Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. M. