

**Institut für  
Industrielle Informationstechnik  
Karlsruher Institut für Technologie  
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León**

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35  
76187 Karlsruhe  
Tel.: 0721 / 608 44521  
Fax: 0721 / 608 44500

**Klausur im Fach  
Signale und Systeme  
02. August 2019**

**Musterlösung**

Aufgabe 1: 18

Aufgabe 2: 17

Aufgabe 3: 17

Aufgabe 4: 16

Gesamtpunkte: 68

## Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (18 Punkte)

Gegeben sei das in Abbildung 1 dargestellte Signal  $y_1(t)$ , welches aus einer amplitudenmodulierten Cosinusfunktion mit Periodendauer  $T = \frac{1}{5}$  entsteht. Die Hüllkurve des Signals wird durch den Zusammenhang  $y_h(t) = e^{-\frac{\pi}{2}t^2}$  beschrieben.

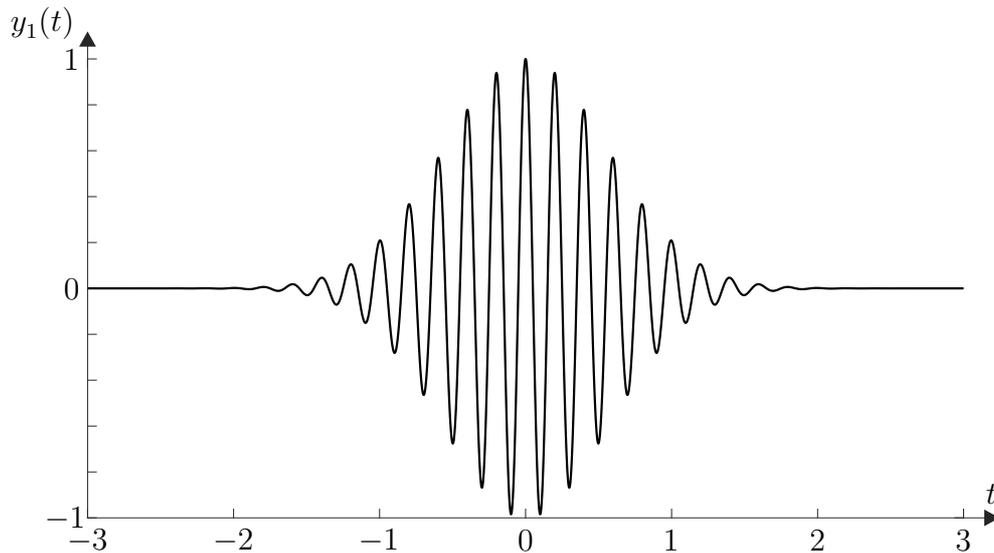


Abbildung 1: Signal  $y_1(t)$ .

- Geben Sie die mathematische Beschreibung des Signals  $y_1(t)$  an. (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass es sich bei dem Signal  $y_1(t)$  um ein Energiesignal handelt.  
**Hinweis:**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ . (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Fourier-Transformierte  $Y_1(f)$  des Signals  $y_1(t)$  **ohne Verwendung des Fourier-Integrals**. (3 Punkte)
- Skizzieren Sie das Betragsspektrum  $|Y_1(f)|$ . (2 Punkte)
- Das Signal  $y_1(t)$  werde nun quadriert, sodass sich das Signal  $y_2(t)$  ergibt. Skizzieren Sie das Betragsspektrum  $|Y_2(f)|$  des Signals  $y_2(t)$  **qualitativ**. Eine Rechnung ist nicht verlangt. Aus der Skizze sollen die Lage der entstehenden Frequenzbänder und die Amplitudenverhältnisse hervorgehen. (3 Punkte)

**Bitte Rückseite beachten!**

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben seien die in Abbildung 2 gezeigten Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$ , die nur im Intervall  $-1 \leq t \leq 1$  definiert sind.

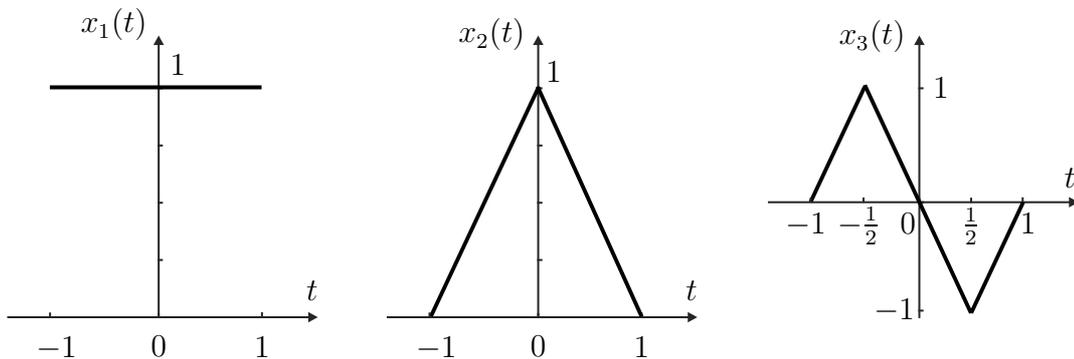


Abbildung 2: Verlauf der Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$ .

- f) Es soll aus den Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  eine orthonormale Basis im Intervall  $-1 \leq t \leq 1$  erzeugt werden. Mit dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren wurden hierfür bereits die ersten beiden Basisfunktionen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  berechnet:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{6} \left(t + \frac{1}{2}\right), & -1 \leq t < 0 \\ \sqrt{6} \left(\frac{1}{2} - t\right), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Berechnen Sie die dritte Basisfunktion  $\varphi_3(t)$ .

(4 Punkte)

- g) Das Signal  $y_3(t) = t^2$  soll im Intervall  $-1 \leq t \leq 1$  mit Hilfe der Basisfunktionen  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  und  $\varphi_3(t)$  approximiert werden. Berechnen Sie die hierfür notwendigen Koeffizienten.

(3 Punkte)

## Lösung

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= y_h(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{T}t\right) \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}t^2} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t).\end{aligned}$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

b) Das Signal  $y_1(t)$  ist ein Energiesignal, wenn es die Bedingung  $\int_{-\infty}^{\infty} |y_1(t)|^2 dt < \infty$  erfüllt. Einsetzen von  $y_1(t)$  liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}t^2 \cdot 2} \cdot \cos^2(2\pi \cdot 5 \cdot t) dt.$$

Es gilt:  $0 \leq \cos^2(2\pi \cdot 5 \cdot t) \leq 1, \forall t$ , sodass die Auswertung der Ungleichung anhand der Einhüllenden erfolgen kann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1 < \infty.$$

Somit ist  $y_1(t)$  ein Energiesignal.

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

c) Die Fourier-Transformierte berechnet sich mit Hilfe der Korrespondenztabelle wie folgt:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{-\frac{\pi}{2}t^2} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\ &\quad \downarrow \\ Y_1(f) &= \sqrt{2} e^{-2\pi f^2} * \frac{1}{2} (\delta(f+5) + \delta(f-5)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( e^{-2\pi(f+5)^2} + e^{-2\pi(f-5)^2} \right).\end{aligned}$$

( $\Sigma$ : 3 Punkte)

d) Das Betragsspektrum  $|Y_1(f)|$  ist in Abbildung L1 dargestellt.

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

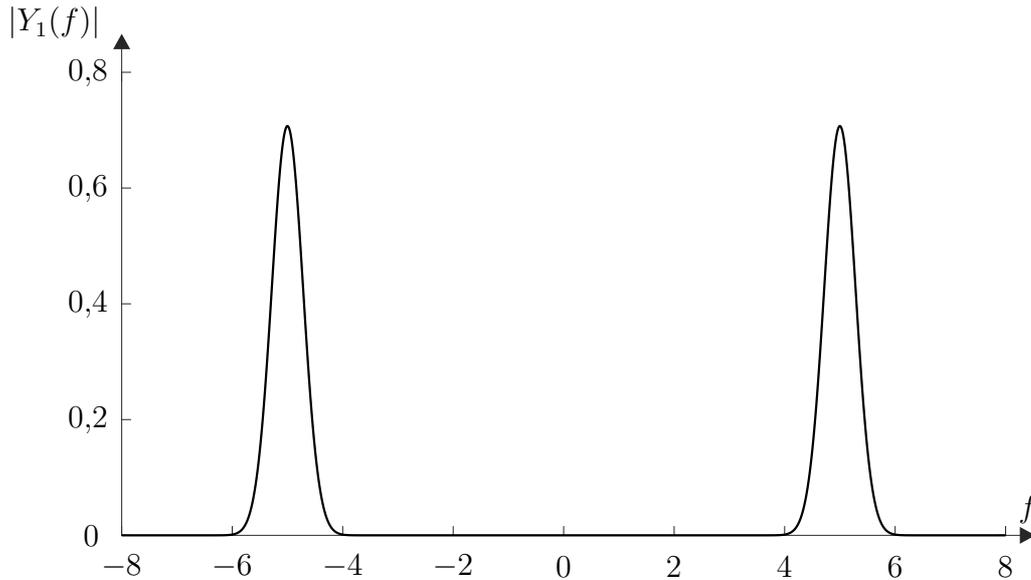


Abbildung L1: Betragsspektrum  $|Y_1(f)|$ .

e) Das Betragsspektrum  $|Y_2(f)|$  ist in Abbildung L2 dargestellt.

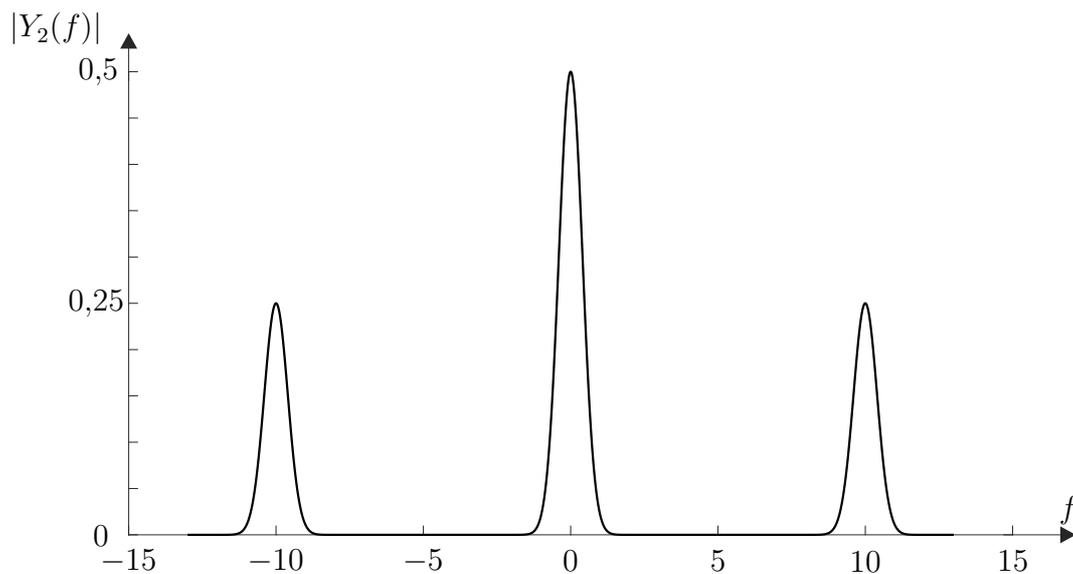


Abbildung L2: Betragsspektrum  $|Y_2(f)|$ .

Aus der Skizze soll die Verdopplung der Mittenfrequenzen und die Entstehung von Signalanteilen mit der doppelten Amplitude um  $f = 0$  herum hervorgehen. Ein gaußförmiger Verlauf der einzelnen Frequenzbänder ist nicht verlangt. Das Zustandekommen des Betragsspektrums kann direkt im Frequenzbereich durch das Faltungsprodukt  $Y_2(f) = Y_1(f) * Y_1(f)$  oder durch Quadrieren im Zeitbereich unter Berücksichtigung des Zusammenhangs  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$  erklärt werden. ( $\Sigma$ : 3 Punkte)

f) Die Funktion  $x_3(t)$  kann gemäß Abbildung 2 abschnittsweise definiert werden:

$$x_3(t) = \begin{cases} 2t + 2 & , -1 \leq t < -\frac{1}{2} \\ -2t & , -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 2t - 2 & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren verlangt zunächst eine Berechnung der Innenprodukte zwischen der Funktion  $x_3(t)$  und den bereits festgelegten Basisfunktionen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$ :

$$\langle x_3(t), \varphi_1(t) \rangle = 0 ,$$

$$\langle x_3(t), \varphi_2(t) \rangle = 0 .$$

Beide Innenprodukte können aufgrund der Symmetrie ohne Rechnung angegeben werden, denn  $x_3(t)$  ist eine ungerade Funktion, wohingegen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  gerade Funktionen sind.

Es folgt die Berechnung der Norm:

$$\begin{aligned} \|x_3(t)\|^2 &= \int_{-1}^1 x_3^2(t) \, dt \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2t + 2)^2 \, dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-2t)^2 \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t - 2)^2 \, dt \\ &= \left[ \frac{4}{3}t^3 + 4t^2 + 4t \right]_{t=-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{4}{3}t^3 \right]_{t=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 4t \right]_{t=\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{2}{3} \\ \|x_3(t)\| &= \sqrt{\frac{2}{3}} . \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte dritte Basisfunktion:

$$\varphi_3(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} x_3(t) = \begin{cases} \sqrt{6}(t + 1) & , -1 \leq t < -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{6}t & , -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ \sqrt{6}(t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

( $\Sigma$ : 4 Punkte)

g) Das Signal  $y_3(t)$  kann durch Linearkombination der Basisfunktionen  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  und  $\varphi_3(t)$  approximiert werden. Die hierfür benötigten Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  berechnen sich aus dem Innenprodukt des Signals  $y_3(t)$  mit der jeweiligen Basisfunktion:

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle y_3(t), \varphi_1(t) \rangle = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{3}t^3 \right]_{t=-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{3} , \\ a_2 &= \langle y_3(t), \varphi_2(t) \rangle = \int_{-1}^0 \sqrt{6} \left( t + \frac{1}{2} \right) t^2 \, dt + \int_0^1 \sqrt{6} \left( \frac{1}{2} - t \right) t^2 \, dt \\ &= \sqrt{6} \left[ \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^3 \right]_{t=-1}^0 + \sqrt{6} \left[ \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right]_{t=0}^1 \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{6} , \\ a_3 &= \langle y_3(t), \varphi_3(t) \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Der Koeffizient  $a_3$  kann ohne Rechnung aufgrund der Symmetrie angegeben werden, denn  $\varphi_3(t)$  ist eine ungerade Funktion, während  $y_3(t)$  eine gerade Funktion ist. Die Approximation  $\hat{y}(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$  ist in Abbildung L3 dargestellt (nicht verlangt).

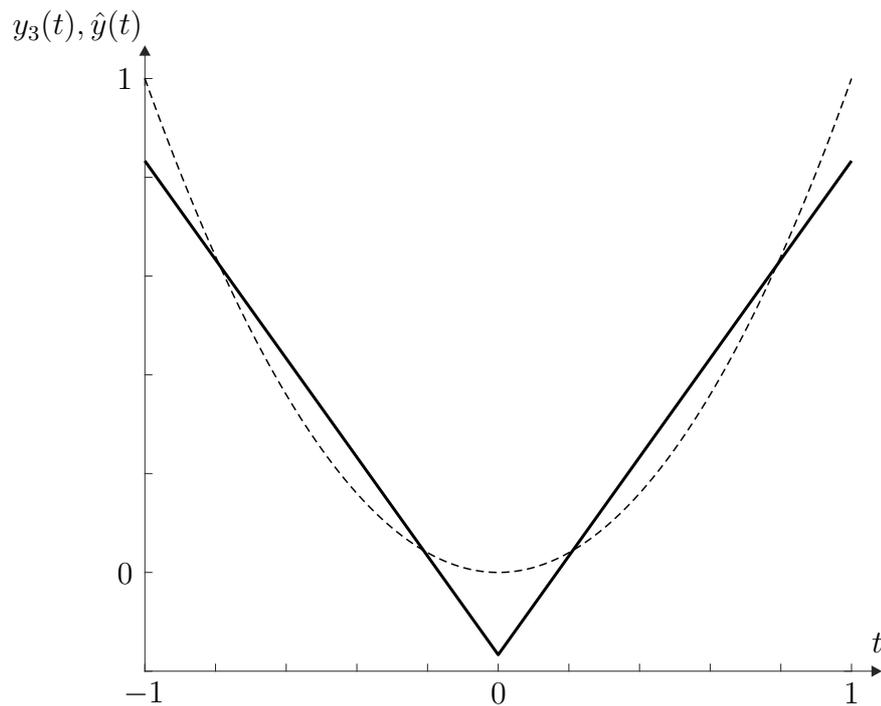


Abbildung L3: Signal  $y_3(t)$  (gestrichelt) und Approximation  $\hat{y}(t)$ .

( $\Sigma$ : 3 Punkte)

## Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches LTI-System  $\mathcal{S}_1$ , das durch den in Abbildung 3 dargestellten Signalflussplan definiert wird.

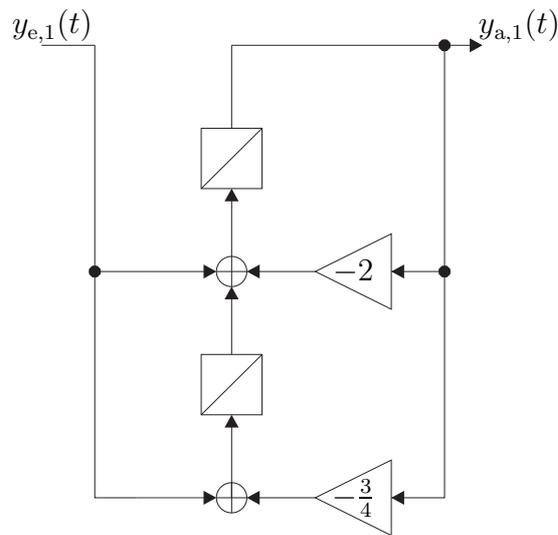


Abbildung 3: Signalflussplan des Systems  $\mathcal{S}_1$ .

- Geben Sie die Differentialgleichung des Systems  $\mathcal{S}_1$  an. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G_1(s)$  des Systems  $\mathcal{S}_1$ . Nehmen Sie verschwindende Anfangswerte an. (2 Punkte)
- Ist das System  $\mathcal{S}_1$  stabil? (**Begründung!**) (2 Punkte)
- Das System  $\mathcal{S}_1$  wird nun parallel zu einem System  $\mathcal{S}_2$  betrieben, welches durch die Übertragungsfunktion  $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$  beschrieben wird. Die Parallelschaltung wird als System  $\mathcal{S}_3$  bezeichnet und mit dem Eingangssignal  $y_{e,3}(t) = t e^{-t} \cdot \sigma(t)$  belastet. Berechnen Sie die zugehörige Systemantwort  $y_{a,3}(t)$  des Systems  $\mathcal{S}_3$ . (5 Punkte)

**Bitte Rückseite beachten!**

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben seien die in Abbildung 4 dargestellten Eingangs- und Ausgangssignale eines Systems  $\mathcal{S}_4$ .

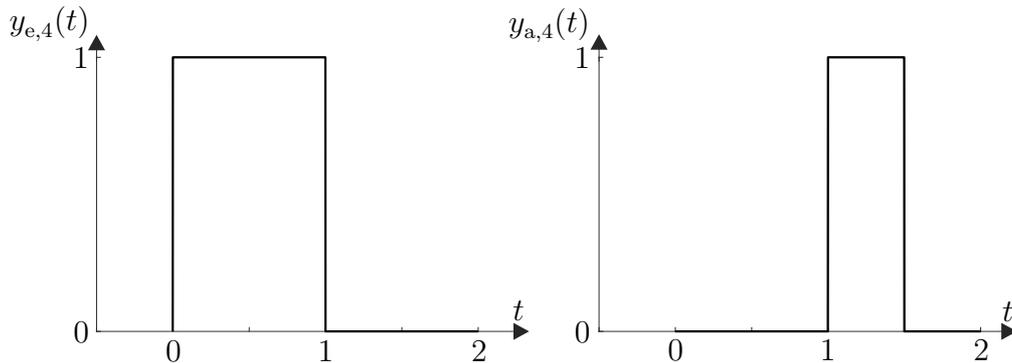


Abbildung 4: Eingangssignal  $y_{e,4}(t)$  und Ausgangssignal  $y_{a,4}(t)$  des Systems  $\mathcal{S}_4$ .

- e) Das System  $\mathcal{S}_4$  reagiert auf das in Abbildung 4 dargestellte Eingangssignal  $y_{e,4}(t)$  mit dem skizzierten Verlauf des Ausgangssignals  $y_{a,4}(t)$ . Kann es sich um ein LTI-System handeln? (**Begründung, keine Rechnung!**) (2 Punkte)
- f) Es soll der Amplitudengang eines kausalen LTI-Systems  $\mathcal{S}_5$  experimentell bestimmt werden. Ist das in Abbildung 4 dargestellte Eingangssignal  $y_{e,4}(t)$  hierfür als Testsignal geeignet? (**Begründung, keine Rechnung!**) (2 Punkte)
- g) Vom kausalen LTI-System  $\mathcal{S}_6$  sei die Impulsantwort  $g_6(t)$  bekannt:

$$g_6(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases} .$$

Ist das System  $\mathcal{S}_6$  stabil?

(2 Punkte)

## Lösung

- a) Dem Signalflussplan kann folgender Zusammenhang für das Ausgangssignal  $y_{a,1}(t)$  entnommen werden:

$$y_{a,1}(t) = -2 \int y_{a,1}(t) - \frac{3}{4} \int \int y_{a,1}(t) + \int y_{e,1}(t) + \int \int y_{e,1}(t).$$

Zweimaliges Differenzieren der Gleichung führt zur gesuchten Differentialgleichung:

$$\ddot{y}_{a,1}(t) + 2\dot{y}_{a,1}(t) + \frac{3}{4}y_{a,1}(t) = \dot{y}_{e,1}(t) + y_{e,1}(t).$$

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- b) Mit Hilfe des Differentiationssatzes der Laplace-Transformation kann folgende Überführung in den Bildbereich erfolgen:

$$\ddot{y}_{a,1}(t) + 2\dot{y}_{a,1}(t) + \frac{3}{4}y_{a,1}(t) = \dot{y}_{e,1}(t) + y_{e,1}(t)$$

$\circ$   
 $\downarrow$   
 $\bullet$

$$Y_{a,1}(s) \left( s^2 + 2s + \frac{3}{4} \right) = Y_{e,1}(s) (s + 1).$$

Die Übertragungsfunktion  $G_1(s)$  ergibt sich zu:

$$G_1(s) = \frac{Y_{a,1}(s)}{Y_{e,1}(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + \frac{3}{4}}.$$

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- c) Das System  $\mathcal{S}_1$  ist stabil, wenn alle Polstellen von  $G_1(s)$  in der offenen linken Halbebene liegen. Die Polstellen berechnen sich zu:

$$s_{\infty 1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{3}{4}}}{2}.$$

Sowohl  $s_{\infty 1} = -\frac{1}{2}$  als auch  $s_{\infty 2} = -\frac{3}{2}$  erfüllen obige Bedingung, sodass das System  $\mathcal{S}_1$  stabil ist.

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- d) Im ersten Schritt wird die Übertragungsfunktion  $G_3(s)$  der Parallelschaltung der Systeme  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  berechnet. Sie ergibt sich aus der Summe der Einzelübertragungsfunktionen:

$$G_3(s) = \frac{s + 1}{\left(s + \frac{1}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{s + 1}.$$

Eine Zusammenfassung der beiden Brüche ist für die weitere Rechnung nicht von Vorteil.

Im zweiten Schritt erfolgt die Laplace-Transformation für das Eingangssignal  $y_{e,3}(t)$  unter Verwendung der Korrespondenztabelle:

$$y_{e,3}(t) = t e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

$\circ$   
 $\downarrow$   
 $\bullet$

$$Y_{e,3}(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}.$$

Die Systemantwort ergibt sich im Laplace-Bereich aus Multiplikation von Eingangssignal und Übertragungsfunktion:

$$Y_{a,3}(s) = G_3(s) \cdot Y_{e,3}(s) \\ = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})(s + \frac{3}{2})(s + 1)} + \frac{1}{(s + 1)^3}.$$

Für den ersten Bruch wird eine Partialbruchzerlegung mit folgendem Ansatz durchgeführt:

$$\frac{1}{(s + \frac{1}{2})(s + \frac{3}{2})(s + 1)} = \frac{A}{(s + \frac{1}{2})} + \frac{B}{(s + \frac{3}{2})} + \frac{C}{(s + 1)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$A = 2,$$

$$B = 2,$$

$$C = -4.$$

Die nun vorliegenden Terme der Laplace-Transformierten des Ausgangssignals können mit Hilfe der Korrespondenztabelle rücktransformiert werden:

$$Y_{a,3}(s) = \frac{2}{(s + \frac{1}{2})} + \frac{2}{(s + \frac{3}{2})} - \frac{4}{(s + 1)} + \frac{1}{(s + 1)^3}$$

