Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
02. August 2018

Musterlösung

Aufgabe 1: 16
Aufgabe 2: 18
Aufgabe 3: 17
Aufgabe 4: 15

Gesamtpunkte: 66

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (16 Punkte)

Gegeben sei das in Abbildung 1 dargestellte Signal $y_1(t)$.

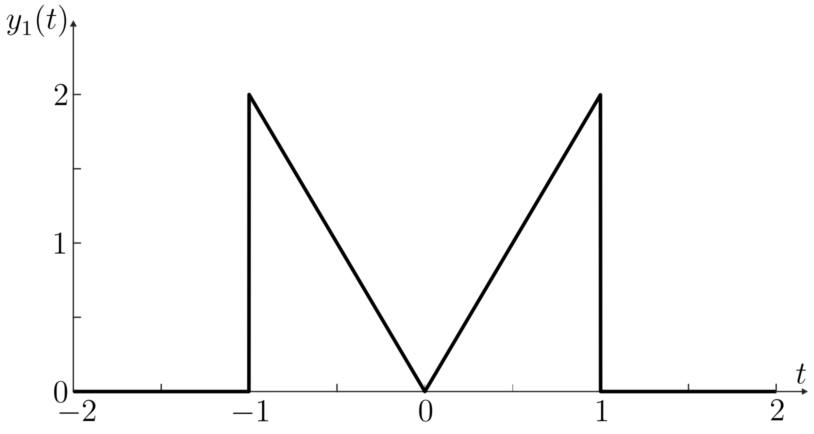

Abbildung 1: Signal $y_1(t)$.

a) Nennen Sie zwei Eigenschaften der Fourier-Transformierten von $y_1(t)$, die direkt aus dem Verlauf von $y_1(t)$ folgen. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $Y_1(f)$ des Signals $y_1(t)$ **ohne Verwendung des Fourier-Integrals.** *(3 Punkte)*

c) Das Signal $y_2(t)$ entstehe aus Multiplikation des Signals $y_1(t)$ mit $\sin(2\pi \cdot 3t)$. Skizzieren Sie das Signal $y_2(t)$ im Bereich $-2 \leq t \leq 2$. Verwenden Sie die gesamte Seitenbreite für Ihre Skizze! *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $Y_2(f)$ des Signals $y_2(t)$. *(2 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben seien die in Abbildung 2 dargestellten Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$, die jeweils im Bereich $t \in [0,1]$ definiert sind.

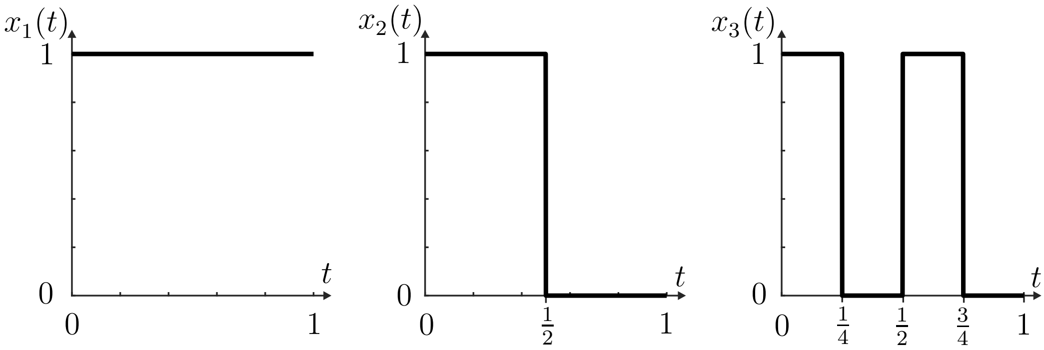

Abbildung 2: Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$.

Es gelten folgende Definitionen:

$$x_1(t) = 1\,,$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}\,,$$

$$x_3(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ 1 & , \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}\,.$$

e) Aus den gegebenen Funktionen soll ein orthonormales Basissystem im Intervall $[0,1]$ erzeugt werden. Wenden Sie das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren an und berechnen Sie die Basisfunktionen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ und $\phi_3(t)$. *(5 Punkte)*

f) Skizzieren Sie die berechneten Basisfunktionen. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Es lassen sich folgende Aussagen über $Y_1(f)$ treffen:

- $y_1(t)$ ist reellwertig und gerade $\quad\rightarrow\quad$ $Y_1(f)$ ist reellwertig und gerade,
- $y_1(t) \geq 0 \quad\rightarrow\quad |Y_1(f)| \leq Y_1(0)$.

b) Das Signal $y_1(t)$ lässt sich mit Hilfe einer Rechteckfunktion beschreiben, von der eine Dreieckfunktion subtrahiert wird:

$$y_1(t) = 2 \cdot r_2(t) - 2 \cdot d_2(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= 2 \cdot 2\,\mathrm{sinc}(f \cdot 2) - 2 \cdot \frac{2}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f \cdot \frac{2}{2}) \\ &= 4\,\mathrm{sinc}(2f) - 2\,\mathrm{sinc}^2(f)\,. \end{aligned}$$

c) Das Signal $y_2(t)$ ist in Abbildung L1 illustriert. Aus der Skizze sollen die Anzahl der Perioden und die durch das Signal $y_1(t)$ festgelegte Einhüllende ersichtlich werden. Der exakte Verlauf um $t = 0$ herum ist nicht verlangt.

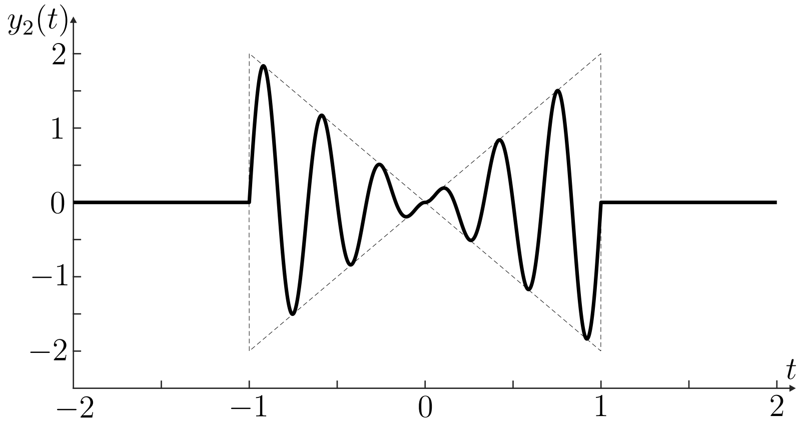

Abbildung L1: Signal $y_2(t)$.

d) Eine Modulation im Zeitbereich bewirkt eine Verschiebung im Frequenzbereich. Die Fourier-Transformierte $Y_2(f)$ lässt sich berechnen aus:

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot \sin(2\pi \cdot 3t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned} Y_2(f) &= Y_1(f) * \frac{\mathrm{j}}{2}(\delta(f+3) - \delta(f-3)) \\ &= \mathrm{j}(2\,\mathrm{sinc}(2(f+3)) - \mathrm{sinc}^2(f+3) - 2\,\mathrm{sinc}(2(f-3)) + \mathrm{sinc}^2(f-3))\,. \end{aligned}$$

e) Zunächst erfolgt die Berechnung der Norm von $x_1(t)$, mit der sich direkt die erste Basisfunktion $\phi_1(t)$ ergibt:

$$||x_1(t)|| = \sqrt{\int_0^1 x_1(t)x_1^*(t)\mathrm{d}t} = 1$$
$$\rightarrow \phi_1(t) = \frac{x_1(t)}{||x_1(t)||} = 1\,.$$

Für die zweite Basisfunktion muss zunächst das Innenprodukt von $x_2(t)$ und $\phi_1(t)$ berechnet werden:

$$\langle x_2(t), \phi_1(t)\rangle_t = \int_0^1 x_2(t)\phi_1^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,.$$

Es ergibt sich die Hilfsfunktion

$$h_2(t) = x_2(t) - \frac{1}{2}\phi_1(t)\,.$$

Mit Normierung folgt:

$$\begin{aligned}||h_2(t)|| &= \sqrt{\int_0^1 h_2(t)h_2^*(t)\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
$$\rightarrow \phi_2(t) = \frac{h_2(t)}{||h_2(t)||} = \begin{cases} 1 & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -1 & , \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}\,.$$

Für die dritte Basisfunktion müssen zwei Innenprodukte berechnet werden:

$$\langle x_3(t), \phi_1(t)\rangle_t = \int_0^1 x_3(t)\phi_1^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$
$$\langle x_3(t), \phi_2(t)\rangle_t = \int_0^1 x_3(t)\phi_2^*(t)\mathrm{d}t = 0\,.$$

Die Hilfsfunktion ergibt sich zu:

$$h_3(t) = x_3(t) - \frac{1}{2}\phi_1(t)\,.$$

Mit Normierung folgt:

$$\begin{aligned}||h_3(t)|| &= \sqrt{\int_0^1 h_3(t)h_3^*(t)\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
$$\rightarrow \phi_3(t) = \frac{h_3(t)}{||h_3(t)||} = \begin{cases} 1 & , 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ -1 & , \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ -1 & , \frac{3}{4} < t < 1 \end{cases}\,.$$

f) Die orthonormalen Basisfunktionen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ und $\phi_3(t)$ sind in Abbildung L2 dargestellt.

