

**Klausur im Fach
Signale und Systeme
29. September 2015**

Musterlösung

Aufgabe 1: 20

Aufgabe 2: 15

Aufgabe 3: 19

Aufgabe 4: 13

Gesamtpunkte: 67

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale

Gegeben seien die Tschebyscheff-Polynome

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

- a) Überführen Sie die Tschebyscheff-Polynome $T_1(x), \dots, T_3(x)$ in ein orthonormales Basissystem $\{P_1(x), \dots, P_3(x)\}$.
- b) Die Tschebyscheff-Polynome $T_1(x), \dots, T_3(x)$ sowie die berechnete orthonormale Basis $\{P_1(x), \dots, P_3(x)\}$ sollen nun durch zwei Matrizen \mathbf{G} bzw. \mathbf{G}^P dargestellt werden, wobei für \mathbf{G} gilt (\mathbf{G}^P entsprechend):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle T_1(x), T_1(x) \rangle & \cdots & \langle T_3(x), T_1(x) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T_1(x), T_3(x) \rangle & \cdots & \langle T_3(x), T_3(x) \rangle \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaft charakterisiert \mathbf{G}^P im Unterschied zu \mathbf{G} ? (Begründung!)

- c) Es soll nun eine Funktion $\Phi(x)$ mit Hilfe der orthonormalen Basis $\{P_1(x), \dots, P_3(x)\}$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ dargestellt werden. Hierzu wird folgende Gleichung aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} \langle \Phi(x), P_1(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle \Phi(x), P_3(x) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_1(x), P_1(x) \rangle & \cdots & \langle P_3(x), P_1(x) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_1(x), P_3(x) \rangle & \cdots & \langle P_3(x), P_3(x) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung kommt hierbei den Faktoren a_n zu? Welchen Vorteil bietet die Verwendung von $\{P_1(x), \dots, P_3(x)\}$ im Gegensatz zu $\{T_1(x), \dots, T_3(x)\}$?

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- d) Prüfen Sie, ob es sich bei dem Signal

$$x(t) = e^{2t} \cdot \text{sinc}(2t) \cdot \sigma(t)$$

um ein Energie- oder ein Leistungssignal handelt.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Eine unstetige Funktion $f(t)$ wird mit Hilfe der Fourier-Transformation in den Frequenzbereich und anschließend mit der inversen Fourier-Transformation wieder in den Zeitbereich transformiert.

- e) Gilt hier immer $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(t)$? (Begründung!)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- f) Bestimmen Sie die komplexen Koeffizienten der Fourier-Reihe der in Abbildung 1 skizzierten periodischen Funktion $x(t)$. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

Hinweis:

Verwenden Sie den Zusammenhang $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$.

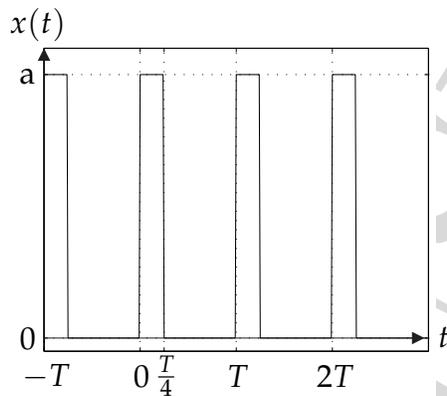


Abbildung 1: Periodische Funktion $x(t)$.

- g) Skizzieren Sie den Betrag des Linienspektrums für $k = -10, \dots, 10$.

