Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
18. September 2017

Musterlösung

Aufgabe 1: 17
Aufgabe 2: 16
Aufgabe 3: 17
Aufgabe 4: 16

Gesamtpunkte: 66

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (17 Punkte)

Gegeben sei das Signal

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\pi\frac{t}{t_0}\right)\right) \cdot r_{2t_0}(t) \ ,$$

wobei $r_{2t_0}(t)$ eine Rechteckfunktion der Breite $2t_0$ beschreibt.

a) Skizzieren Sie das Signal $y_1(t)$. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $Y_1(f)$. Nutzen Sie hierfür bekannte Transformationen und die Eigenschaften der Fourier-Transformation. *(3 Punkte)*

c) Das Signal $y_1(t)$ wird nun mit der Zeitfunktion $x(t)$ gefaltet, sodass sich $y_2(t)$ ergibt:

$$y_2(t) = y_1(t) * x(t) \,.$$

Für $x(t)$ gilt hierbei:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot 2t_0) \,.$$

Berechnen Sie das Spektrum $Y_2(f)$ von $y_2(t)$ durch Rechnung **im Frequenzbereich**. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das Signal $y_3(t)$:

$$y_3(t) = \begin{cases} t^2, & -T \le t \le T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \,.$$

d) Machen Sie drei qualitative Aussagen über die Eigenschaften der Fourier-Transformierten von $y_3(t)$, die direkt aus den Eigenschaften von $y_3(t)$ folgen. (Keine Rechnung, kurze Begründungen!) *(3 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $Y_3(f)$ des Signals $y_3(t)$ mit Hilfe des Fourier-Integrals. *(5 Punkte)*

Hinweis: $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$.

Lösung

a) Das Signal $y_1(t)$ ist in Abbildung L1 dargestellt. *(Σ: **2 Punkte**)*

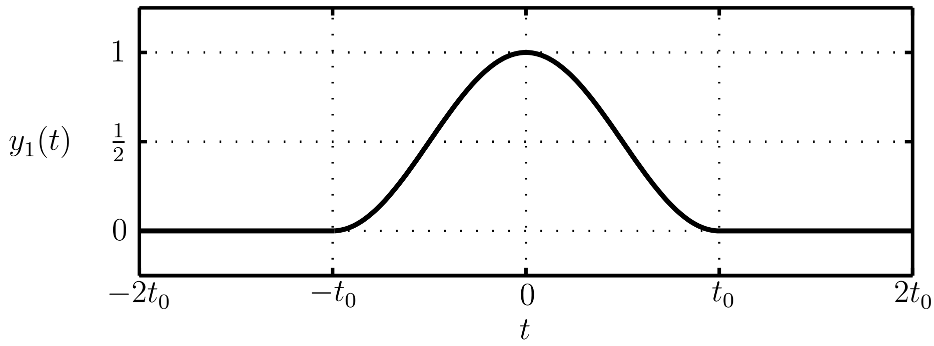

Abbildung L1: Das Signal $y_1(t)$.

b) Die Multiplikation zweier Funktionen im Zeitbereich entspricht im Frequenzbereich einer Faltung. Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
Y_1(f) &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\pi\frac{t}{t_0}\right)\right)\right\} * \mathcal{F}\left\{r_{2t_0}(t)\right\} \\
&= \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\left(\delta\left(f+\frac{1}{2t_0}\right) + \delta\left(f-\frac{1}{2t_0}\right)\right)\right] * 2t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f) \\
&= t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f) + \frac{1}{2}t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f+1) + \frac{1}{2}t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f-1)
\end{aligned}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

c) Aus der Faltung der Funktionen $y(t)$ und $x(t)$ im Zeitbereich ergibt sich im Frequenzbereich eine Multiplikation. Es gilt:

$$\begin{aligned}
Y_2(f) &= Y_1(f)\cdot X(f) \\
&= \left(t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f) + \frac{1}{2}t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f+1) + \frac{1}{2}t_0\,\mathrm{sinc}(2t_0 f-1)\right)\cdot\frac{1}{2t_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{2t_0}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(2t_0 f) + \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}(2t_0 f+1) + \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}(2t_0 f-1)\right)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{2t_0}\right)
\end{aligned}$$

Es erfolgt die Auswertung der drei Sinc-Funktionen an den Stellen $f=\frac{k}{2t_0}$:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(k) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & k=0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases},$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}(k+1) = \begin{cases}\frac{1}{4}, & k=-1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases},$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}(k-1) = \begin{cases}\frac{1}{4}, & k=1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

Das Spektrum $Y_2(f)$ lässt sich somit schreiben als:

$$Y_2(f) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & f=0\\ \frac{1}{4}, & f=\pm\frac{1}{2t_0}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

d) Folgende Aussagen über die Fourier-Transformierte von $y_3(t)$ sind möglich (drei Aussagen sind verlangt):

- $y_3(t)$ ist reell und gerade, daher ist $Y_3(f)$ ebenfalls reell und gerade.
- $y_3(t) \geq 0$, daher gilt $Y_3(0) \geq |Y_3(f)|$.
- $y_3(t)$ ist zeitkontinuierlich, daher ist $Y_3(f)$ nicht periodisch.
- $y_3(t)$ ist nicht periodisch, daher ist $Y_3(f)$ frequenzkontinuierlich.

*(Σ: **3 Punkte**)*

e) Die Berechnung der Fourier-Transformierten erfolgt mit Hilfe des angegebenen Integrals:

$$\begin{aligned}
Y_3(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-T}^{T} t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\mathrm{d}t \\
&= \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\left(\frac{t^2}{-\mathrm{j}\,2\pi f} - \frac{2t}{(-\mathrm{j}\,2\pi f)^2} + \frac{2}{(-\mathrm{j}\,2\pi f)^3}\right)\right]_{t=-T}^{T} \\
&= \frac{1}{4\pi^3 f^3}\cdot\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}\left(\mathrm{j}(2\pi^2 f^2T^2-1)+2\pi fT\right) - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f T}\left(\mathrm{j}(2\pi^2 f^2T^2-1)-2\pi fT\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi^3 f^3}\cdot\left[(2\pi^2 f^2T^2-1)\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f T}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}\right) + 2\pi fT\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi^3 f^3}\cdot\left[(2\pi^2 f^2T^2-1)\cdot 2\sin(2\pi fT) + 2\pi fT\cdot 2\cos(2\pi fT)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi^3 f^3}\cdot\left[(2\pi^2 f^2T^2-1)\sin(2\pi fT) + 2\pi fT\cos(2\pi fT)\right]\ .
\end{aligned}$$

*(Σ: **5 Punkte**)*

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (16 Punkte)

Gegeben sei der folgende Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_1$:

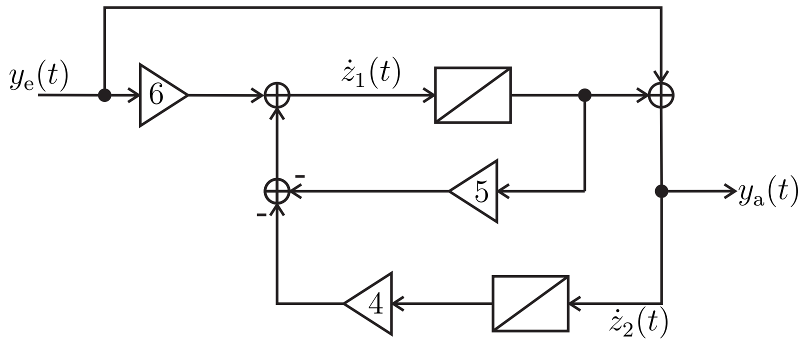

Abbildung 1: Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_1$.

a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung mit den Zustandsgrößen z_1 und z_2 für das System $\mathcal{S}_1$ an. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung. *(2 Punkte)*

c) Zeichnen Sie die ARMA-Darstellung des Systems. *(2 Punkte)*

d) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems. *(2 Punkte)*

e) Ist das System stabil? (Begründung!) *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Das System $\mathcal{S}_2$ besitzt folgende Übertragungsfunktion:

$$G_2(s) = \frac{2s + 8}{(s + \frac{1}{2})(s + \frac{11}{2})} .$$

f) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems $\mathcal{S}_2$ durch Verwendung bekannter Transformationen. *(3 Punkte)*

g) Sie schalten nun das System $\mathcal{S}_2$ in Reihe mit dem System $\mathcal{S}_3$ mit der Übertragungsfunktion

$$G_3(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 5} .$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $g_R(t)$ der Reihenschaltung unter Verwendung des Residuensatzes. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Durch Ablesen aus dem Signalflussplan ergeben sich folgende Zustandsgrößen:

$$\dot{z}_1(t) = 6\,y_\mathrm{e}(t) - 5\,z_1(t) - 4\,z_2(t) = -5\,z_1(t) - 4\,z_2(t) + 6\,y_\mathrm{e}(t)$$
$$\dot{z}_2(t) = y_\mathrm{e}(t) + z_1(t)$$
$$y_\mathrm{a}(t) = y_\mathrm{e}(t) + z_1(t)\,.$$

Die Zustandsraumdarstellung lautet somit:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} y_\mathrm{e}(t)$$
$$y_\mathrm{a}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + 1\,y_\mathrm{e}(t)\,.$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

b) Es gilt:

$$G(s) = \mathbf{C}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\,.$$

Einsetzen der obigen Zahlenwerte liefert:

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s\,(s+5)+4} \begin{pmatrix} s & -4 \\ 1 & s+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + 1$$
$$= \frac{6\,s - 4}{s\,(s+5)+4} + 1 = \frac{s^2 + 5\,s + 4 + 6\,s - 4}{s^2 + 5\,s + 4} = \frac{s^2 + 11\,s}{s^2 + 5\,s + 4}\,.$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

c) Die ARMA-Darstellung des Systems $\mathcal{S}_1$ ist in Abbildung L2 zu sehen: *(Σ: **2 Punkte**)*

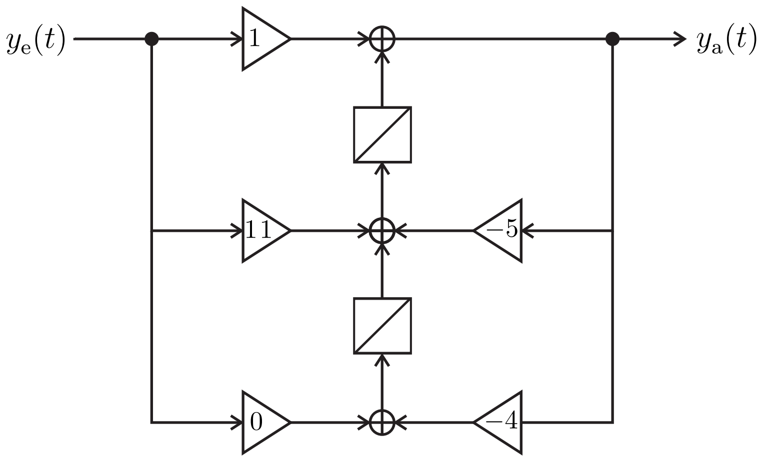

Abbildung L2: ARMA-Darstellung des Systems $\mathcal{S}_1$.

d) Für die Pole und Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} s_{\infty,1} &= -1\,, \\ s_{\infty,2} &= -4\,, \\ s_{0,1} &= 0\,, \\ s_{0,2} &= -11\,. \end{aligned}$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm ist in Abbildung L3 dargestellt: *(Σ: **2 Punkte**)*

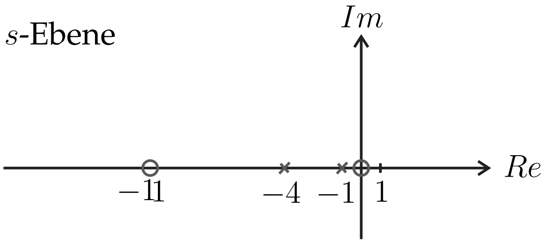

Abbildung L3: Pol-Nullstellen-Diagramm.

e) Das System ist stabil, denn es gilt: $\mathrm{Re}\{s_{\infty,i}\} < 0$. *(Σ: **1 Punkt**)*

f) Zunächst erfolgt eine Partialbruchzerlegung mit folgendem Ansatz:

$$G_2(s) = \frac{2(s+4)}{(s+\frac{1}{2})(s+\frac{11}{2})} = \frac{A}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B}{s+\frac{11}{2}}\,.$$

Es ergibt sich die folgende Bedingung für die Zähler beider Seiten:

$$2s + 8 = (A+B)s + \frac{11}{2}A + \frac{1}{2}B\,.$$

Die Bestimmung von A und B erfolgt aus dem sich ergebenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 8 &= \frac{11}{2}A + \frac{1}{2}B\,. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten zu $A = \frac{7}{5}$ und $B = \frac{3}{5}$. Das System kann als Summe zweier Brüche mit

$$G_2(s) = \frac{7}{5}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}\frac{1}{s+\frac{11}{2}}$$

dargestellt werden. Die Impulsantwort ergibt sich unter Verwendung der Korrespondenztabelle zu:

$$g_2(t) = \left(\frac{7}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{11}{2}t}\right)\sigma(t)\,.$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

g) Durch die Reihenschaltung der beiden Systeme entsteht ein System S_R mit der Übertragungsfunktion

$$G_\mathrm{R}(s) = \frac{2s+8}{(s+\frac{1}{2})(s+\frac{11}{2})} \cdot \frac{s+\frac{1}{2}}{s+5} = \frac{2(s+4)}{(s+\frac{11}{2})(s+5)}\,.$$

Unter Verwendung des Residuensatzes kann die Impulsantwort des Gesamtsystems bestimmt werden ($s_{\infty,1} = -\frac{11}{2}\,,\ s_{\infty,2} = -5$):

$$\begin{aligned}
g_\mathrm{R}(t) &= \sum_i \mathrm{Res}\{G_\mathrm{R}(s)\,\mathrm{e}^{st}, s_{\infty,i}\} \\
&= \left(\lim_{s\to-\frac{11}{2}} (s+\tfrac{11}{2}) \frac{2(s+4)}{(s+\frac{11}{2})(s+5)}\,\mathrm{e}^{st} + \lim_{s\to-5} (s+5) \frac{2(s+4)}{(s+\frac{11}{2})(s+5)}\,\mathrm{e}^{st} \right) \sigma(t) \\
&= \left(\frac{-11+8}{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{11}{2}t} + \frac{-2}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-5t} \right) \sigma(t) \\
&= \left(6\,\mathrm{e}^{-\frac{11}{2}t} - 4\,\mathrm{e}^{-5t} \right) \sigma(t)\,.
\end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (17 Punkte)

Gegeben sei das Signal

$$x_1(t) = \sin(2\pi\,3\,\mathrm{Hz}\,t) \cdot \cos(2\pi\,2\,\mathrm{Hz}\,t)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(f)$ von $x_1(t)$. *(2 Punkte)*

b) Skizzieren Sie $X_1(f)$ im Bereich $|f| < 6\,\mathrm{Hz}$. *(1 Punkt)*

c) Nun wird das Signal $x_1(t)$ mit der Abtastfrequenz $f_\mathrm{A} = 6\,\mathrm{Hz}$ abgetastet. Tritt in diesem Fall Aliasing auf? (Begründung!)

(1 Punkt)

d) Skizzieren Sie die Fourier-Transformierte $X_{1*}(f)$ des abgetasteten Signals im Bereich $|f| < 6\,\mathrm{Hz}$. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei der in Abbildung 2 für positive Frequenzen dargestellte Amplitudengang eines zeitkontinuierlichen Signals $x_2(t)$. Der Amplitudengang ist achsensymmetrisch. Für alle Frequenzen größer oder gleich $1500\,\mathrm{Hz}$ gilt $X_2(f) = 0$.

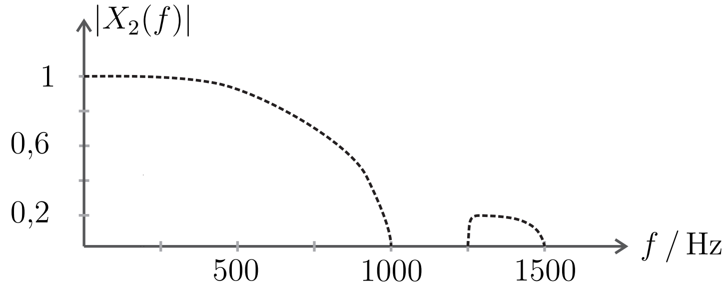

Abbildung 2: Amplitudengang des Signals $x_2(t)$.