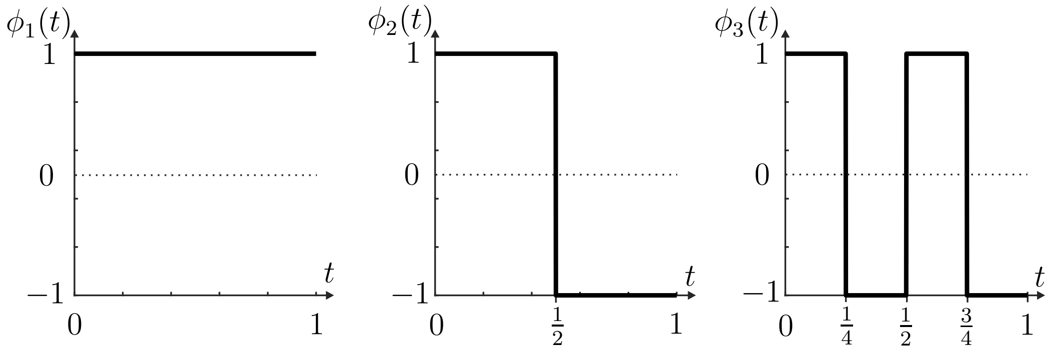

Abbildung L2: Funktionen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ und $\phi_3(t)$.

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (18 Punkte)

Gegeben sei der in Abbildung 3 gezeigte Pol-Nullstellen-Plan eines LTI-Systems.

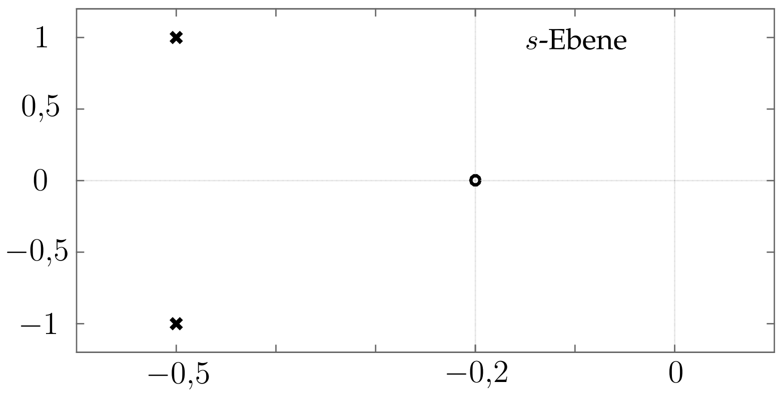

Abbildung 3: Pol-Nullstellen-Plan.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Systems. Die stationäre Verstärkung des Systems soll 1 betragen. *(3 Punkte)*

b) Welchen Wert nimmt die Impulsantwort an der Stelle $t = 0$ an? *(1 Punkt)*

c) Welchen Wert nimmt die Impulsantwort für $t \to \infty$ an? *(1 Punkt)*

d) Skizzieren Sie die Impulsantwort qualitativ. *(3 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das in Abbildung 4 gezeigte zeitkontinuierliche System mit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

