie müssen Sie die Abtastfrequenz nun minimal wählen, damit eine fehlerfreie Rekonstruktion des Nutzsignals $y(t)$ möglich ist?

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Es sei $y(t) = r_{t_g}(t)$ eine Fensterfunktion, dessen abgetastetes Signal durch

$$y_*(t) = y(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_A)$$

gegeben ist. Hier bezeichnet r die Rechteckfunktion.

- e) Bestimmen Sie die Wertefolge $y(nt_A) = y_*(t)$ des abgetasteten Signals für $t_A = \frac{1}{4}t_g$.

Nun soll das Zeitsignal $\hat{y}(t)$ aus $y_*(t)$ mit Hilfe eines Interpolationsfilters mit der Übertragungsfunktion

$$G(f) = T \text{sinc}^2(\pi f T)$$

mit $T = \frac{1}{4}t_g$ rekonstruiert werden.

- f) Berechnen Sie das rekonstruierte Signal $\hat{y}(t)$ durch Rechnung im Zeitbereich und skizzieren Sie das Ergebnis.
- g) Beschreiben Sie die Eigenschaften des Filters hinsichtlich der Rekonstruktion von abgetasteten Signalen
- bei genauer Einhaltung des Abtasttheorems.
 - bei Überabtastung.

Lösung

- a) Laut Abtasttheorem muss die Abtastfrequenz größer als die maximale im Spektrum vorkommenden Frequenz sein (0,5 Punkte). Daraus ergibt sich mit $Y(f) = 0$ für $2|f - f_0| \geq B$:

$$f_A \geq 2 \left(f_0 + \frac{B}{2} \right). \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

- b) Ein Bandpasssignal mit dem Frequenzband B um die Mittenfrequenz f_0 kann durch Einhaltung bestimmter Bedingungen ohne Einhaltung des Abtasttheorems abgetastet werden, ohne, dass es zu Aliasingeffekten (Bandüberlappungsfehler) im Spektrum des Signals kommt. Dieses Verfahren nennt man Unterabtastung. (1 Punkt)

- c) Da es sich um ein symmetrisches Bandspektrum handelt, wählt man als projizierte Mittenfrequenz $f = 0$. Damit ergibt sich für den Faktor r der Unterabtastung:

$$\begin{aligned} f_0 &= r f_A \\ f_A &= \frac{f_0}{r}. \end{aligned} \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Als Randbedingung muss außerdem gelten, da es sonst sicher zu Aliasing kommt:

$$f_{A,\min} \geq B \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

und somit:

$$f_A = \frac{f_0}{2} \geq B. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Abbildung L4 zeigt das mit $r = 2$ unterabgetastete Signal.

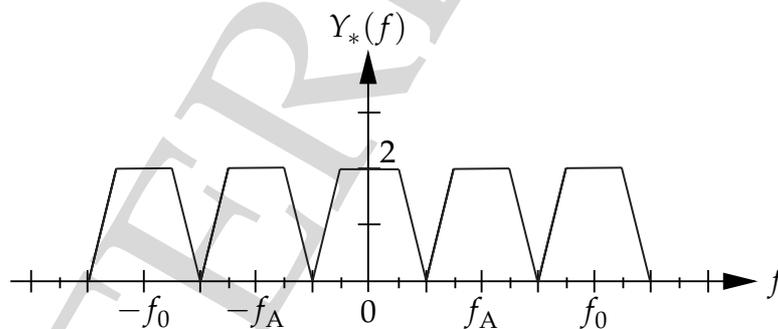


Abbildung L4: Spektrum des unterabgetasteten Signals $Y_*(f)$.

(2 Punkte)

- d) Um das Nutzsignal fehlerfrei rekonstruieren zu können, darf es nicht zu Überlappungen der Spektren $S(f)$ und $Y(f)$ kommen. Mit dem neuen Frequenzband, das sich additiv aus den Frequenzbändern der Signale $y(t)$ und $s(t)$ zusammensetzt, ergibt sich (siehe Skizze Aufgabenstellung):

$$f_{A,\min} \geq B' = 2B \quad (1 \text{ Punkt})$$

und somit:

$$f_A = \frac{f_0}{1} \geq B'. \quad (1 \text{ Punkt})$$

e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
 y_*(t) &= r_{t_g}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_A) && (0,5 \text{ Punkte}) \\
 &= r_{t_g}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n \frac{t_g}{4}\right) \\
 &= \delta\left(t - \frac{t_g}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{t_g}{4}\right) + \delta(t) + \delta\left(t - \left(-\frac{t_g}{4}\right)\right) + \delta\left(t - \left(-\frac{t_g}{2}\right)\right). && (0,5 \text{ Punkte})
 \end{aligned}$$

Als Folge:

