Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
19. Juni 2015

Musterlösung

Aufgabe 1: 13
Aufgabe 2: 25
Aufgabe 3: 10
Aufgabe 4: 20

Gesamtpunkte: 68

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale

Gegeben sei das in Abbildung 1 skizzierte periodische Signal $y(t)$. Das Signal hat die Periodendauer T_0.

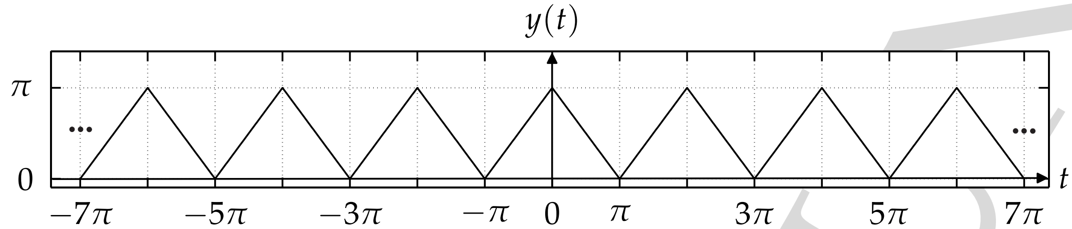

Abbildung 1: Periodisches Signal $y(t)$.

a) Geben Sie den Gleichanteil des Signals $y(t)$ an. (Rechnung!)

b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k des Signals $y(t)$.

Hinweis:

$$\int t\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t\sin(nt)}{n}$$

c) Skizzieren Sie die Koeffizienten der Fourier-Koeffizienten für $k = \{0, 1, 2, 3\}$. Beschriften Sie die Achsen!

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Es seien nun a_k und b_k die zum Signal $y(t)$ aus Abbildung 1 gehörenden Fourier-Koeffizienten. Ein neues Signal $x(t) = y\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$ soll nun mit Hilfe der Fourier-Reihe approximiert werden.

d) Wie lauten die Koeffizienten a_k' und b_k' von $x(t)$ in Abhängigkeit von a_k und b_k?

Lösung

a) Die Funktion $y(t)$ lässt sich wie folgt als Fourier-Reihe darstellen:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \right].$$

Für die Koeffizienten der Fourier-Reihe gilt:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \, \mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \, \mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Mit $T_0 = 2\pi$ erhält man den Fourier-Koeffizienten des Signals für $k = 0$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (t + \pi) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (-t + \pi) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} + t\pi \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t^2}{2} + t\pi \right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[0 - \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2 \right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Gleichanteil zu $\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$.

b) Da $y(t)$ eine gerade Funktion ist, ergibt sich $b_k = 0$ für $k = \{1, 2, 3, ...\}$. Die Koeffizienten a_k für $k = \{1, 2, 3, ...\}$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (t + \pi) \cos\left(2\pi \frac{k}{2\pi} t\right) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (-t + \pi) \cos\left(2\pi \frac{k}{2\pi} t\right) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} t \cos(kt) \, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} \cos(kt) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \cos(kt) \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} \cos(kt) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\cos(kt)}{k^2} + \frac{t \sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} + \frac{t \sin(kt)}{k} \right]_{0}^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{k^2} + 0 \right] - \left[\frac{(-1)^k}{k^2} + 0 \right] - \left(\left[\frac{(-1)^k}{k^2} + 0 \right] - \left[\frac{1}{k^2} + 0 \right] \right) \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \left(1 - (-1)^k \right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} & , k \text{ ungerade} \\ 0 & , k \text{ gerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

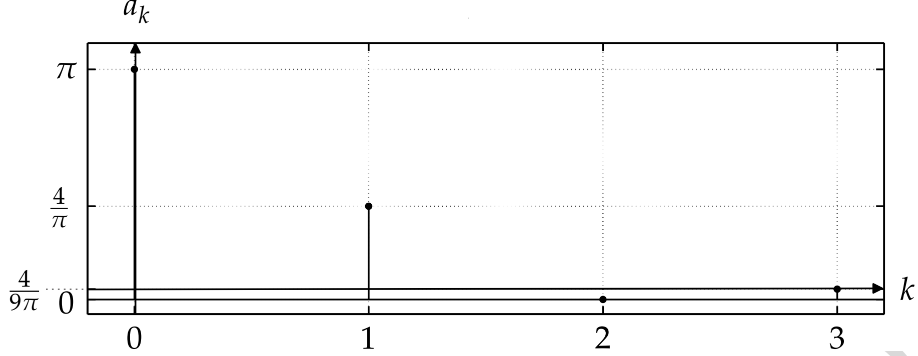

Abbildung L1: Die Fourier-Koeffizienten a_k für $k = \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Abbildung L1 zeigt die Fourier-Koeffizienten a_k für $k = \{0, 1, 2, 3\}$ des Signals $y(t)$.

d) Da das periodische Signal $x(t)$ wiederum eine gerade Funktion ist, verschwinden die Koeffizienten b'_k. Für a'_k gilt:

$$a'_k = \frac{2}{T_0} \int\limits_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(kt) \ \mathrm{d}t = \frac{2}{T_0} \int\limits_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \cos(kt) \ \mathrm{d}t \, .$$

Mit der Substitution $t' = t - \frac{T_0}{2}$ ergibt sich:

$$= \frac{2}{T_0} \int\limits_{t'=-T_0}^{0} y\left(t'\right) \cos\left(k\left(t' + \frac{T_0}{2}\right)\right) \ \mathrm{d}t' \, .$$

Aufgrund der Periodizität des Signals kann das Intervall, über welches Integriert wird, beliebig gewählt werden, solange es einer ganzen Periode $T_0 = 2\pi$ entspricht:

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{t'=-\pi}^{\pi} y\left(t'\right) \cos\left(k\left(t' + \pi\right)\right) \ \mathrm{d}t'$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{t'=-\pi}^{\pi} y\left(t'\right) \cos\left(kt'\right) \ \mathrm{d}t' = (-1)\, a_k \, .$$

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme

Durch die Differentialgleichungen (1)–(4) seien vier zeitkontinuierliche Systeme gegeben. Der Ausgang sei mit $y(t)$ und der Eingang mit $u(t)$ bezeichnet.

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 10 + u(t) \tag{1}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = 2y^2(t) + u(t) \tag{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + \cos\left(u(t)\right) \tag{3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) \tag{4}$$

a) Welche der Systeme (1)–(4) stellen ein lineares System dar? (Begründung!)

Die folgende Teilaufgabe ist von der vorhergehenden unabhängig.
Gegeben sei das kausale System S_1 durch die Differentialgleichung

$$0 = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + u(t)\,.$$

Hier bezeichnet $y(t)$ das Ausgangssignal und $u(t)$ das Eingangssignal.

b) Wie lautet die Sprungantwort des Systems S_1?

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.
Gegeben sei das kausale LTI-System S_2 durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)\,.$$

c) Überprüfen Sie die Stabilität des Systems S_2, indem Sie zunächst die Übertragungsfunktion bestimmen. Ist das System S_2 stabil?

d) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems S_2.

e) Überprüfen Sie die Stabilität des Systems S_2 im Zeitbereich.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.
Gegeben sei das System S, dessen Blockschaltbild in Abbildung 2 dargestellt ist. Hier sei $y_\mathrm{e}(t)$ das Eingangssignal und $y_\mathrm{a}(t)$ das Ausgangssignal. Die Faktoren $\{a, b, c, d, e, f\} \in \mathbb{R}$ stellen Verstärkungen dar.

f) Welcher Ordnung entspricht eine DGL, welche das System S beschreibt, **höchstens**? (Begründung!)

g) Stellt das System ein AR-Filter dar? (Begründung!)

h) Stellen Sie das System S in ARMA-Struktur dar.

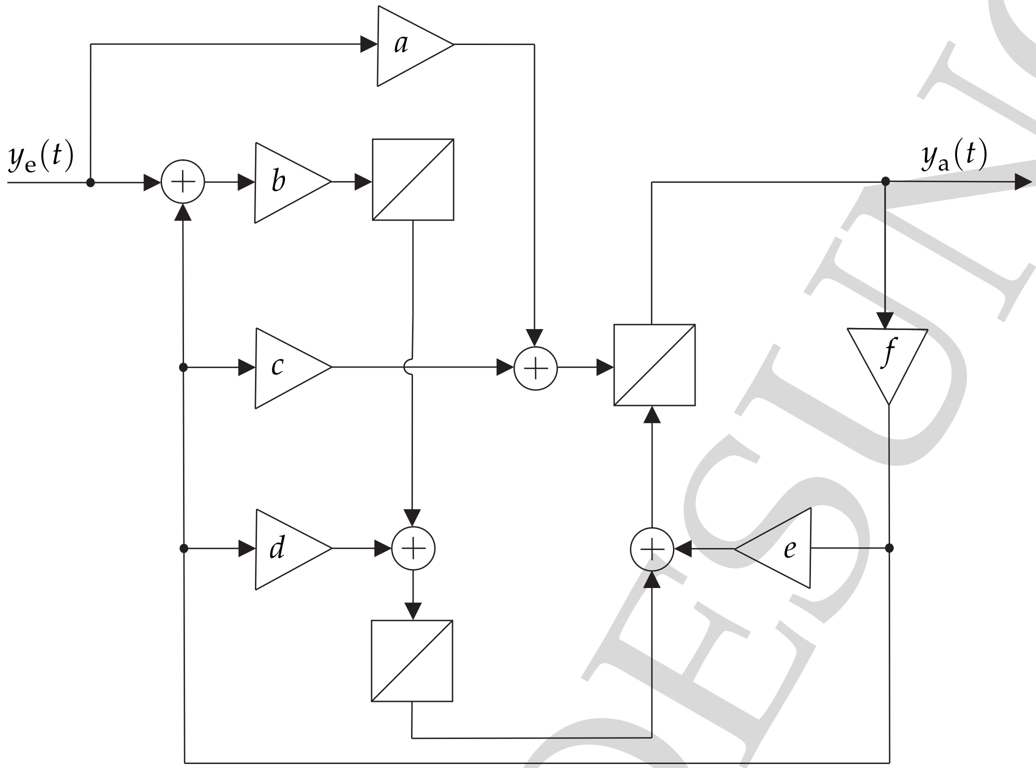

Abbildung 2: Kontinuierliches System S.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.
Gegeben sei die Impulsantwort $g(t)$ eines LTI-Systems S:

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(-4t^2 + 8t\right) .$$

i) Bestimmen Sie die Sprungantwort.

Hinweis:

$$\int t\ \mathrm{e}^{at}\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{at}}{a^2}\,(at-1)$$

$$\int t^n\ \mathrm{e}^{at}\ \mathrm{d}t = \frac{t^n\ \mathrm{e}^{at}}{a} - \frac{n}{a}\int t^{n-1}\ \mathrm{e}^{at}\ \mathrm{d}t \quad .$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.
Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines LTI-Systems S:

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

j) Zeigen Sie durch Rechnung im Bildbereich, dass S ein reellwertiges System ist.

Lösung

a) Die Systeme (1)–(3) sind nicht linear:
System (1) hat eine additive Konstante.
In System (2) wird der Ausgang quadriert.
Der Term $\cos(u(t))$ in System (3) ist nicht linear.

Der Diffentialoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ist linear. Damit ist System (4) ein lineares System.

b) Einsetzen ergibt:

$$0 = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \sigma(t)\,.$$

Durch Integration ergibt sich schließlich das Ausgangssignal

$$\begin{aligned} y(t) &= -\int_0^t \sigma(t)\;\mathrm{d}t \\ y(t) &= -\,t\,\sigma(t)\,. \end{aligned}$$

c) Die Laplace-Transformierte des Systems S_2 lautet:

$$\begin{aligned} Y(s) + sY(s) + s^2Y(s) &= U(s) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{1+s+s^2}\,. \end{aligned}$$

Die Polstellen von $G(s)$ ergeben sich zu:

$$s_{\infty_{1,2}} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{3}{4}}\,.$$

Da der Realteil beider komplexer Polstellen kleiner als null ist, ist das System S_2 stabil.

d) Die Impulsantwort erhält man durch Laplace-Rücktransformation von $G(s)$ mit Hilfe der Korrespondenztabelle. Es gilt:

$$G(s) = \frac{1}{1+s+s^2}\,.$$

Weiterhin lässt sich mit $\delta = \frac{1}{2}$ und $\omega = \sqrt{\frac{3}{4}}$ schreiben:

$$G(s) = \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{\delta^2+\omega^2+2\delta s+s^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2+2\frac{1}{2}s+s^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{1+s+s^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$g(t) = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)\sigma(t) = \sqrt{\frac{4}{3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)\sigma(t)\,.$$

e) Für Stabilität im Zeitbereich muss die Impulsantwort absolut integrierbar sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, \mathrm{d}t \overset{!}{<} \infty \,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{\frac{4}{3}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}} t\right) \sigma(t) \right| \, \mathrm{d}t < \int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{4}{3}} \left| \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \right| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{4}{3}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} (-2) \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^{\infty} = \frac{4}{\sqrt{3}} < \infty \,.$$

Das System S_2 ist absolut integrierbar und somit stabil.

f) Da das System S in Abbildung 2 drei Integratoren beinhaltet, kann die maximale Ordnung der DGL, die das System beschreibt, drei sein.

g) Es handelt es sich nicht um ein AR-Filter, da das Ausgangssignal vom Eingangssignal und integrierten Eingangssignalen abhängt.

h) Es ergibt sich für die Integralgleichung ohne Beachtung mathematisch exakter Notation (nicht verlangt):

$$y_\mathrm{a} = f\,c \int y_\mathrm{a} + f\,e \int y_\mathrm{a} + a \int y_\mathrm{e} + f\,d \int\int y_\mathrm{a} + b \int\int\int y_\mathrm{e} + b\,f \int\int\int y_\mathrm{a} \,.$$

Abbildung L2 zeigt das System S in ARMA-Struktur.

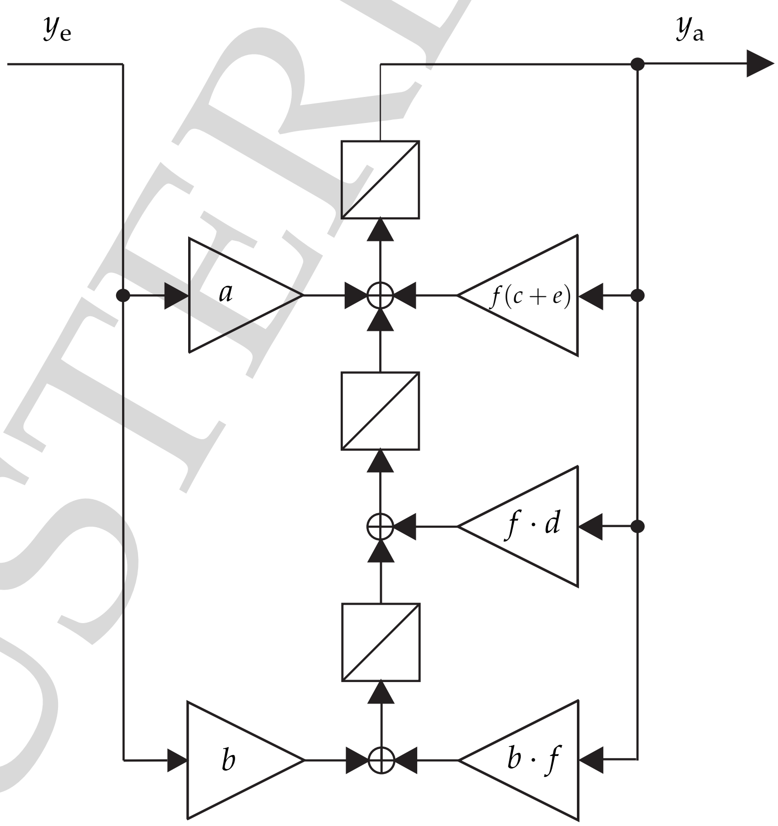

Abbildung L2: Kontinuierliches System S in ARMA-Struktur.

i) Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(-4t^2+8t\right) \\
&\;\bullet\!\!-\!\!\circ \\
G(s) &= -8\frac{1}{(s+1)^3}+8\frac{1}{(s+1)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Mit der Laplace-Transformierten der Sprungantwort $H(s)$ sowie $sH(s) = G(s)$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{8}{s}\frac{-1+s+1}{(s+1)^3} = 8\frac{1}{(s+1)^2} \\
&\;\bullet\!\!-\!\!\circ \\
h(t) &= 4t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,.
\end{aligned}
$$