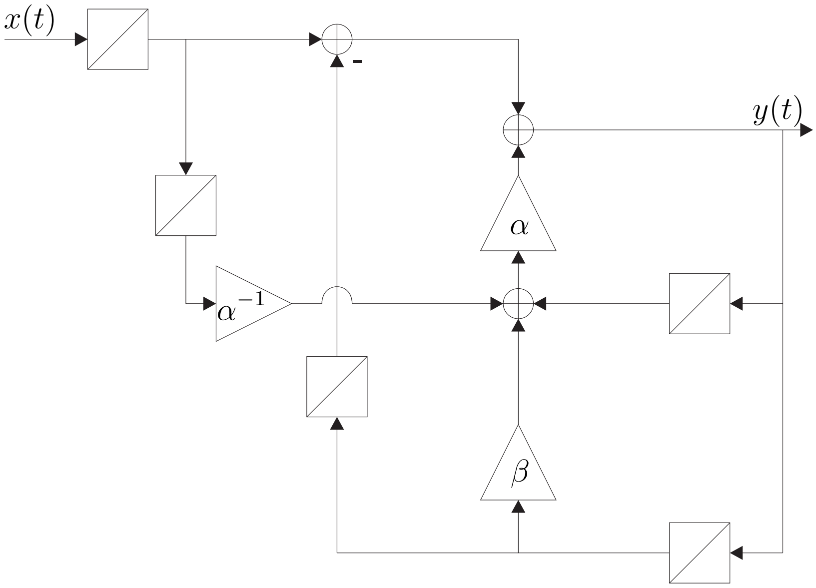

Abbildung 4: Zeitkontinuierliches System.

e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems. *(3 Punkte)*

f) Für welche Werte von α und β ist das System stabil? Existieren nicht schwingungsbehaftete stabile Impulsantworten $g(t)$? *(2 Punkte)*

g) Zeichnen Sie einen Signalflussplan in ARMA-Darstellung. *(2 Punkte)*

h) Wählen Sie sinnvolle Zustandsgrößen und berechnen Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Aus dem Pol-Nullstellen-Plan lässt sich ablesen:

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{1}{5}\,, \\ s_{\infty,1} &= -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,, \\ s_{\infty,2} &= -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} G(s) &= K \cdot \frac{s + \frac{1}{5}}{(s + \frac{1}{2} - \mathrm{j})(s + \frac{1}{2} + \mathrm{j})} \\ &= K \cdot \frac{s + \frac{1}{5}}{s^2 + s + \frac{5}{4}}\ . \end{aligned}$$

Die stationäre Verstärkung soll $G(0) = 1$ betragen, sodass folgt: $K = \frac{25}{4}$.

b) Mit Hilfe des Anfangswertsatzes folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0+} g(t) &= \lim_{s \to \infty} s \cdot G(s) \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{25}{4} \frac{s(s + \frac{1}{5})}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \\ &= \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

c) Mit Hilfe des Endwertsatzes folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} g(t) &= \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{25}{4} \frac{s(s + \frac{1}{5})}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

d) Abbildung L3 zeigt die Impulsantwort. Gefordert ist hier nur der qualitative Verlauf unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben **b)** und **c)** sowie der Lage der Pol- und Nullstellen. Die Charakteristik eines gedämpft schwingbaren Systems muss aus der Skizze ersichtlich werden.

e) Aus dem Signalflussplan folgt:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \alpha \left(\frac{1}{s} Y(s) + \beta \frac{1}{s} Y(s) + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s^2} X(s) \right) + \frac{1}{s} X(s) - \frac{1}{s^2} Y(s) \\ Y(s)\left(1 - \alpha s - \alpha\beta s + s^2\right) &= X(s)\,(1 + s) \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + s}{s^2 - (\alpha + \alpha\beta)s + 1}\ . \end{aligned}$$

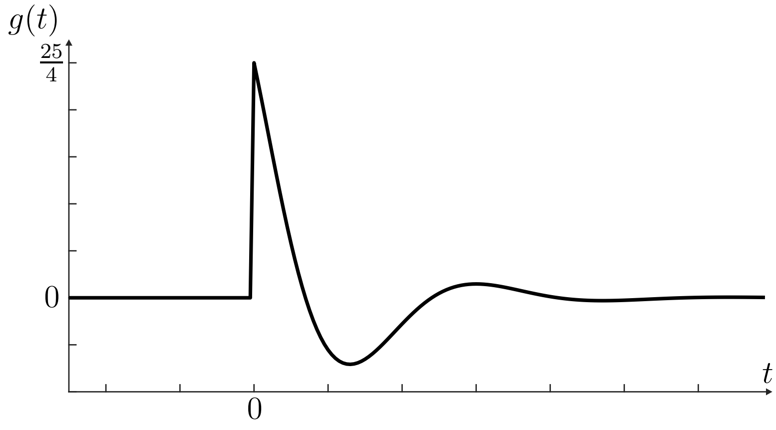

Abbildung L3: Impulsantwort $g(t)$.

f) Mit den Polen $s_{\infty,1}$ und $s_{\infty,2}$ ergibt sich Stabilität für:

$\frac{(\alpha+\alpha\beta)^2}{4} - 1 < 0$**:** Konjugiert komplexes Polpaar, stabil für

$$\alpha + \alpha\beta < 0.$$

$\frac{(\alpha+\alpha\beta)^2}{4} - 1 \geq 0$**:** Reellwertiges Polpaar, stabil für

$$\frac{\alpha(1+\beta)}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha(1+\beta))^2}{4} - 1} < 0$$