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1 \text{ Punkt})$$

f) Die Rekonstruktion im Zeitbereich ergibt sich als Faltung des abgetasteten Signals mit der Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters:

$$\hat{y}(t) = y_*(t) * g(t). \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Die Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters ergibt sich als Fourier-Rücktransformierte von $G(f)$:

$$g(t) \circ \bullet G(f) \quad (1 \text{ Punkt})$$

und somit

$$g(t) = d_{2T}(t).$$

Hier bezeichnet $d_{2T}(t)$ die Dreiecksfunktion. Mit $T = \frac{1}{4}t_g$ (Aufgabenstellung) ergibt sich:

$$d_{2T}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{t_g} & \text{für } t \in \left[-\frac{t_g}{4}, 0\right] \\ 1 - \frac{4t}{t_g} & \text{für } t \in \left[0, \frac{t_g}{4}\right] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich:

$$\hat{y}(t) = g(t) * y_*(t) \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

$$= d_{2T}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) \delta(t - nt_A) \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$= d_{2T}(t) * \sum_{n=-2}^2 \delta(t - nt_A)$$

$$= d_{2T}(t - 2t_A) + d_{2T}(t - t_A) + d_{2T}(t) + d_{2T}(t - t_A) + d_{2T}(t + 2t_A) \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$= d_{2T}\left(t + \frac{t_g}{2}\right) + d_{2T}\left(t + \frac{t_g}{4}\right) + d_{2T}(t) + d_{2T}\left(t - \frac{t_g}{4}\right) + d_{2T}\left(t - \frac{t_g}{2}\right).$$

Abbildung L5 visualisiert das Ergebnis. Es ist deutlich zu erkennen, dass das ursprüngliche Signal nicht fehlerfrei rekonstruiert wird. (2 Punkte)

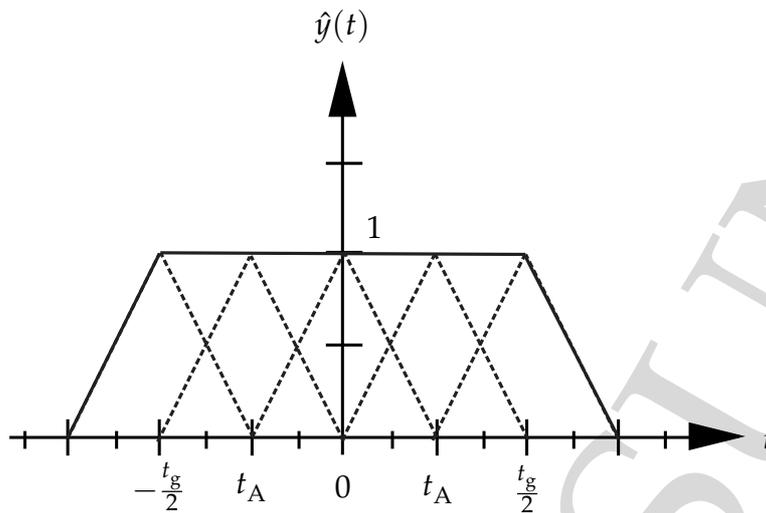


Abbildung L5: Rekonstruiertes Signal $\hat{y}(t)$.

- g) Das ideale Rekonstruktionsfilter wäre eine Rechteckfunktion.
- Da die si-Funktion Frequenzanteile außerhalb des Nyquistbandes besitzt, kommt es zum Bandüberlappungsfehler (Aliasing) bei der Rekonstruktion.
 - Durch Überabtastung lässt sich aufgrund der schnell abnehmenden Amplitude der si-Funktion dennoch eine gute Rekonstruktion erzielen, da die periodischen Wiederholungen des Spektrums zur Rekonstruktion nur stark gedämpft beitragen.

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme

In Bild 4 ist ein zeitdiskretes System gegeben.

- Geben Sie eine Differenzgleichung in x_n und y_n zur Beschreibung dieses Systems an. *Hinweis:* Ermitteln Sie dazu zuerst einen Zusammenhang zwischen x_n und \tilde{x}_n sowie \tilde{x}_n und y_n .
- Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ des Systems?
- Berechnen Sie Pole z_∞ und Nullstellen z_0 von $G(z)$ und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm.
- Berechnen Sie die Impulsantwort g_n . Stellen Sie das Ergebnis mit Hilfe einer gedämpften Cosinusschwingung dar und skizzieren Sie g_n für $-2 \leq n \leq 10$.
- Ist das System $G(z)$ stabil? Ist es kausal? (Begründung)

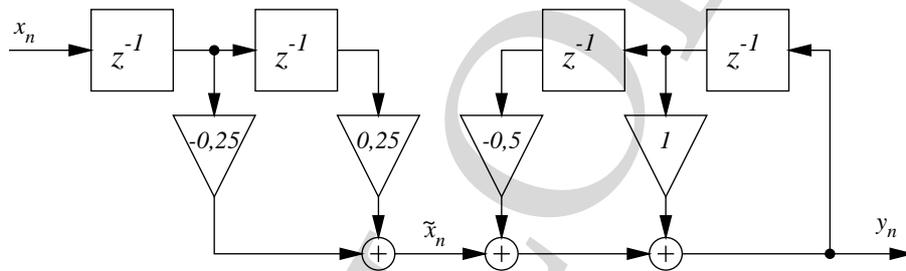


Abbildung 4: Zeitdiskretes System.