Alternativ erhält man durch Rechnung im Zeitbereich:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= g(t) * \sigma(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\left(-4\tau^2+8\tau\right)\sigma(\tau)\sigma(t-\tau)\;\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\tau}\left(-4\tau^2+8\tau\right)\;\mathrm{d}\tau \\
&= \left[-4\left(-\tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau}+2\,\mathrm{e}^{-\tau}(-\tau-1)\right)+8\,\mathrm{e}^{-\tau}(-\tau-1)\right]_0^t \\
&= \left[4\tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau}\right]_0^t = 4t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,.
\end{aligned}
$$

j) Für ein reellwertiges System muss gelten:

$$G^*(s) = G(s^*)$$

Mit $s = \delta + \mathrm{j}\omega$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
G^*(\delta+\mathrm{j}\omega) &= \left(\frac{1}{1+\delta+\mathrm{j}\omega}\right)^* \\
&= \left(\frac{1+\delta-\mathrm{j}\omega}{(1+\delta+\mathrm{j}\omega)(1+\delta-\mathrm{j}\omega)}\right)^* \\
&= \frac{1}{1+\delta-\mathrm{j}\omega}\,.
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt:

$$G\left((\delta+\mathrm{j}\omega)^*\right) = \frac{1}{1+\delta-\mathrm{j}\omega}\,.$$

Somit ist gezeigt, dass S ein reellwertiges System ist.

Alternativ lässt sich auch der Zusammenhang

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

nutzen, um auf das Ergebnis zu kommen. Hier stellen z_1 und z_2 beliebige komplexe Zahlen dar.

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale

Gegeben sei ein bandbegrenztes Signal $y(t)$ mit der Mittenfrequenz f_0, dessen Betragsspektrum in Abbildung 3 skizziert ist.

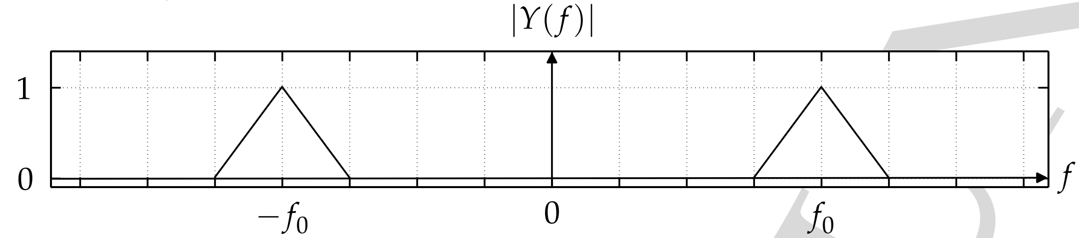

Abbildung 3: Skizze des Betragsspektrums $|Y(f)|$ des bandbegrenzten Signals $y(t)$.

Es gelte für die Mittenfrequenz $f_0 = 60\,\text{MHz}$ und weiterhin gelte $Y(f) = 0$ für $|f - f_0| \geq \text{B}$ und $f > 0$ sowie für $|f + f_0| \geq \text{B}$ und $f < 0$ mit $\text{B} = 15\,\text{MHz}$.

a) Wie lautet der Name der Bedingung, welche bei der Aufnahme von $y(t)$ durch einen Analog-Digital-Umsetzer erfüllt sein muss, sodass bei der Digital-Analog-Umsetzung eine fehlerfreie Rekonstruktion des Signals sicher gewährleistet ist?

Ihnen steht nun ein Analog-Digital-Umsetzer mit einer maximalen Abtastfrequenz von $f_{\text{A,max}} = 75\,\text{MHz}$ zur Verfügung.

b) Wie gehen Sie vor, um das Spektrum $Y_*(f)$ des abgetasteten Signals $y_*(t)$ zu erhalten? Wie lautet die **minimale** Frequenz, mit welcher Sie das Signal $y(t)$ abtasten können? Gehen Sie dabei von einem symmetrischen Bandspektrum von $y(t)$ aus. (Rechnung!)

c) Warum darf alleine anhand von Abbildung 3 nicht von einem symmetrischen Bandspektrum ausgegangen werden? (Begründung!)

Um das Signal $y(t)$ fehlerfrei aus dem abgetasteten Spektrum $Y_*(f)$ zu rekonstruieren, wollen Sie nun einen idealen Tiefpass als Rekonstruktionsfilter nutzen.

d) Welche Bandbreite müssen Sie für das Filter wählen, um unerwünschte Frequenzanteile zu unterdrücken? (Begründung!)

e) Geben Sie die **Impulsantwort** des von Ihnen verwendeten idealen Tiefpassfilters analytisch an.

f) Handelt es sich um ein kausales Filter? (Begründung!)

Lösung

a) Das Abtasttheorem muss erfüllt sein.

b) Da der Analog-Digital-Umsetzer maximal mit einer Frequenz von 75 MHz abtasten kann und laut Abtasttheorem $f_{\mathrm{A,min}} = 150\,\mathrm{MHz}$ gefordert ist, bietet sich das Verfahren der Unterabtastung an. Hierzu muss sichergestellt werden, dass kein Aliasing entsteht. Die Abtastfrequenz wird hierzu zu

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{f_0 - f_0^{\mathrm{proj}}}{r}$$

bestimmt, wobei f_0^{proj} die projizierte Mittenfrequenz des abgetasteten Signals ist und $r \in \mathbb{N}$ gilt. Für ein symmetrisches Bandspektrum wird $f_0^{\mathrm{proj}} = 0\,\mathrm{MHz}$ gewählt und es gilt:

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{f_0}{r}\,.$$

Mit $f_{\mathrm{A,min}} \geq 2\mathrm{B}$ (sonst sicher Aliasing) ergibt sich für den Grad der Unterabtastung:

$$\frac{f_0}{r} \geq 2\mathrm{B} \Rightarrow r \leq \frac{f_0}{2\mathrm{B}}$$
$$\frac{f_0}{2\mathrm{B}} = \frac{60\,\mathrm{MHz}}{30\,\mathrm{MHz}} \geq 2 \Rightarrow r = 2\,.$$

Da die gewählte Abtastfrequenz $f_{\mathrm{A,neu}} = \frac{f_0}{r} = 30\,\mathrm{MHz} < 75\,\mathrm{MHz}$ ist, lässt sich das Signal $y(t)$ fehlerfrei mit dem zur Verfügung stehenden Analog-Digital-Umsetzer abtasten.

c) Abbildung 3 zeigt das Betragsspektrum des Signales $y(t)$ (den Amplitudengang) und enthält damit keine Information über die Phase von $y(t)$.

d) Im Nyquist-Band $-f_{\mathrm{N}} \leq f \leq f_{\mathrm{N}}$ ist die gesamte Information des Signals enthalten. Darüber hinaus gilt: $Y_*(f = \pm 15\,\mathrm{MHz}) = 0$. Somit ist für die Grenzfrequenz des idealen Tiefpassfilters $f_{\mathrm{g}} = 15\,\mathrm{MHz}$ zu wählen und es ergibt sich für die Bandbreite des Tiefpasses 30 MHz.

e) Mit einer Grenzfrequenz von $f_{\mathrm{g}} = 15\,\mathrm{MHz}$ ergibt sich für die Impulsantwort des Tiefpassfilters:

$$G_{\mathrm{TP}}(f) = r_{30}(f)$$
$$\bullet\!-\!\!\circ$$
$$g_{\mathrm{TP}}(t) = 30\,\mathrm{sinc}\,(30t) = 30\,\mathrm{si}\,(30\pi t)\ .$$

f) Nein, es handelt sich nicht um ein kausales Filter, da zukünftige Abtastwerte zur Rekonstruktion benötigt werden.

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme

Gegeben sei die folgende z-Transformierte $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{4z^2 - z}{2z^2 - z - 1}.$$

a) Bestimmen Sie die Polstellen von $Y(z)$.

Sie möchten nun **alle** zu $Y(z)$ gehörenden Zeitfolgen mit Hilfe des Residuensatzes bestimmen.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Konvergenzgebiete aller zu $Y(z)$ gehörenden Zeitfolgen. Beschriften Sie die Konvergenzgebiete!

c) Berechnen Sie **alle** zu $Y(z)$ gehörenden Zeitfolgen mit Hilfe des Residuensatzes.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.
Gegeben seien in Tabelle 1 die zeitdiskreten Folgen y_n und x_n.