Es sind folglich stabile, nicht schwingungsbehaftete Impulsantworten möglich.

g) Abbildung L4 zeigt den Signalflussplan in ARMA-Form:

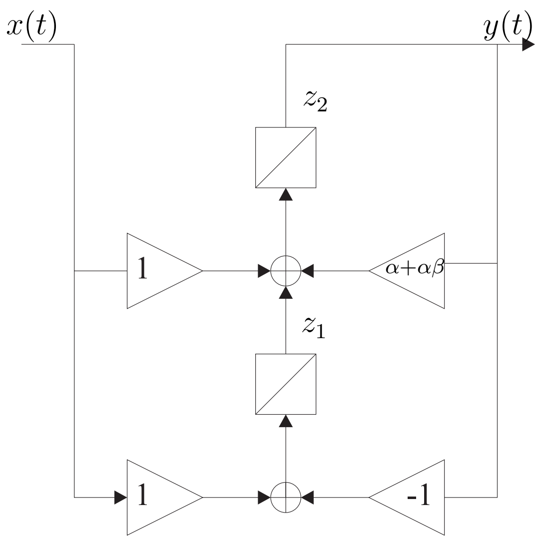

Abbildung L4: ARMA-Darstellung des Systems.

h) Da die höchste in der Übertragungsfunktion vorkommende Potenz s^2 ist, werden zwei Integratoren und folglich zwei Zustandsgrößen benötigt.

Mit den in Abbildung L4 eingezeichneten Zustandsgrößen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2(t) &= x(t) + (\alpha + \alpha\beta)y(t) + z_1(t)\\ \dot{z}_1(t) &= -y(t) + x(t)\\ y(t) &= z_2(t)\,.\end{aligned}$$

Es folgt die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (\alpha + \alpha\beta) \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x(t)\\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (17 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_1(t) = \operatorname{sinc}^2(4t)$.

a) Das Signal $y_1(t)$ werde zu den Zeitpunkten $t = \frac{k}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ abgetastet. Geben Sie das abgetastete Signal $y_{1,n}$ an und skizzieren Sie es. *(2 Punkte)*

b) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum des zeitkontinuierlichen Signals $y_1(t)$ und des zeitdiskreten Signals $y_{1,n}$ im Bereich $-6 \leq f \leq 6$. *(3 Punkte)*

c) Wie muss die Abtastrate gewählt werden, sodass das Signal $y_1(t)$ fehlerfrei rekonstruiert werden kann? *(1 Punkt)*

d) Es sei nun das Rekonstruktionsfilter mit dem in Abbildung 5 dargestellten Amplitudengang zu verwenden. Für $|f| > 7$ sei $|G_\mathrm{F}(f)| = 0$. Was gilt für die Abtastrate, wenn dieses Filter eine fehlerfreie Rekonstruktion ermöglichen soll? *(1 Punkt)*

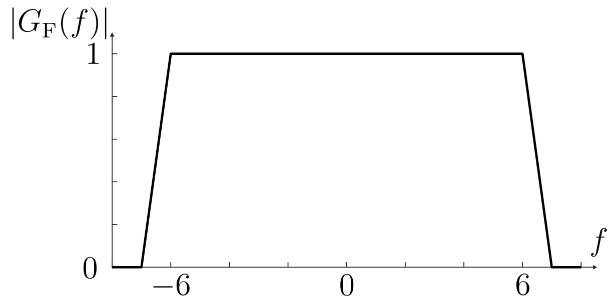

Abbildung 5: Amplitudengang des Filters.

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal $y_{2,n} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

e) Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $Y_{2,k}$ des Signals $y_{2,n}$ allgemein in Abhängigkeit von k. *(3 Punkte)*

f) Berechnen Sie nun die Werte von $Y_{2,k}$ für $k = 0$ bis $k = 7$. *(3 Punkte)*

g) Skizzieren Sie $\left|Y_{2,k}\right|$ für $k = 0$ bis $k = 7$. *(2 Punkte)*

h) Tritt hier der Leckeffekt auf? **(Begründung!)** *(2 Punkte)*

Lösung

a) Das zu untersuchende zeitkontinuierliche Signal ist in Abbildung L5 dargestellt (nicht verlangt). Bei der angegebenen Wahl der Abtastzeitpunkte wird lediglich zum Zeitpunkt $t = 0$ ein von null verschiedener Wert erfasst. Es gilt: $y_{1,n} = \delta_n$. Abbildung L6 zeigt das zeitdiskrete Signal.

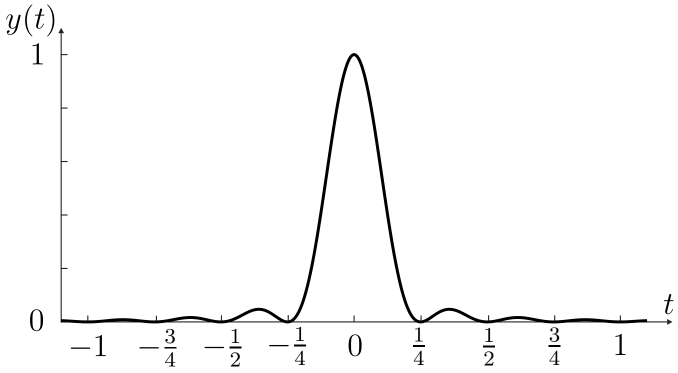

Abbildung L5: Zeitkontinuierliches Signal $y_1(t)$.

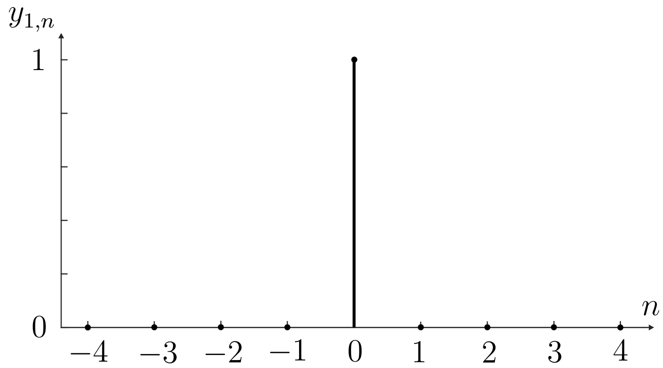

Abbildung L6: Zeitdiskretes Signal $y_{1,n}$.

b) Die Fourier-Transformierte des zeitkontinuierlichen Signals kann der Transformationstabelle entnommen werden:

$$y_1(t) = \mathrm{sinc}^2(4t)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$
$$Y_1(f) = \frac{1}{4} d_8(f)\,.$$

Die Betragsspektren sind in Abbildung L7 dargestellt.

c) Das Spektrum von $y_1(t)$ verschwindet ab der Frequenz $f_{\max} = 4$, sodass eine Abtastfrequenz von $f_\mathrm{A} \geq 8$ zur Vermeidung von Aliasing erforderlich ist.

d) Bei Verwendung des in Abbildung 5 dargestellten Filters muss sichergestellt werden, dass periodische Wiederholungen des Spektrums $|Y_1(f)|$ nur außerhalb des Bereichs $-7 \leq f \leq 7$ liegen, was mit einer Abtastfrequenz von $f_\mathrm{A} \geq 11$ der Fall ist.

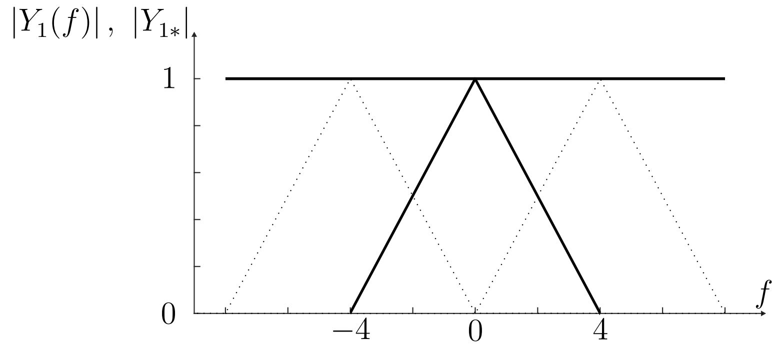

Abbildung L7: Betragsspektren $|Y_1(f)|$, dessen periodische Fortsetzung (gestrichelt) und $|Y_{1*}|$.

e) Es wird die DFT mit $N = 8$ berechnet:

$$
\begin{aligned}
Y_{2,k} &= \sum_{n=0}^{N-1} y_{2,n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\frac{kn}{N}} \\
&= 0\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{0}{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{1}{8}} + 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{2}{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{3}{8}} + \\
&\qquad + 0\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{4}{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{5}{8}} - 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{6}{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{7}{8}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{1}{8}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k\frac{1}{8}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{3}{8}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k\frac{3}{8}}\right) + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{2}{8}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k\frac{2}{8}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\,\mathrm{j}\cdot\sin\left(2\pi k\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\,\mathrm{j}\cdot\sin\left(2\pi k\frac{3}{8}\right) - 2\,\mathrm{j}\cdot\sin\left(2\pi k\frac{2}{8}\right) \\
&= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right)\right) - 2\,\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

f) Es werden nun die entsprechenden Werte für k eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
Y_{2,0} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot(0+0) - 2\,\mathrm{j}\cdot 0 = 0 \\
Y_{2,1} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\,\mathrm{j}\cdot 1 = -2\,\mathrm{j} - 2\,\mathrm{j} = -4\,\mathrm{j} \\
Y_{2,2} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot(1-1) - 2\,\mathrm{j}\cdot 0 = 0 \\
Y_{2,3} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\,\mathrm{j}\cdot(-1) = 0 \\
Y_{2,4} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot(0+0) - 2\,\mathrm{j}\cdot 0 = 0 \\
Y_{2,5} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\,\mathrm{j}\cdot 1 = 0 \\
Y_{2,6} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot(-1+1) - 2\,\mathrm{j}\cdot 0 = 0 \\
Y_{2,7} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{j}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\,\mathrm{j}\cdot(-1) = 2\,\mathrm{j} + 2\,\mathrm{j} = 4\,\mathrm{j} .
\end{aligned}
$$

g) Die Skizze ist in Abbildung L8 zu sehen.

h) Nein, in diesem Fall tritt kein Leckeffekt auf. Die zugrunde liegende Signalfrequenz wird korrekt erfasst, da exakt eine Periode des Signals abgetastet wird.

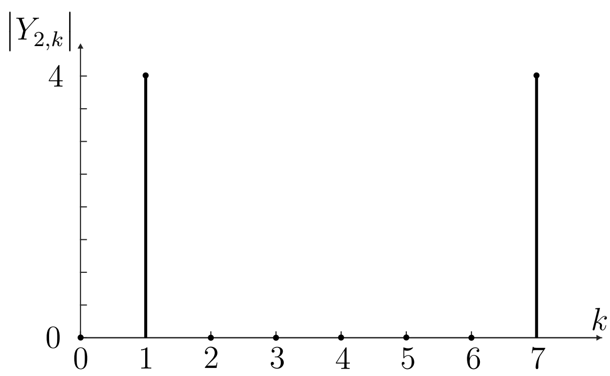

Abbildung L8: Betragsspektrum $|Y_{2,k}|$.

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (15 Punkte)

Gegeben sei die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2+4s+3}$.

a) Stellen Sie das System zeitdiskret dar durch Anwendung der Rechteckregel rückwärts. Dabei sei $t_\mathrm{A} = 1$. *(3 Punkte)*

b) Zeichnen Sie den Pol-Nullstellen-Plan des zeitdiskreten Systems. *(3 Punkte)*

c) Ist das zeitdiskrete System stabil? *(1 Punkt)*

d) Das zeitdiskrete System werde nun in Reihe geschaltet mit einem System der Übertragungsfunktion:

$$G_2(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(z - \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Zeichnen Sie den Pol-Nullstellen-Plan der Reihenschaltung. *(2 Punkte)*

e) Welche Aussage können Sie über das Systemverhalten der Reihenschaltung bei der Frequenz $f = \frac{1}{8t_\mathrm{A}}$ treffen? (Keine Rechnung erforderlich!) *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das in Abbildung 6 dargestellte Ein-/Ausgangssignalpaar eines kausalen zeitdiskreten LTI-Systems.

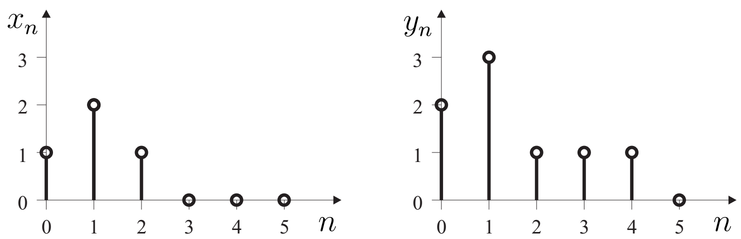

Abbildung 6: Eingangssignal x_n und Ausgangssignal y_n des zeitdiskreten Systems.

f) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Die Übertragung der Systemfunktion erfolgt durch Einsetzen von $s = \frac{z-1}{zt_\mathrm{A}}$. Laut Angabe ist $t_\mathrm{A} = 1$.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\left(\frac{z-1}{zt_\mathrm{A}}\right)^2 + 1}{\left(\frac{z-1}{zt_\mathrm{A}}\right)^2 + 4\frac{z-1}{zt_\mathrm{A}} + 3} \\ &= \frac{2z^2 - 2z + 1}{8z^2 - 6z + 1}\,. \end{aligned}$$

b) Die Nullstellen liegen bei $z_{0,1/2} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{j}\,\frac{1}{2}$, die Polstellen bei $z_{\infty,1} = \frac{1}{2}$ und $z_{\infty,2} = \frac{1}{4}$. Der sich ergebende Pol-Nullstellen-Plan ist in Abbildung L9 zu sehen.

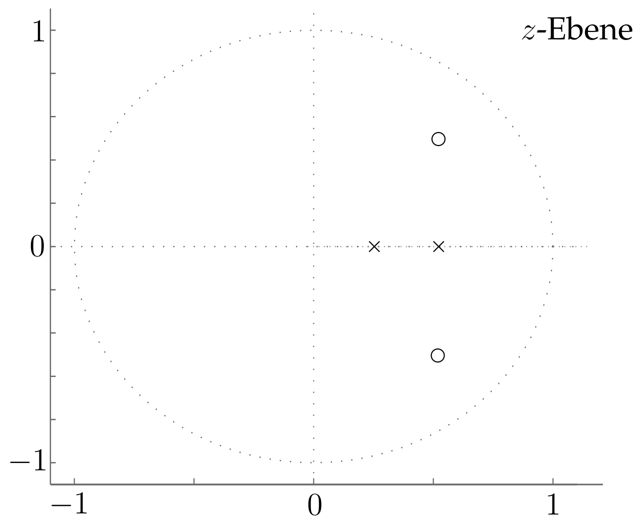

Abbildung L9: Pol-Nullstellen-Plan des zeitdiskreten Systems.

c) Das System ist stabil, denn alle Polstellen liegen innerhalb des Einheitskreises.

d) Die Übertragungsfunktion der Reihenschaltung ergibt sich aus Multiplikation der einzelnen Übertragungsfunktionen. Der sich ergebende Pol-Nullstellen-Plan ist in Abbildung L10 zu sehen.

e) Bei der Berechnung des Amplitudengangs fällt auf, dass die zu betrachtende Frequenz $f = \frac{1}{8t_\mathrm{A}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_\mathrm{A}}{2}$ genau am Ort der Nullstelle liegt. Folglich ist der Übertragungsfaktor für diese Frequenz null.

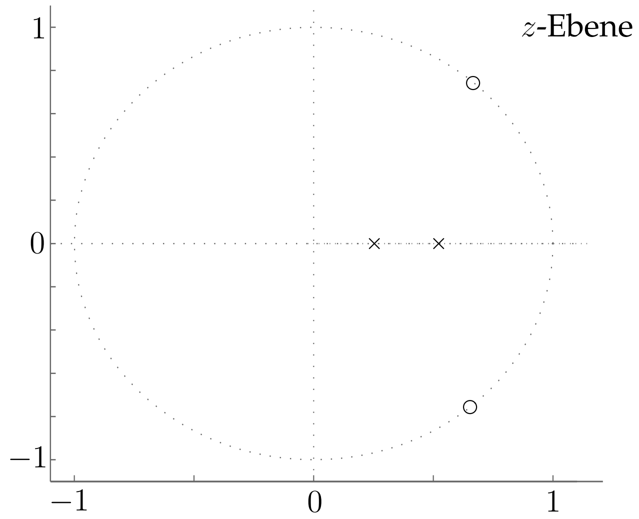

Abbildung L10: Pol-Nullstellen-Plan der Reihenschaltung.

f) Durch z-Transformation von Eingangs- und Ausgangssignal kann die Berechnung der Übertragungsfunktion erfolgen. Aus deren Rücktransformation ergibt sich die Impulsantwort:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2} \\
y_n &= 2\delta_n + 3\delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-3} + \delta_{n-4} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(z) = \frac{2z^4 + 3z^3 + z^2 + z + 1}{z^4} \\
G(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(2z^2 - z + 1\right)(z+1)^2 z^2}{(z+1)^2 z^4} \\
&= \frac{2z^2 - z + 1}{z^2} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\; g_n = 2\delta_n - \delta_{n-1} + \delta_{n-2}\,.
\end{aligned}
$$