Lösung

a) Es gilt mit dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren:

$$H_1(x) = T_1(x) = x$$

$$P_1(x) = \frac{H_1(x)}{\|H_1(x)\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$H_2(x) = T_2(x) - \langle P_1(x), T_2(x) \rangle P_1(x)$$

$$= 2x^2 - 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (2x^3 - x) dx \cdot P_1(x)$$

$$= 2x^2 - 1$$

$$P_2(x) = \frac{H_2(x)}{\|H_2(x)\|} = \sqrt{\frac{15}{14}} (2x^2 - 1)$$

$$H_3(x) = T_3(x) - \langle P_1(x), T_3(x) \rangle P_1(x) - \langle P_2(x), T_3(x) \rangle P_2(x)$$

$$= 4x^3 - 3x - \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (4x^4 - 3x^2) dx \cdot P_1(x)$$

$$- \sqrt{\frac{15}{14}} \int_{-1}^1 (2x^2 - 1)(4x^3 - 3x) dx \cdot P_2(x)$$

$$= 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot P_1(x) - 0 \cdot P_2(x)$$

$$= 4x^3 - \frac{12}{5}x$$

$$P_3(x) = \frac{H_3(x)}{\|H_3(x)\|} = \frac{5 \cdot \sqrt{14}}{16} \left(4x^3 - \frac{12}{5}x \right).$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ und $P_3(x)$ stellen auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ ein orthonormales Basissystem dar.

b) Da es sich bei P_n um eine orthonormale Basis handelt und daher $\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = \delta_{ij}$ gilt, wird \mathbf{G}^P zur Einheitsmatrix.

c) Die Faktoren a_n beschreiben die Ähnlichkeit der Funktion Φ mit den Funktionen der Basis. Daher gilt (Gleichung nicht verlangt):

$$\Phi(x) = a_1 P_1(x) + \dots + a_N P_N + \Delta.$$

Da \mathbf{G}^P im Gegensatz zu \mathbf{G} die Einheitsmatrix ist, können hier die Faktoren a_n durch Projektion berechnet werden.

d) Wegen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{2t} \operatorname{sinc}(2t) \sigma(t) \right|^2 dt &= \int_0^{\infty} \left| e^{2t} \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} \right|^2 dt \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{e^{2t}}{2\pi t} \right|^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{4t}}{4\pi^2 t^2} \right) dt \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{16e^{4t}}{8\pi^2} \right) dt \neq \infty \end{aligned}$$

folgt, dass es sich bei dem Signal um ein Leistungssignal handelt.

- e) Nein, die Behauptung gilt nicht. Es tritt an den Unstetigkeitsstellen der Funktion $f(t)$ das Gibbs'sche Phänomen auf.
- f) Die Koeffizienten der Fourier-Reihe (Periodendauer T) bestimmen sich zu:

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi\frac{k}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} a e^{-j2\pi\frac{k}{T}t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \frac{aT}{-j2\pi k} \left(e^{-j2\pi\frac{k}{T}\frac{T}{4}} - 1 \right) = \frac{a}{-j2\pi k} \left(e^{-j2\pi\frac{k}{4}} - 1 \right) \\
 &= \frac{a}{\pi k 2j} e^{-j\pi\frac{k}{4}} \left(e^{j\pi\frac{k}{4}} - e^{-j\pi\frac{k}{4}} \right) = \frac{a}{\pi k} e^{-j\pi\frac{k}{4}} \sin\left(\pi\frac{k}{4}\right) \\
 &= \frac{a}{4} e^{-j\pi\frac{k}{4}} \text{si}\left(\pi\frac{k}{4}\right).
 \end{aligned}$$

- g) Die Koeffizienten sind in Abbildung L1 skizziert.

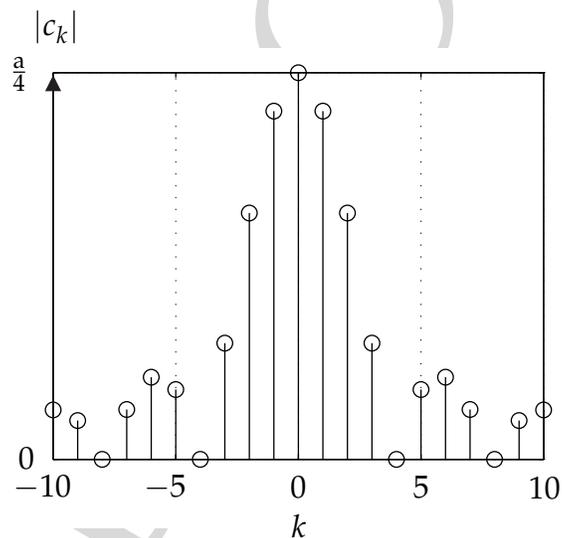


Abbildung L1: Betrag der Fourier-Koeffizienten.

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme

Das Fahrwerk einer Transporteinheit in einem Logistikunternehmen lässt sich durch ein Feder-Masse-Dämpfer-System darstellen (vgl. Abbildung 2).

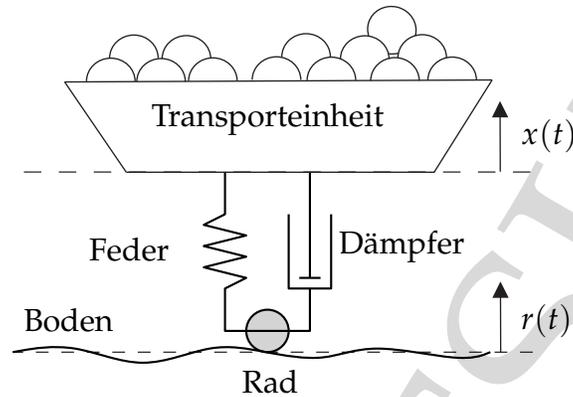


Abbildung 2: Modell eines Fahrwerks.

Die Höhe der Transporteinheit zur Zeit t wird mit $x(t)$ bezeichnet, die Höhe des Bodens mit $r(t)$. Die vertikalen Auslenkungen von Transporteinheit und Boden sind durch das System S_1 mit der linearen Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - r(t)) - d(\dot{x}(t) - \dot{r}(t))$$

verknüpft, wobei m die Masse der Transporteinheit, k die Federkonstante und d die Dämpfungskonstante beschreiben. Es gelte nun

$$m = 1, \quad k = 2 \quad \text{und} \quad d = 3.$$

Das System S_1 hat den Eingang $r(t)$ und den Ausgang $x(t)$.

- Handelt es sich bei S_1 um ein LTI-System? (Begründung!)
- Stellen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{X(s)}{R(s)}$ des Systems S_1 auf.

Bei einem Test hat sich gezeigt, dass es bei der Höhe der Transporteinheit zu Überschwingern kommt, wenn die Transporteinheit über ein Hindernis fährt. Ein Hindernis lässt sich durch die Anregung $r(t) = R_0 \sigma(t)$ mit $R_0 = 1$ modellieren. Abbildung 3 zeigt die Antwort des Systems S_1 auf die Anregung $r(t)$.

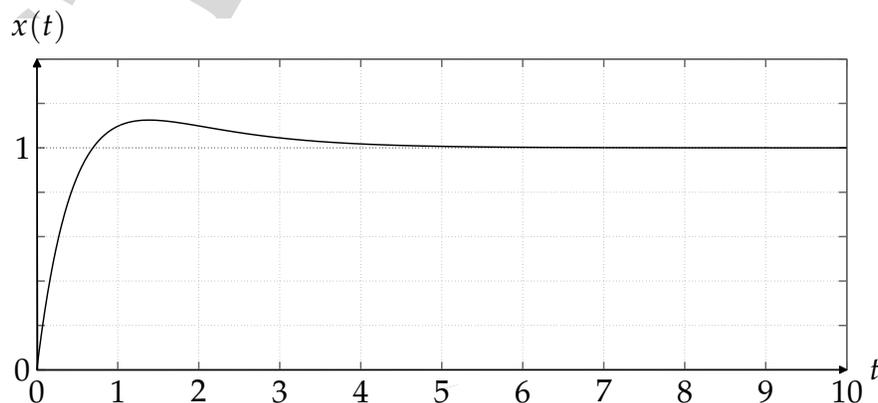


Abbildung 3: Antwort des Systems S_1 bei Anregung mit $r(t) = R_0 \sigma(t)$.

Damit die Sicherheit des Transportguts gewährleistet ist, darf $x(t)$ den Wert R_0 nicht überschreiten. Hierzu soll nun ein weiteres Dämpferelement eingebaut werden. Das Dämpferelement wird durch das System S_2 beschrieben. Abbildung 4 zeigt das System S_2 . Hierbei stellt $\hat{x}(t)$ die Höhe der Transporteinheit mit zusätzlicher Dämpfung dar.

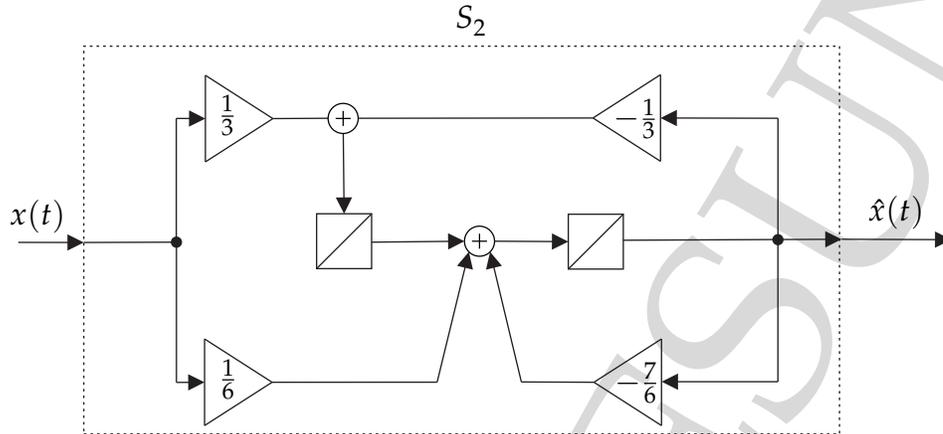


Abbildung 4: System S_2 .

- c) Stellen Sie die Differentialgleichung für das System S_2 auf.
- d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ des Systems S_2 .

Das Gesamtsystem ist in Abbildung 5 gegeben.

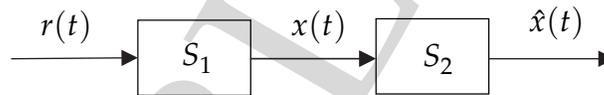


Abbildung 5: Gesamtsystem S mit Übertragungsfunktion $G(s)$.

Für das Gesamtsystem erhalten Sie nun die Übertragungsfunktion

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}$$

- e) Bestimmen Sie die Antwort $\hat{x}(t)$ des Gesamtsystems $G(s)$ auf den Eingang $r(t) = R_0 \sigma(t)$.
- f) Kann die Sicherheit des Transportguts nun gewährleistet werden? (Begründung!)

Lösung

- a) Es handelt sich um ein LTI-System. Die Differentialgleichung hat konstante Koeffizienten und die zeitabhängigen Größen gehen linear in die Gleichung ein.
- b) Durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung erhält man

$$ms^2 X(s) = -k(X(s) - R(s)) - sd(X(s) - R(s)).$$

Umformung liefert die Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{ds + k}{ms^2 + ds + k} = \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 2}{(s + 2)(s + 1)}.$$

- c) Aus Abbildung 4 erhält man

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{1}{3} \int \int x(t) \, dt \, dt + \frac{1}{6} \int x(t) \, dt - \frac{1}{3} \int \int \hat{x}(t) \, dt \, dt - \frac{7}{6} \int \hat{x}(t) \, dt \\ &\Rightarrow \ddot{\hat{x}}(t) + \frac{7}{6} \dot{\hat{x}}(t) + \frac{2}{6} \hat{x} = \frac{1}{6} \dot{x}(t) + \frac{2}{6} x(t). \end{aligned}$$

- d) Laplace-Transformation ergibt

$$\begin{aligned} 6\hat{X}(s)s^2 + 7\hat{X}(s)s + 2\hat{X}(s) &= X(s)s + 2X(s) \\ \hat{X}(s)(6s^2 + 7s + 2) &= X(s)(s + 2). \end{aligned}$$

Man erhält für $G_2(s)$:

$$G_2(s) = \frac{\hat{X}(s)}{X(s)} = \frac{1}{6} \frac{s + 2}{s^2 + \frac{7}{6}s + \frac{2}{6}} = \frac{1}{6} \frac{(s + 2)}{(s + \frac{4}{6})(s + \frac{3}{6})} = \frac{1}{2} \frac{(s + 2)}{(3s + 2)(s + \frac{1}{2})}.$$

- e) Bestimmen von $G(s)$ (nicht verlangt):

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s)G_2(s) \\ &= \frac{3s + 2}{(s + 1)(s + 2)} \frac{1}{2} \frac{(s + 2)}{(3s + 2)(s + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(s + 1)(s + \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Für die Antwort des Systems auf die Anregung $r(t) = R_0 \sigma(t) = \sigma(t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{(s + 1)(s + \frac{1}{2})} \frac{1}{s} \right\} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(s + 1)} + \frac{-4}{(s + \frac{1}{2})} + \frac{2}{s} \right) \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{(s + 1)} + \frac{-2}{(s + \frac{1}{2})} + \frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= (e^{-t} - 2e^{-\frac{1}{2}t} + 1) \sigma(t). \end{aligned}$$

- f) Es tritt nun kein Überschwingen der Transporteinheit auf. Die Höhe $\hat{x}(t)$ überschreitet den Wert $R_0 = 1$ nicht mehr, da gilt: $e^{-\frac{1}{2}t} > e^{-t}$, $t \geq 0$. Somit ist $\hat{x}(t) < 1$ für $t \geq 0$.
Abbildung L2 zeigt $\hat{x}(t)$. (Nicht verlangt.)

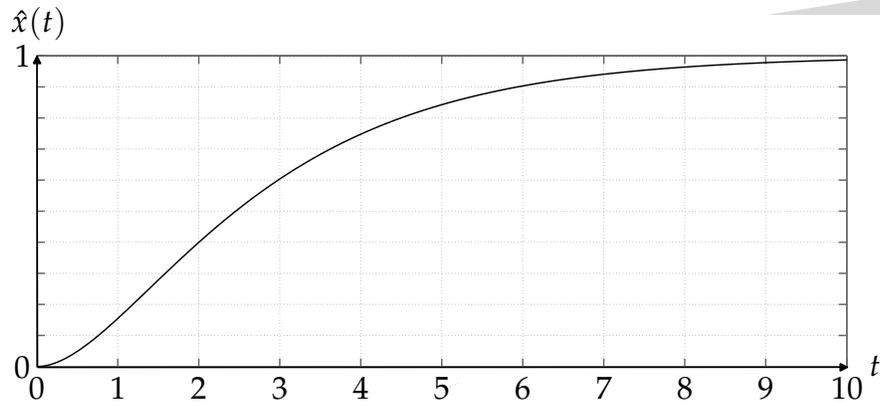


Abbildung L2: Antwort des Gesamtsystems bei Anregung mit $r(t) = R_0 \sigma(t)$.

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale

Gegeben sei ein Signal $y_1(t)$, das aus einer Überlagerung von harmonischen Schwingungen besteht. Die Schwingfrequenzen der harmonischen Schwingungen liegen im Bereich [5 Hz, 20 kHz].

- a) Welcher Bedingung muss die Abtastzeit t_A genügen, damit bei der Abtastung des Signals $y_1(t)$ das Abtasttheorem erfüllt wird?

Die folgende Teilaufgabe ist von der vorhergehenden unabhängig.

Ein Signal y_2 mit

$$y_2(t) = \sin(40 \text{ Hz} \pi t)$$

wird nun entsprechend

$$\hat{y}_2(t) = e^{j\pi 20 \text{ Hz} \cdot t} y_2(t)$$

moduliert.

- b) Skizzieren Sie die Betragsspektren von $y_2(t)$ und $\hat{y}_2(t)$.
- c) Welcher Bedingung muss nach dem Abtasttheorem die Abtastfrequenz f_A genügen, damit bei der Abtastung von $\hat{y}_2(t)$ sicher kein Aliasing auftritt?
- d) Welches Verfahren können Sie anwenden, um dennoch mit einer kleineren Abtastfrequenz abzutasten, ohne dass Aliasing auftritt? Welche Bedingung muss ein Signal hierfür erfüllen?

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das in Abbildung 6 gezeigte zeitdiskrete Signal x_n .

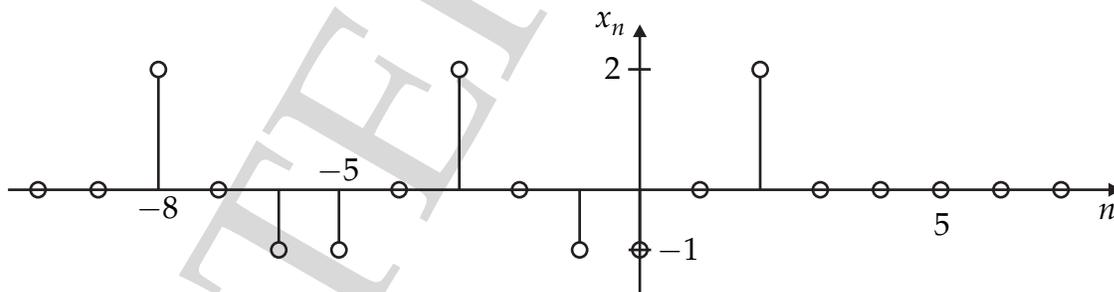


Abbildung 6: Zeitdiskretes Signal x_n .

Außerhalb des gezeigten Bereichs sei die Funktion gleich null. Die Fourier-Transformierte des zeitdiskreten Signals x_n ist mit $X_*(f)$ bezeichnet, die komplex Konjugierte von $X_*(f)$ mit $X_*^*(f)$.

- e) Welche Eigenschaft muss ein reelles, zeitdiskretes Signal erfüllen, damit seine Fourier-Transformierte eine reelle Funktion ist?

f) Berechnen Sie α so, dass

$$\hat{X}_*(f) = e^{j2\pi\alpha t_A f} X_*(f)$$

reell ist.

Hinweis:

Stellen Sie hierzu $X_*(f)$ durch das Produkt einer Exponentialfunktion mit trigonometrischen Funktionen dar.

g) Berechnen Sie $\int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} X_*(f) df$.

Hinweis:

Nutzen Sie die Formel zur inversen Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale.

h) Berechnen Sie $\int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} X_*(f) X_*^*(f) df$.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

i) Zeigen Sie, dass die Faltung zweier kausaler Folgen wieder kausal ist.

Lösung

- a) Die höchste im Signal $y_1(t)$ vorkommende Frequenz ist 20 kHz. Damit muss für die Abtastfrequenz gelten:

$$f_A > 40 \text{ kHz}$$

und damit

$$t_A < \frac{1}{40 \text{ kHz}} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

- b) Die Abbildungen L3 und L4 zeigen die Betragsspektren.

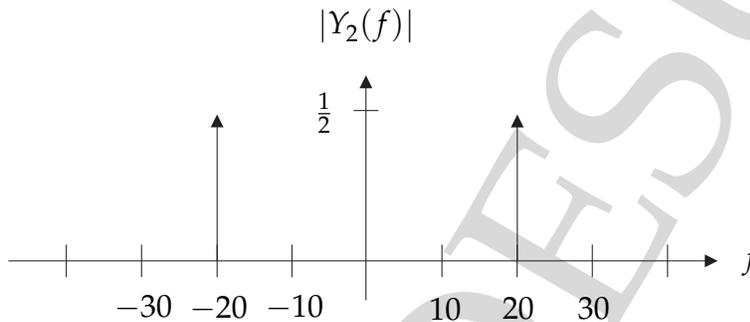


Abbildung L3: Betragsspektrum von $y_2(t)$.