Tabelle 1: Zeitdiskrete Folgen y_n und x_n.

n	1	2	3
y_n	1	2	3
x_n	1	0	1

d) Bestimmen Sie die Faltung

$$w_n = y_n * x_n$$

durch Rechnung im z-Bereich für $|z| > 0$ und anschließende Rücktransformation.

Das diskrete Signal w_n wird nun mit dem diskreten Signal $g_n = \delta_{n-1}$ gefaltet.

e) Skizzieren Sie $w_n * g_n$.

Lösung

a) Vereinfachung von $Y(z)$ ergibt:

$$Y(z) = \frac{4z^2 - z}{2z^2 - z - 1} = \frac{z}{2}\frac{4z-1}{z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{z}{2}\frac{4z-1}{(z-1)(z+\frac{1}{2})}\,. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Die Polstellen ergeben sich also zu $z_{\infty,1} = 1$ und $z_{\infty,2} = -\frac{1}{2}$.

b) Abbildung L3 zeigt die Skizze der Konvergenzgebiete.

Kausale Wertefolge:	$\lvert z\rvert > 1$
Antikausale Wertefolge:	$\lvert z\rvert < \frac{1}{2}$
Akausale Wertefolge:	$\frac{1}{2} < \lvert z\rvert < 1$

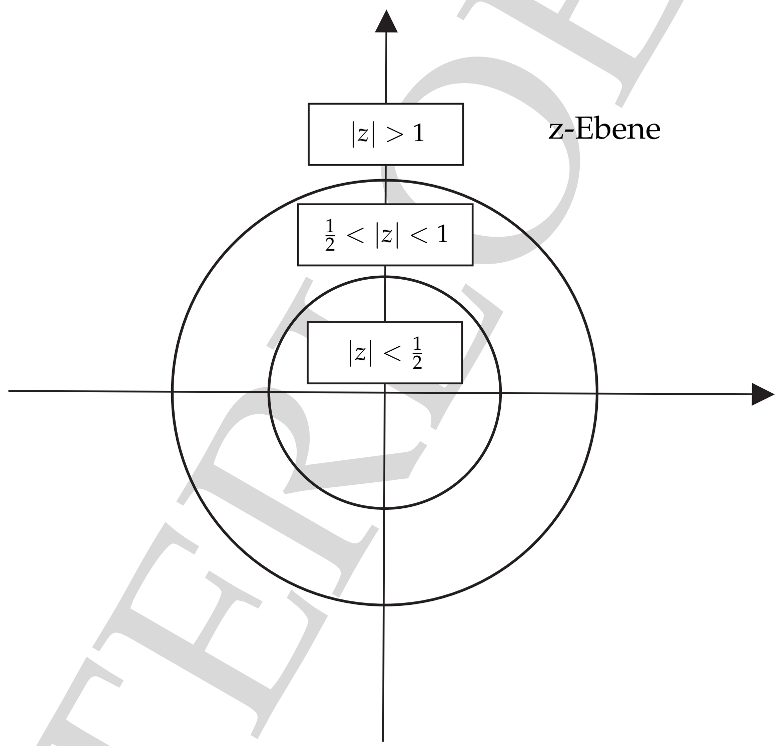

Abbildung L3: Skizze der Konvergenzgebiete.

c) Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Residuensatzes.
Für Pole innerhalb eines Kreisringes $|z_\infty| \leq \mathrm{r}_+$ ergibt sich für die Zeitfolge:

$$y_n = \sum_i \mathrm{Res}\{Y(z)z^{n-1}; |z_{\infty,i}| \leq r_+\} \quad , \quad n \geq 0\,.$$

Für Pole außerhalb eines Kreisringes $|z_\infty| > \mathrm{r}_-$ ergibt sich für die Zeitfolge:

$$y_n = -\sum_i \mathrm{Res}\{Y(z)z^{n-1}; |z_{\infty,i}| \geq r_-\} \quad , \quad n \leq 0\,.$$

Kausale Wertefolge: $|z| > 1$

$\Rightarrow$ Die Polstellen $|z_{\infty,1}| = \frac{1}{2}$ und $|z_{\infty,2}| = 1$ ergeben einen kausalen Beitrag.

Antikausale Wertefolge: $|z| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Die Polstellen $|z_{\infty,1}| = \frac{1}{2}$ und $|z_{\infty,2}| = 1$ ergeben einen antikausalen Beitrag.