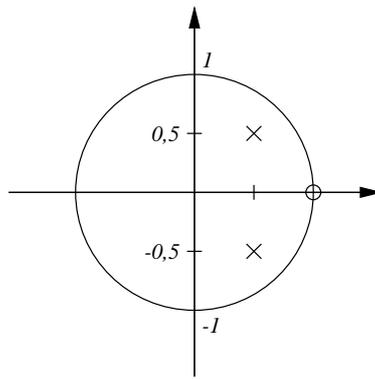


Abbildung L6: Pol-Nullstellen-Diagramm

Lösung

- a) Aus dem Signalflussgraph folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n &= 0,25 \cdot x_{n-2} - 0,25 \cdot x_{n-1} \\ y_n &= y_{n-1} - 0,5 \cdot y_{n-2} + \tilde{x}_n \\ \Rightarrow y_n &= y_{n-1} - 0,5 \cdot y_{n-2} + 0,25 \cdot x_{n-2} - 0,25 \cdot x_{n-1}\end{aligned}$$

- b) Durch z-Transformation erhält man die Übertragungsfunktion.

$$\begin{aligned}Y(z) &= z^{-1} \cdot Y(z) - 0,5z^{-2} \cdot Y(z) + 0,25z^{-2} \cdot X(z) - 0,25z^{-1} \cdot X(z) \\ Y(z) [1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}] &= X(z) [0,25z^{-2} - 0,25z^{-1}] \\ G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= -\frac{1}{4} \frac{z-1}{z^2 - z + 0,5}\end{aligned}$$

- c) Aus der Übertragungsfunktion lassen sich die Pole und Nullstellen berechnen.

$$\begin{aligned}z_\infty &= \frac{1}{2}(1 \pm j) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \\ z_0 &= 1\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich das Pol-Nullstellen-Diagramm in Bild L6.

- d) Die Übertragungsfunktion wird mittels Partialbruchzerlegung in zwei Einzelbrüche zerlegt.

$$\begin{aligned}G(z) &= -\frac{1}{4} \left[\frac{A}{z - \frac{1}{2}(1+j)} + \frac{B}{z - \frac{1}{2}(1-j)} \right] \\ \Rightarrow A \cdot \left(z - \frac{1}{2}(1-j) \right) + B \cdot \left(z - \frac{1}{2}(1+j) \right) &\stackrel{!}{=} z - 1 \\ \Rightarrow A = \frac{1}{2}(1+j) \quad B = \frac{1}{2}(1-j) \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j \frac{\pi}{4}}}{z - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j \frac{\pi}{4}}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\pi}{4}}}{z - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\pi}{4}}} \right]\end{aligned}$$

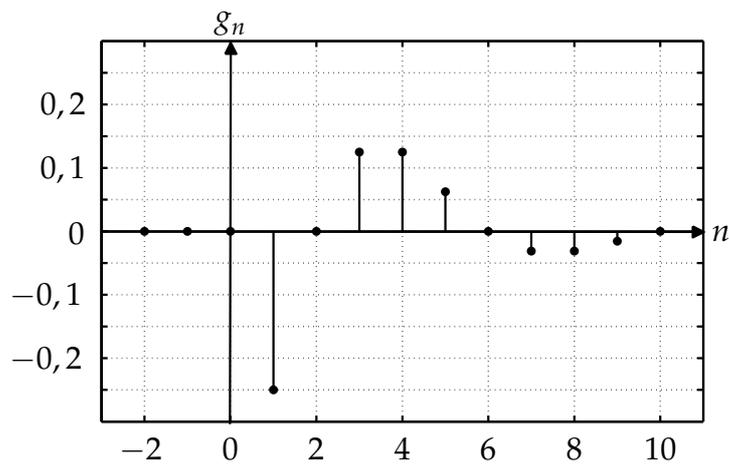


Abbildung L7: Impulsantwort

Hieraus lässt sich dann die Impulsantwort ermitteln.

$$\begin{aligned}
 g_n &= -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \right)^n \right] \cdot \sigma_{n-1} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left[e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right] \cdot \sigma_{n-1} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cos \left(\frac{\pi}{4}n \right) \cdot \sigma_{n-1}
 \end{aligned}$$

- e) Das System ist stabil, da beide Pole im Einheitskreis liegen. Das System ist kausal, da der Ausgangswert nur von zeitlich zurückliegenden Eingangswerten abhängt.