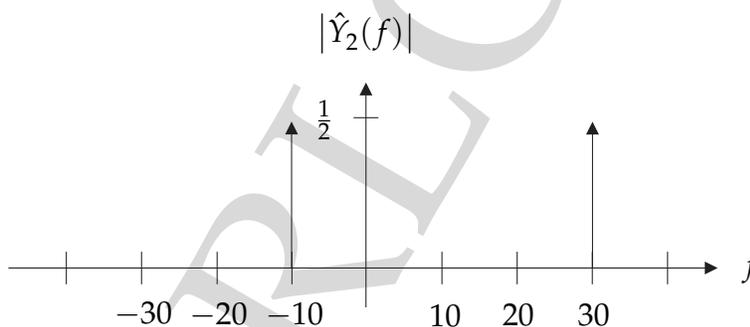


Abbildung L4: Betragsspektrum von $\hat{y}_2(t)$.

- c) Die Modulation erfolgt mit $f_0 = 10 \text{ Hz}$. Die höchste im Signal $y_2(t)$ vorkommende Frequenz ist 20 Hz. Da die Modulation die Bandbreite jedoch nicht ändert (reine Frequenzverschiebung), gilt somit:

$$f_A > 40 \text{ Hz.}$$

- d) Man kann das Verfahren der Unterabtastung anwenden. Das Signal muss hierfür ein Bandpasssignal sein.
- e) Es muss sich um eine gerade Funktion handeln.
- f) Es gilt:

$$\begin{aligned} X_*(f) &= \sum_n x_n e^{-j2\pi f n t_A} \\ &= 2e^{-j2\pi f t_A(-8)} - e^{-j2\pi f t_A(-6)} - e^{-j2\pi f t_A(-5)} + 2e^{-j2\pi f t_A(-3)} \\ &\quad - e^{-j2\pi f t_A(-1)} - e^{-j2\pi f t_A(0)} + 2e^{-j2\pi f t_A(2)} \\ &= e^{j6\pi f t_A} [2 + 4 \cos(10\pi f t_A) - 2 \cos(6\pi f t_A) - 2 \cos(4\pi f t_A)]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $\hat{X}_*(f)$ für $\alpha = -3$ reellwertig wird.

Alternativ erkennt man unter Berücksichtigung des Ergebnisses der vorhergehenden Aufgabe, dass eine Verschiebung um $n = 3$ nach rechts notwendig ist, um ein gerades Signal zu erhalten.

g) Es gilt:

$$\int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} X_*(f) df = f_A t_A \underbrace{\int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} X_*(f) e^{j2\pi f 0 t_A} df}_{x_0 = -1} = -f_A.$$

h) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} X_*(f) X_*^*(f) df &= \int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} \sum_n x(n) e^{-j2\pi n f t_A} \cdot \sum_{n'} x^*(n') e^{+j2\pi n' f t_A} df \\ &= \sum_n \sum_{n'} x(n) x^*(n') \int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} e^{j2\pi f t_A (n' - n)} df \\ &= \sum_n \sum_{n'} x(n) x^*(n') \frac{1}{j2\pi t_A (n' - n)} (e^{j\pi (n' - n)} - e^{-j\pi (n' - n)}) \\ &= \sum_n \sum_{n'} x(n) x^*(n') \underbrace{f_A \text{si}(\pi (n' - n))}_{\begin{cases} 0 & n \neq n' \\ f_A & n = n' \end{cases}} \\ &= f_A \sum_n |x(n)|^2 = 16f_A. \end{aligned}$$

i) Für die Faltung ergibt sich nach Definition

$$x_{1,n} * x_{2,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{1,k} x_{2,n-k}.$$

Da die Signale nach Voraussetzung kausal sind, ist $x_{i,n} = x_{i,n} \sigma_n, i = 1, 2$. Durch Einsetzen in die obige Gleichung resultiert daraus:

$$x_{1,n} * x_{2,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{1,k} x_{2,n-k} \sigma_k \sigma_{n-k}.$$

Ist $n < 0$, so ist $\sigma_k \sigma_{n-k}$ für alle k identisch null und das Faltungsprodukt ergibt ebenfalls null. Die Faltung zweier kausaler Signale ist ebenfalls kausal.