e) Es wird angenommen, dass nur die Frequenzen bis $|f| < 1000\,\mathrm{Hz}$ Nutzdaten enthalten. Der höherfrequente Anteil soll als Störung betrachtet werden. Das Signal $x_2(t)$ soll nun abgetastet werden. Welche minimale Abtastfrequenz kann unter diesen Bedingungen gewählt werden? Begründen Sie Ihre Wahl. *(2 Punkte)*

f) Skizzieren Sie das Spektrum $|X_{2*}(f)|$ des mit der in Teilaufgabe e) berechneten Abtastfrequenz abgetasteten Signals $x_{2*}(t)$ im Bereich von $-4000\,\mathrm{Hz}$ bis $4000\,\mathrm{Hz}$. *(2 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

Um das Störsignal ($f > 1000\,\mathrm{Hz}$) vor der Abtastung zu unterdrücken, wird ein Filter mit der Übertragungsfunktion $G_\mathrm{F}(s)$ in die Verarbeitungskette eingefügt.
Das Filter besitzt die Übertragungscharakteristik eines Tiefpasses 1. Ordnung:

$$G_\mathrm{F}(s) = \frac{2\pi f_\mathrm{G}}{2\pi f_\mathrm{G} + s}\,.$$

Die Grenzfrequenz liegt bei $f_\mathrm{G} = 1250\,\mathrm{Hz}$.

g) Mit welchem Faktor wird die Amplitude des Signals bei der Frequenz $1250\,\mathrm{Hz}$ gedämpft? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

h) Nennen Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen der diskreten Fourier-Transformation und der Fourier-Transformation. *(2 Punkte)*

i) Berechnen Sie für die zeitdiskrete Wertefolge

$$x_n = 0, 1, 2, 3, 2, 1$$

die diskrete Fourier-Transformierte (6-Punkte-DFT). Vereinfachen Sie so weit wie möglich. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die Lösung kann durch Umschreiben des Produkts zweier trigonometrischer Funktionen zu

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(2\pi\, 1\,\mathrm{Hz}\; t) + \sin(2\pi\, 5\,\mathrm{Hz}\; t)\right)$$

und anschließender Fourier-Transformation oder durch Faltung der Fourier-Transformierten erfolgen. Beide Lösungswege führen zu:

$$X_1(f) = \frac{\mathrm{j}}{4}\left(\delta(f + 1\,\mathrm{Hz}) - \delta(f - 1\,\mathrm{Hz}) + \delta(f + 5\,\mathrm{Hz}) - \delta(f - 5\,\mathrm{Hz})\right) .$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Die Fourier-Transformierte $X_1(f)$ ist in Abbildung L4 dargestellt. ***(Σ: 1 Punkt)***

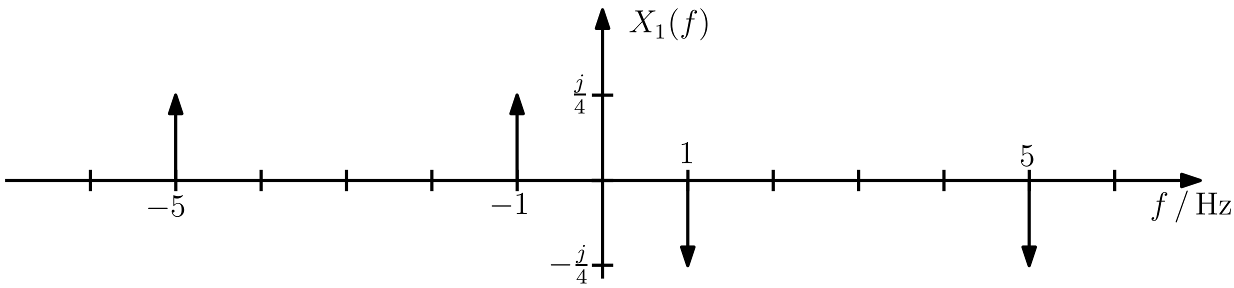

Abbildung L4: Fourier-Transformierte $X_1(f)$ des Signals $x_1(t)$.

c) Mit der Abtastfrequenz von $6\,\mathrm{Hz}$ liegt eine Verletzung des Abtasttheorems vor. Folglich tritt Aliasing auf. ***(Σ: 1 Punkt)***

d) Die Dirac-Impulse überlagern sich derart, dass sie sich aufheben, was in Abbildung L5 ersichtlich wird. Daher ist das Spektrum des abgetasteten Signals gleich null.