$\downarrow$   
 $\circ$

$$y_{a,3}(t) = \left( 2e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-\frac{3}{2}t} - 4e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} \right) \cdot \sigma(t).$$

( $\Sigma$ : 5 Punkte)

- e) Das in Abbildung 4 dargestellte Ausgangssignal ist zeitlich kürzer als das Eingangssignal. Daher muss es ein breiteres Spektrum besitzen, was mit einem Vorkommen neuer Frequenzen einhergeht. In linearen Systemen können jedoch keine neuen Frequenzanteile entstehen, sondern nur im Eingangssignal zugeführte Frequenzanteile in Amplitude oder Phase verändert werden. Das System  $S_4$  kann folglich kein LTI-System sein. ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- f) Der Amplitudenfrequenzgang beinhaltet einen Verstärkungsfaktor für jede Frequenz. Um diesen Faktor experimentell zu bestimmen, muss das System folglich auch bei sämtlichen Frequenzen angeregt werden, was mit dem Eingangssignal  $y_{e,4}(t)$  aus Abbildung 4 nicht möglich ist, da es ein sinc-förmiges Spektrum besitzt. ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- g) Ein LTI-System ist stabil, wenn seine Impulsantwort absolut integrierbar ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty.$$

Für das System  $S_6$  folgt:

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{1}{t} \right| dt = [\ln |t|]_{t=1}^{\infty} \not< \infty.$$

Da der obere Grenzwert keinen endlichen Wert annimmt, ist das System  $S_6$  nicht stabil. ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

### Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (17 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal  $y_1(t)$ :

$$y_1(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2t_0}(t - t_0)\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2t_0}(t + t_0)\right), \quad t_0 \in \mathbb{R}^+.$$

- a) Das Signal  $y_1(t)$  soll abgetastet werden. Was gilt für die Abtastfrequenz  $f_{A,1}$ , wenn eine fehlerfreie Rekonstruktion des Signals möglich sein soll? (3 Punkte)

Für die folgenden Teilaufgaben sei die Abtastfrequenz  $f_{A,2} = \frac{1}{t_0}$ .

- b) Zeichnen Sie das Betragsspektrum  $|Y_1^*(f)|$  des abgetasteten Signals im Bereich von  $-\frac{3}{2t_0} < f < \frac{3}{2t_0}$ . (3 Punkte)
- c) Es soll nun ein ideales Rechteckfilter zur Erzeugung des rekonstruierten Signals  $\hat{y}_1(t)$  verwendet werden. Geben Sie einen möglichen Frequenzgang  $G_1(f)$  des Filters an, sodass für das rekonstruierte Signal gilt:  $\hat{y}_1(t) = y_1(t)$ . (2 Punkte)
- d) Es werde nun ein Rekonstruktionsfilter mit dem in Abbildung 5 ersichtlichen Amplitudengang eingesetzt. Der Phasengang sei linear. Wie unterscheidet sich das mit diesem Filter erzeugte rekonstruierte Signal  $\hat{y}_2(t)$  qualitativ vom ursprünglichen Signal  $y_1(t)$ ? (Begründung, keine Rechnung!) (2 Punkte)

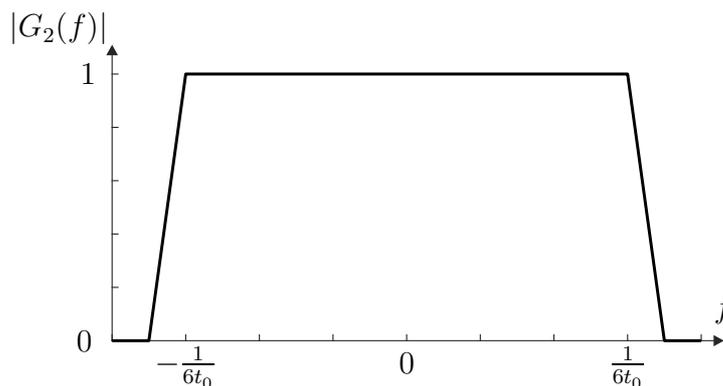


Abbildung 5: Amplitudenfrequenzgang  $|G_2(f)|$  des Rekonstruktionsfilters.

**Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.**

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal  $y_{2,n} = (2, 1, 2, -1, -2, -1)$ , welches im Folgenden mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation analysiert werden soll. Die Beobachtungsdauer beträgt 2 s.

- e) Wie groß ist die Frequenzauflösung? (1 Punkt)
- f) Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte  $Y_{2,k}$  des Signals  $y_{2,n}$  mit  $N = 6$  allgemein in Abhängigkeit von  $k$ . (3 Punkte)
- g) Skizzieren Sie das Betragsspektrum  $|Y_{2,k}|$ . (3 Punkte)

**Hinweis:**  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Lösung

- a) Das Signal  $y_1(t)$  besteht aus zwei verschobenen sinc-Funktionen, die mittels Korrespondenztabelle in den Bildbereich transformiert werden:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \text{sinc}\left(\frac{1}{2t_0}(t-t_0)\right) + \text{sinc}\left(\frac{1}{2t_0}(t+t_0)\right) \\ &= \text{sinc}\left(\frac{1}{2t_0}t\right) * (\delta(t-t_0) + \delta(t+t_0)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} Y_1(f) &= 2t_0 \cdot r_{\frac{1}{2t_0}}(f) \cdot (e^{-j2\pi t_0 f} + e^{j2\pi t_0 f}) \\ &= 4t_0 \cdot r_{\frac{1}{2t_0}}(f) \cdot \cos(2\pi t_0 f). \end{aligned}$$

Für die Rechteckfunktion gilt:

$$r_{\frac{1}{2t_0}}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{1}{4t_0} \\ 0, & |f| > \frac{1}{4t_0} \end{cases}.$$

Das Spektrum  $Y_1(f)$  umfasst folglich genau eine positive Halbwelle des Cosinus und es gilt:

$$Y_1(f) = \begin{cases} 4t_0 \cos(2\pi t_0 f), & |f| < \frac{1}{4t_0} \\ 0, & |f| \geq \frac{1}{4t_0} \end{cases}.$$