Akausale Wertefolge: $\frac{1}{2} < |z| < 1$

$\Rightarrow$ Die Polstelle $|z_{\infty,1}| = \frac{1}{2}$ ergibt einen kausalen und die Polstelle $|z_{\infty,2}| = 1$ einen antikausalen Beitrag.

Berechnung des Residuums für $|z_{\infty,1}| = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left\{Y(z)z^{n-1}; z_{\infty,1} = -\tfrac{1}{2}\right\} &= \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{z}{2} \frac{4z-1}{(z-1)\,(z+\frac{1}{2})} \left(z+\tfrac{1}{2}\right) z^{n-1} \\
&= \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{4z-1}{z-1} z^n \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(-3)}{(-\frac{3}{2})} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Berechnung des Residuums für $|z_{\infty,2}| = 1$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left\{Y(z)z^{n-1}; z_{\infty,2} = 1\right\} &= \lim_{z\to 1} \frac{z}{2} \frac{4z-1}{(z-1)\,(z+\frac{1}{2})} (z-1)\, z^{n-1} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2} \frac{4z-1}{z+\frac{1}{2}} z^n \\
&= \frac{1}{2} (1)^n \frac{3}{\frac{3}{2}} = (1)^n = 1 .
\end{aligned}$$

Die Polstelle $|z| \to \infty$ überprüfen:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} Y(z) &= \lim_{z\to\infty} \frac{z}{2} \frac{4z-1}{(z-1)\,(z+\frac{1}{2})} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2} \frac{4z^2-z}{z^2-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}} \\
&\overset{\mathrm{L'H\hat{o}pital}}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2} \frac{8z-1}{2z-\frac{1}{2}} \overset{\mathrm{L'H\hat{o}pital}}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2} \frac{8}{2} = 2 .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die **kausale Wertefolge** mit $r_+ = 1$:

$$y_n = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] \sigma_n .$$

Da $Y(z)$ für $|z| \to \infty$ einen endlichen Wert annimmt, ist $|z| = \infty$ keine weitere Polstelle und es ergibt sich für die **antikausale Wertefolge**

$$y_n = -\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] \sigma_{-n} .$$

Die **akausale Wertefolge** hat für $|z_\infty| = \frac{1}{2}$ einen kausalen und durch $|z_\infty| = 1$ einen antikausalen Anteil:

$$y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sigma_n - 1 \cdot \sigma_{-n}\,.$$

d) Es gilt für die z-Transformierten

$$Y(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} y_n\, z^{-n} = \sum_{1}^{3} y_n\, z^{-n} = 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3}$$
$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n\, z^{-n} = \sum_{1}^{3} y_n\, z^{-n} = 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-3}.$$

Somit ergibt sich:

$$Y(z) \cdot X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 4z^{-4} + 2z^{-5} + 3z^{-6}.$$

Es gilt mit der Rechenregel für die Faltung im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} w_n &= y_n * x_n = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z) \cdot X(z)\} \\ &= \delta_{n-2} + 2\,\delta_{n-3} + 4\,\delta_{n-4} + 2\,\delta_{n-5} + 3\,\delta_{n-6}\,. \end{aligned}$$

e) Die Faltung $w_m * g_n$ ist in Abbildung L4 skizziert.

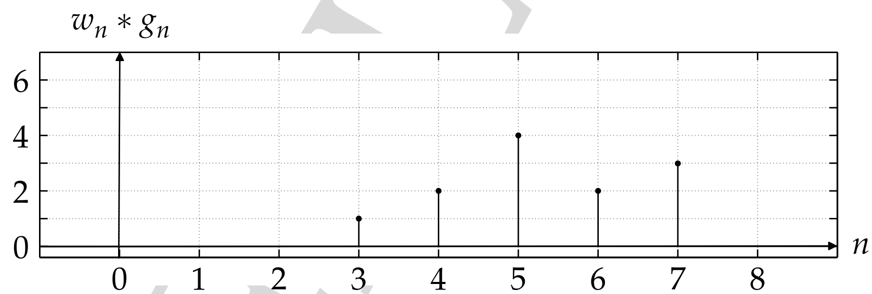

Abbildung L4: Diskrete Faltung $w_n * g_n$.