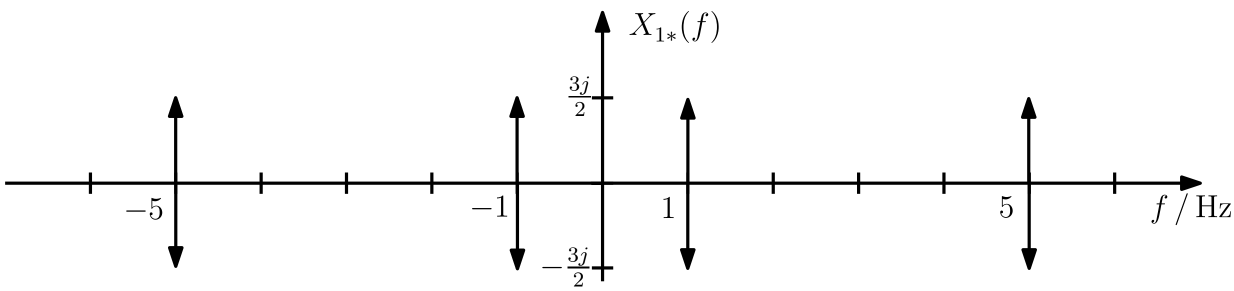

Abbildung L5: Spektrum $X_{1*}(f)$ des abgetasteten Signals.

(Σ: 2 Punkte)

e) Die maximal auftretende Nutzfrequenz beträgt $1000\,\mathrm{Hz}$. Der Störanteil reicht bis zu einer Frequenz von $1500\,\mathrm{Hz}$. Die Abtastfrequenz muss jetzt derart gewählt werden, dass sich die Nutz- und Störanteile der sich periodisch wiederholenden Spektren nicht überdecken. Dies ist erfüllt, wenn die Abtastfrequenz zu $2500\,\mathrm{Hz}$ gewählt wird. In diesem Fall reicht der Störanteil der ersten periodischen Wiederholung des Spektrums bis $f_\mathrm{A} - f_\mathrm{max} = 2500\,\mathrm{Hz} - 1500\,\mathrm{Hz} = 1000\,\mathrm{Hz}$, sodass der Nutzanteil des Originalspektrums nicht überdeckt wird. ***(Σ: 2 Punkte)***

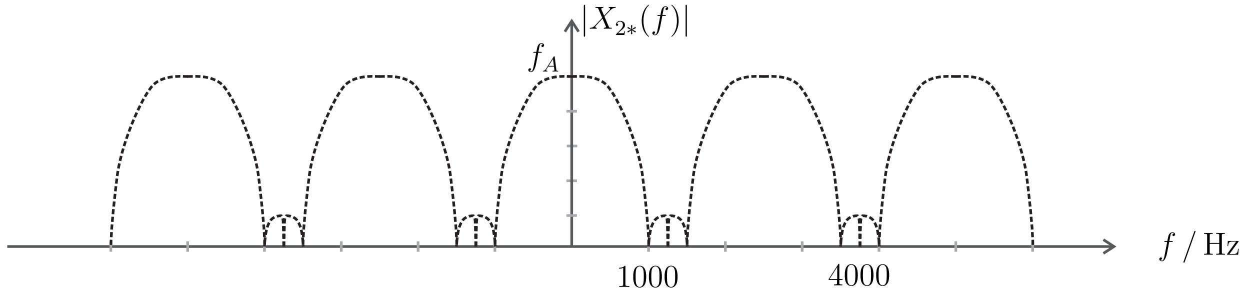

Abbildung L6: Amplitudengang des abgetasteten Signals $x_{2*}(t)$.

f) Der Frequenzgang bei Abtastung mit $2500\,\mathrm{Hz}$ hat die in Abbildung L6 ersichtliche Form. ***(Σ: 2 Punkte)***

g) Es wird der Frequenzgang des Filters betrachtet. Für den Amplitudengang gilt mit $s = \mathrm{j}\,2\pi f$:

$$A_F(f) = \left| \frac{2\pi f_\mathrm{G}}{2\pi f_\mathrm{G} + \mathrm{j}\,2\pi f} \right| .$$