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme

Zwei zeitdiskrete Systeme S_1 und S_2 mit ihren Impulsantworten

$$g_{1,n} = \sigma_n, \quad g_{2,n} = 0,5^n \cdot \sigma_n$$

werden in der in Abbildung 7 angegebenen Weise verknüpft.

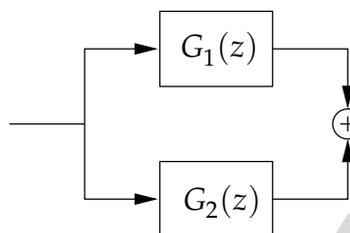


Abbildung 7: Verknüpfung zweier Systeme $G_1(z)$ und $G_2(z)$ zum System $G(z)$.

Das Gesamtsystem besitzt die Übertragungsfunktion $G(z)$.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und geben Sie sie als Quotient zweier Polynome an.
- Wo liegt das Konvergenzgebiet von $G(z)$? (Begründung!)
- Ist das Gesamtsystem stabil? (Begründung!)
- Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Die Impulsantwort eines FIR-Tiefpass-Filters soll durch die Transformation eines Wunschfrequenzgangs unter Verwendung der Methode der Impulsinvarianz entworfen werden. Der Wunschfrequenzgang sei ein idealer Tiefpass.

- Erläutern Sie die wesentlichen Schritte, um die diskrete Impulsantwort des Filters aus dem Wunschfrequenzgang zu berechnen.
- Was gilt es bei diesen Schritten zu berücksichtigen? Welche Effekte treten auf? (Begründung!)

Lösung

- a) Aus den beiden z-Transformierten

$$G_1(z) = \frac{z}{z-1}, \quad G_2(z) = \frac{z}{z-0,5}$$

der Teilsysteme erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) = \frac{z(z-0,5) + z(z-1)}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{2z^2 - 1,5z}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

des Gesamtsystems.

- b) Das Konvergenzgebiet folgt aus den beiden Konvergenzgebieten

$$|z| > 1 \quad \wedge \quad |z| > 0,5 \implies |z| > 1$$

der Teilsysteme.

- c) Da die Polstellen $z_{\infty 1} = 0,5$ und $z_{\infty 2} = 1$ **nicht** beide im Einheitskreis liegen, ist das Gesamtsystem nicht stabil.
- d) Das Pol-Nullstellen-Diagramm ist in Abbildung L5 zu sehen.

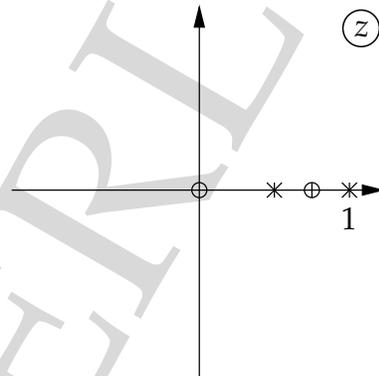


Abbildung L5: Pol-Nullstellen-Diagramm des Gesamtsystems.

- e) Die Übertragungsfunktion des Wunschfrequenzgangs sei mit $G(f)$ bezeichnet. Folgende Schritte sind notwendig:
- Inverse Fourier-Transformation: $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}$
 - Abtastung von $g(t)$ zu g_n
 - Fensterung von g_n , um eine endliche Länge der Impulsantwort zu gewährleisten.
- f) Im zweiten Schritt muss bei der Abtastung von $g(t)$ das Abtasttheorem eingehalten werden, sonst kommt es zum Bandüberlappungsfehler. Bei der Fensterung (mit einem idealen Tiefpassfilter) von g_n kommt es zum Leckeffekt, da die Fensterung im Zeitbereich mit einer Faltung von $G^*(f)$ mit der Fourier-Transformierten der Impulsantwort des Fensters im Frequenzbereich korrespondiert (Faltung mit Sinc-Funktion im Frequenzbereich).