Die erforderliche Abtastfrequenz ergibt sich zu:

$$f_{A,1} \geq 2 \cdot \frac{1}{4t_0} = \frac{1}{2t_0}.$$

( $\Sigma$ : 3 Punkte)

- b) Das Betragsspektrum  $|Y_1^*(f)|$  ist im Intervall  $-\frac{3}{2t_0} < f < \frac{3}{2t_0}$  in Abbildung L4 dargestellt. Aus der Abbildung gehen die durch die Abtastung mit  $f_{A,2} = \frac{1}{t_0}$  bedingten periodischen Wiederholungen des Spektrums  $Y_1(f)$  und dessen Gewichtung mit der Abtastfrequenz hervor. ( $\Sigma$ : 3 Punkte)

- c) Für das ideale Rechteckfilter sind Höhe  $A$  und Breite  $B$  des Amplitudenfrequenzgangs  $G_1(f) = A \cdot r_B(f)$  zu bestimmen. Zur idealen Rekonstruktion muss das Filter die durch die Abtastung erfolgte Gewichtung des Spektrums mit der Abtastfrequenz kompensieren, sodass hier die Höhe der Rechteckfunktion zu  $t_0$  gewählt werden muss.

Die Breite ergibt sich aus der Forderung, dass das ursprüngliche Spektrum  $Y_1(f)$  komplett erhalten bleiben muss, jedoch alle periodischen Fortsetzungen verschwinden müssen. Mit Blick auf Abbildung L4 ergibt sich die Forderung  $\frac{1}{2t_0} \leq B \leq \frac{3}{2t_0}$ . (Die Angabe eines Intervalls für  $B$  ist nicht explizit verlangt. Es genügt ein exemplarischer Wert für  $B$ , wenn dieser obiger Bedingung genügt.) ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- d) Das in Abbildung 5 definierte Rekonstruktionsfilter nimmt im Durchlassbereich nicht die notwendige Gewichtung vor und schneidet zudem einen Teil des Spektrums  $Y_1(f)$  ab. Das mit diesem Filter rekonstruierte Signal  $\hat{y}_2(t)$  ist folglich falsch skaliert und verbreitert. ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

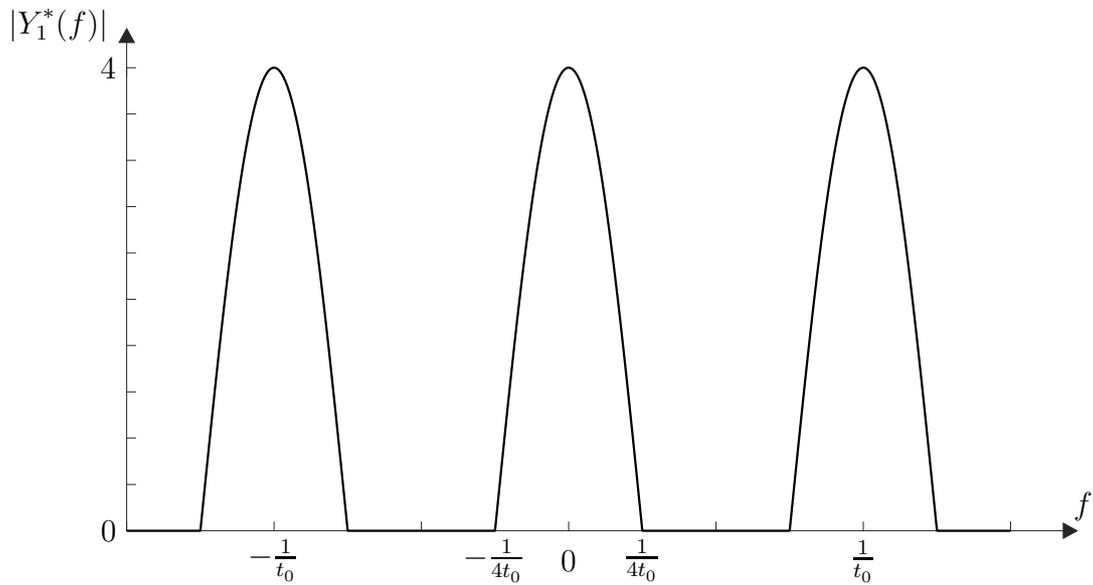


Abbildung L4: Betragsspektrum  $|Y_1^*(f)|$  des abgetasteten Signals.

- e) Die Frequenzauflösung beträgt  $\Delta f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$ . ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- f) Mit  $N = 6$  berechnet sich die DFT wie folgt:

$$\begin{aligned}
 Y_{2,k} &= \sum_{n=0}^5 y_{2,n} e^{-j2\pi \frac{kn}{6}} \\
 &= 2 \cdot \left( e^0 + e^{-j2\pi k \frac{1}{3}} \right) - 1 \cdot \left( e^{-j2\pi k \frac{1}{2}} + e^{-j2\pi k \frac{5}{6}} \right) + 1 \cdot e^{-j2\pi k \frac{1}{6}} - 2 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{3}} \\
 &= 2 - e^{-j2\pi k \frac{1}{2}} + 2 \cdot \left( e^{-j2\pi k \frac{1}{3}} - e^{-j2\pi k \frac{2}{3}} \right) + 1 \cdot \left( e^{-j2\pi k \frac{1}{6}} - e^{-j2\pi k \frac{5}{6}} \right) \\
 &= 2 - (-1)^k - 4j \sin \left( 2\pi \frac{k}{3} \right) - 2j \sin \left( 2\pi \frac{k}{6} \right).
 \end{aligned}$$

( $\Sigma$ : 3 Punkte)

- g) Der Betrag  $|Y_{2,k}|$  ist in Abbildung L5 skizziert. ( $\Sigma$ : 3 Punkte)

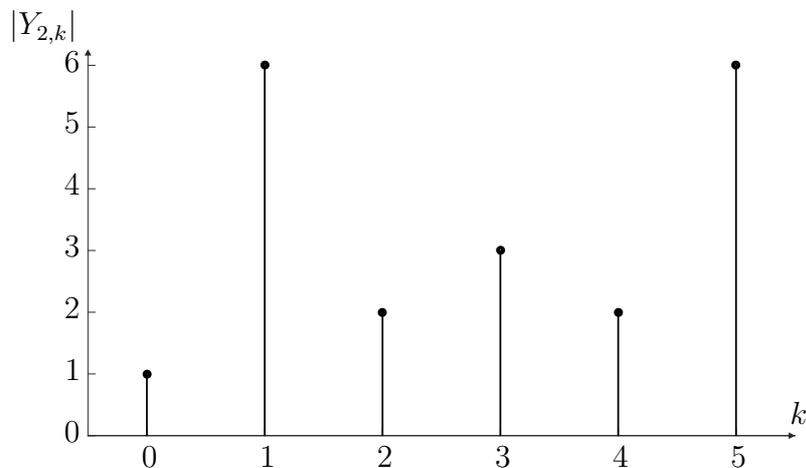


Abbildung L5: 6-Punkte-DFT von  $y_{2,n}$ .

#### Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (16 Punkte)

Gegeben sei das zeitdiskrete, kausale LTI-System  $\mathcal{S}_1$  mit der Übertragungsfunktion:

$$G_1(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + \frac{1}{2}z - 1}{z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{8}}.$$

- a) Geben Sie die Differenzgleichung des Systems  $\mathcal{S}_1$  an. (2 Punkte)
- b) Zeichnen Sie den Signalflussplan des Systems  $\mathcal{S}_1$  in ARMA-Form. (2 Punkte)
- c) Wählen Sie geeignete Zustandsgrößen, kennzeichnen Sie diese im Signalflussplan und geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems  $\mathcal{S}_1$  in Matrixform an. (4 Punkte)

**Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LTI-System  $\mathcal{S}_2$  mit der Übertragungsfunktion:

$$G_2(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s}.$$

- d) Stellen Sie das System  $\mathcal{S}_2$  zeitdiskret dar. Verwenden Sie die Rechteckregel rückwärts und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. Die Abtastzeit sei  $t_A = \frac{1}{2}$ . (2 Punkte)
- e) Das zeitdiskrete System  $\mathcal{S}_2$  werde nun in Reihe mit einem zweiten kausalen LTI-System  $\mathcal{S}_3$  betrieben, welches durch seine Impulsantwort beschrieben wird:

$$g_{3,n} = 2^{-n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot \sigma_n.$$

Zeichnen Sie den Pol-Nullstellen-Plan der Reihenschaltung. (5 Punkte)

- f) Ist die Reihenschaltung von  $\mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_3$  stabil? (**Begründung!**) (1 Punkt)

## Lösung

- a) Die Differenzgleichung ergibt sich aus der Übertragungsfunktion durch Umstellung und Rücktransformation:

$$G_1(z) = \frac{Y_a(z)}{Y_e(z)}$$

$$Y_a(z) \left( z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{8} \right) = Y_e(z) \left( z^3 + 2z^2 + \frac{1}{2}z - 1 \right)$$

⌋  
○

$$y_{a,n+3} + y_{a,n+2} + \frac{1}{2}y_{a,n+1} + \frac{1}{8}y_{a,n} = y_{e,n+3} + 2y_{e,n+2} + \frac{1}{2}y_{e,n+1} - y_{e,n}$$

$$y_{a,n} + y_{a,n-1} + \frac{1}{2}y_{a,n-2} + \frac{1}{8}y_{a,n-3} = y_{e,n} + 2y_{e,n-1} + \frac{1}{2}y_{e,n-2} - y_{e,n-3}$$

(Σ: 2 Punkte)

- b) Der Signalflussplan des Systems  $S_1$  ist in Abbildung L6 dargestellt. (Σ: 2 Punkte)

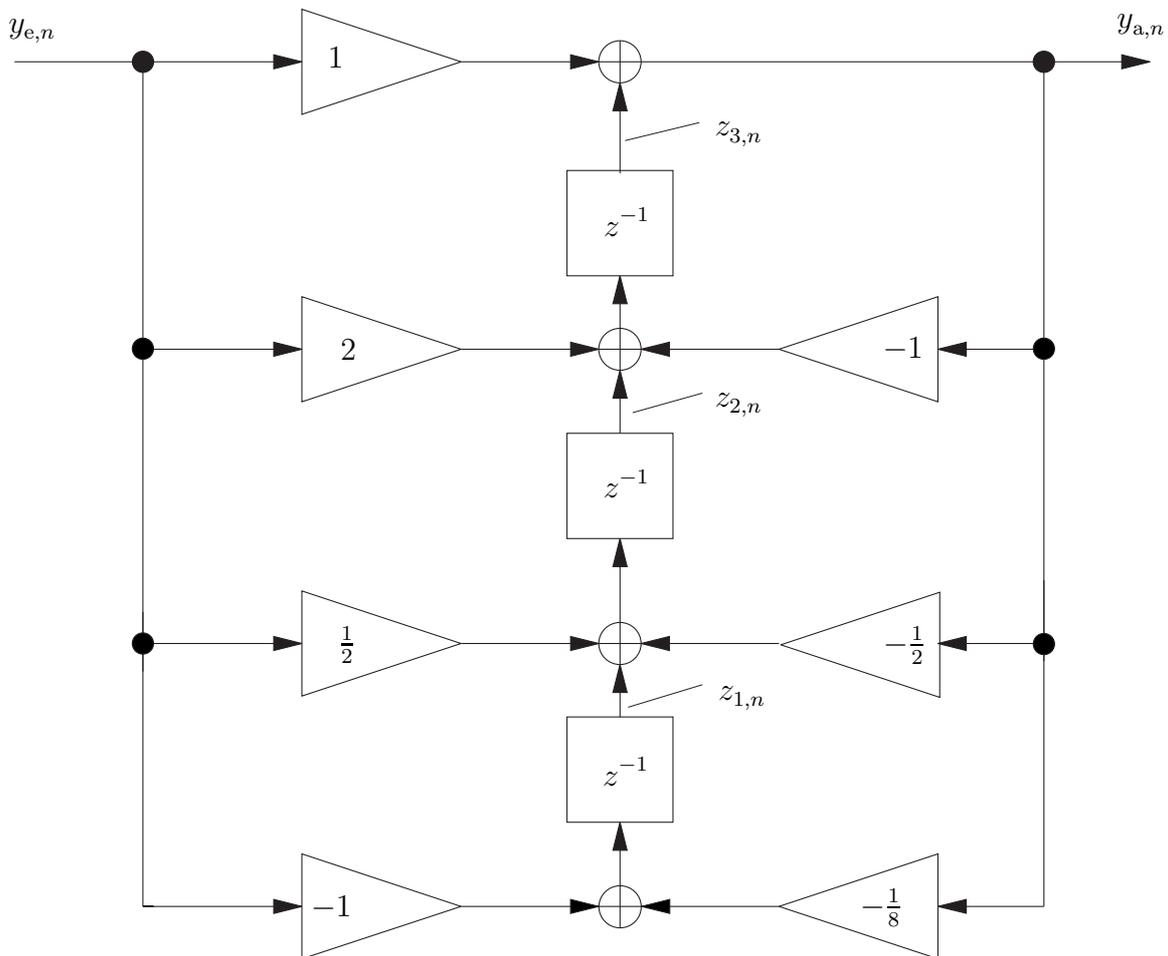


Abbildung L6: Signalflussplan des Systems  $S_1$  in ARMA-Form.