Die geforderte Frequenz $f = 1250\,\mathrm{Hz}$ entspricht der Grenzfrequenz f_G :

$$A_F(f = 1250\,\mathrm{Hz}) = \left| \frac{2\pi f_G}{2\pi f_G + \mathrm{j}\,2\pi f_G} \right| = \left| \frac{1}{1+\mathrm{j}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

(Σ: 2 Punkte)

h) Die DFT ist eine Näherung der Fourier-Transformation zur rechnergestützten Signalverarbeitung. Sie nutzt statt eines kontinuierlichen Signals eine Wertefolge mit endlich vielen Werten (Beobachtungszeitraum). Zudem wird auch die Transformierte diskretisiert. ***(Σ: 2 Punkte)***

i) Für die DFT ($N = 6$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Y_k &= \sum_{n=0}^{5} y_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{n}{6}} = \\
&= 1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{6}} + 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{2}{6}} + 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{3}{6}} + 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{4}{6}} + 1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{5}{6}} \\
&= 1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k \frac{1}{3}} + 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k \frac{2}{3}} + 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k} + 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi k \frac{2}{3}} + 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi k \frac{1}{3}} \\
&= 2\cos(\pi \frac{k}{3}) + 4\cos(\pi \frac{2k}{3}) + 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} \\
&= 2\cos(\pi \frac{k}{3}) + 4\cos(\pi \frac{2k}{3}) + 3 \cdot (-1)^k
\end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (16 Punkte)

Ein kausales, zeitdiskretes LTI-System sei durch folgende Differenzengleichung definiert:

$$20y_{\mathrm{a},n} = 4y_{\mathrm{a},n-1} - y_{\mathrm{a},n-2} + y_{\mathrm{e},n-2} - \tfrac{1}{4}y_{\mathrm{e},n-3}\,.$$

Die Anfangswerte des Systems sind null.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ des Systems. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems. *(2 Punkte)*

c) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm. *(1 Punkt)*

d) Ist das System stabil? (Begründung!) *(1 Punkt)*

e) Können Sie ohne Rücktransformation eine Aussage über das Verhalten der Impulsantwort für $n = 0$ treffen? (Begründung!) *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Es ist die folgende Übertragungsfunktion gegeben:

$$G_2(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\frac{1}{z-2}\,.$$

f) Geben Sie die Konvergenzgebiete der z-Transformation an. *(2 Punkte)*

g) Bestimmen Sie die jeweiligen Rücktransformierten für sämtliche Konvergenzgebiete durch Rückführung auf geometrische Reihen. *(6 Punkte)*

Lösung

a) Die Berechnung der Übertragungsfunktion $G_1(z)$ erfolgt zu:

$$\begin{aligned}
Y_\mathrm{a}(z)\left(20 - 4z^{-1} + z^{-2}\right) &= Y_\mathrm{e}(z)\left(z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}\right) \\
G_2(z) = \frac{Y_\mathrm{a}(z)}{Y_\mathrm{e}(z)} &= \frac{z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}{20 - 4z^{-1} + z^{-2}} \\
&= \frac{z - \frac{1}{4}}{20z^3 - 4z^2 + z}\,.
\end{aligned}$$

(Σ***: 2 Punkte)***

b) Die Nullstelle liegt bei: $z_0 = \frac{1}{4}$.
Die Polstellen lauten: $20\,z^3 - 4\,z^2 + z = z\,(20\,z^2 - 4\,z + 1) = 0$

$$z_{\infty,1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 20}}{40} = \frac{1}{10} \pm \frac{\sqrt{-64}}{40} = \frac{1}{10} \pm \mathrm{j}\,\frac{1}{5}$$

$\rightarrow z_{\infty,1} = \frac{1}{10} + \mathrm{j}\,\frac{1}{5}\,, \quad z_{\infty,2} = \frac{1}{10} - \mathrm{j}\,\frac{1}{5}\,, \quad z_{\infty,3} = 0\,.$ (Σ***: 2 Punkte)***

c) Das Pol-Nullstellen-Diagramm ist in Abbildung L7 dargestellt. (Σ***: 1 Punkt)***

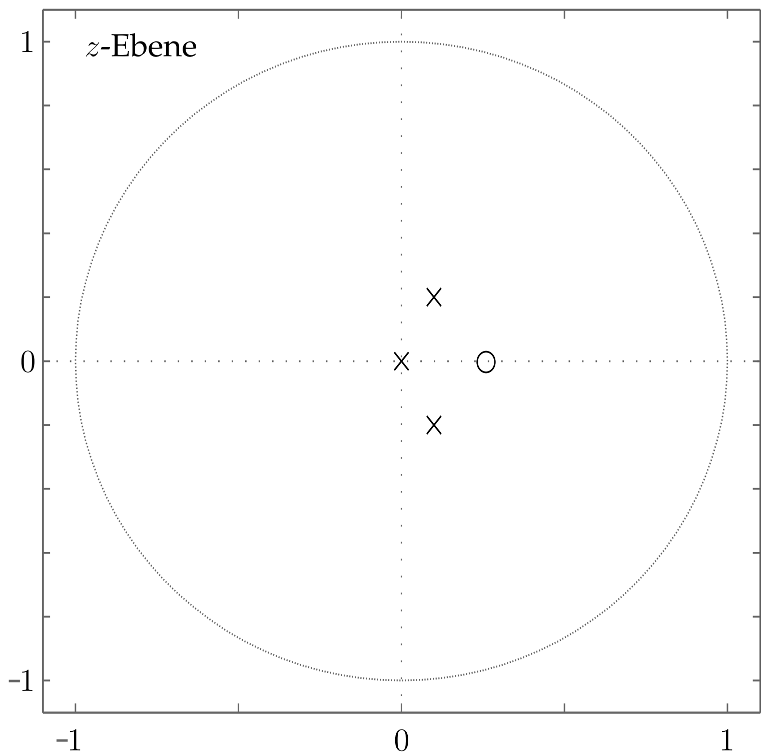

Abbildung L7: Pol-Nullstellen-Diagramm.

d) Bedingung für Stabilität: $|z_{\infty,i}| < 1$, was laut Abbildung L7 für alle Polstellen erfüllt ist. Damit ist das System stabil. (Σ***: 1 Punkt)***

e) Ja, denn die Anzahl der Polstellen ist um zwei größer als die Anzahl der Nullstellen. Somit liegt eine Verzögerung der Impulsantwort um zwei Zeitschritte vor. Daher nimmt die Impulsantwort bei $n = 0$ den Wert 0 an. (Σ***: 2 Punkte)***

f) Die Pole der z-Transformierten sind $\frac{1}{2}$ und 2, woraus sich die verschiedenen Konvergenzgebiete bestimmen:

- Konvergenzgebiet $|z| < \frac{1}{2}$,
- Konvergenzgebiet $|z| > 2$,
- Konvergenzgebiet $\frac{1}{2} < |z| < 2$. *(Σ: **2 Punkte**)*

g) Die jeweiligen Rücktransformierten werden mittels der Rückführung auf die geometrische Reihe bestimmt.

(a) **Konvergenzgebiet** $|z| < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} G_2(z) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3}\frac{-2}{1-2z} + \frac{4}{3}\frac{-\frac{1}{2}}{1-z/2} \\ &= -\frac{1}{3}(-2)\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n . \end{aligned}$$

Da

$$G_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

gelten soll, folgt für die Zeitfolge:

$$g_{2,n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma_{-n} - \frac{4}{3}2^{n-1}\sigma_{-n} .$$

(b) **Konvergenzgebiet** $|z| > 2$:

$$\begin{aligned} G_2(z) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3}\frac{1/z}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{4}{3}\frac{1/z}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \frac{4}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n . \end{aligned}$$

Es folgt die Zeitfolge:

$$g_{2,n} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma_{n-1} + \frac{4}{3}2^{n-1}\sigma_{n-1}.$$

(c) **Konvergenzgebiet** $\frac{1}{2} < |z| < 2$:

$$\begin{aligned} G_2(z) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{4}{3}\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n-1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{2}{z}\right)^n . \end{aligned}$$

Hieraus kann wiederum die Zeitfolge entnommen werden:

$$g_{2,n} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma_{n-1} - \frac{4}{3}2^{n-1}\sigma_{-n} .$$

*(Σ: **6 Punkte**)*