- c) Die Zustandsgrößen werden gemäß Abbildung L6 definiert. Zunächst wird die Ausgangsgleichung aufgestellt:

$$y_{a,n} = z_{3,n} + y_{e,n}$$

Es folgen die Zustandsgleichungen, bei denen  $y_{a,n}$  durch Einsetzen der Ausgangsgleichung eliminiert wird:

$$\begin{aligned} z_{1,n+1} &= -y_{e,n} - \frac{1}{8}y_{a,n} = -\frac{9}{8}y_{e,n} - \frac{1}{8}z_{3,n} \\ z_{2,n+1} &= z_{1,n} + \frac{1}{2}y_{e,n} - \frac{1}{2}y_{a,n} = z_{1,n} - \frac{1}{2}z_{3,n} \\ z_{3,n+1} &= z_{2,n} + 2y_{e,n} - y_{a,n} = z_{2,n} - z_{3,n} + y_{e,n}. \end{aligned}$$

Die Zustandsraumdarstellung in Matrixform lautet somit:

$$\begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ z_{2,n+1} \\ z_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \\ z_{3,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_{e,n}$$

$$y_{a,n} = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \\ z_{3,n} \end{pmatrix} + (1) y_{e,n}.$$

( $\Sigma$ : 4 Punkte)

- d) Einsetzen von  $s = \frac{z-1}{zt_A}$  in  $G_2(s)$  führt zur zeitdiskreten Darstellung des Systems  $S_2$ :

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \frac{\left(\frac{z-1}{zt_A}\right)^2 - 2\frac{z-1}{zt_A} + 2}{\left(\frac{z-1}{zt_A}\right)^2 + 2\frac{z-1}{zt_A}} \\ &= \frac{z^2 - 2z + 1 - 2zt_A(z-1) + 2z^2t_A^2}{z^2 - 2z + 1 + 2zt_A(z-1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}z^2 - z + 1}{2z^2 - 3z + 1}. \end{aligned}$$

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- e) Die Übertragungsfunktion  $G_R(z)$  der Reihenschaltung ergibt sich aus Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen:

$$G_R = G_2(z) \cdot G_3(z).$$

Hierfür muss zunächst die Übertragungsfunktion  $G_3(z)$  ermittelt werden, wozu die Korrespondenztabelle genutzt wird:

$$\begin{aligned} g_{3,n} &= 2^{-n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot \sigma_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot \sigma_n \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} G_3(z) &= \frac{z\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{z^2 - 2z\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{z}{2z^2 + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es folgt die Gesamtübertragungsfunktion:

$$G_R = \frac{\frac{1}{2}z^2 - z + 1}{2z^2 - 3z + 1} \cdot \frac{z}{2z^2 + \frac{1}{2}},$$

die drei Nullstellen und vier Polstellen aufweist:

$$\begin{aligned} z_{0,1} &= 0, \\ z_{0,2/3} &= 1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm j, \\ z_{\infty,1/2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{4} \\ z_{\infty,1} &= 1, \\ z_{\infty,2} &= \frac{1}{2}, \\ z_{\infty,3/4} &= \pm \sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm j \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Pol- und Nullstellen sind in Abbildung L7 dargestellt.

( $\Sigma$ : 5 Punkte)

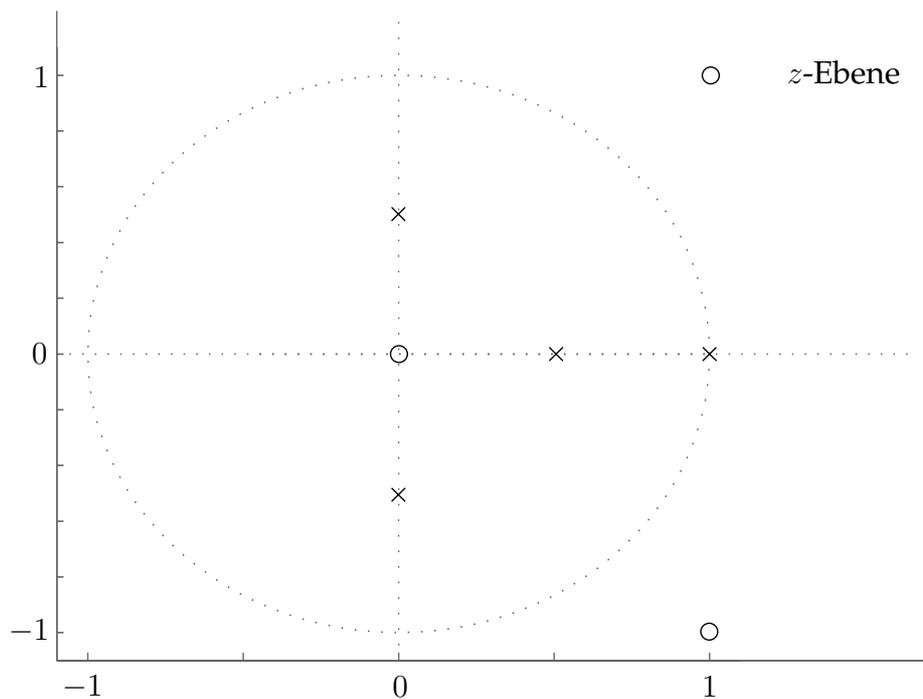


Abbildung L7: Pol-Nullstellen-Plan der Reihenschaltung von  $S_2$  und  $S_3$ .

- f) Ein zeitdiskretes System ist stabil, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen. Das System ist folglich nicht stabil, da die Polstelle  $z_{\infty,1} = 1$  auf dem Einheitskreis liegt. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)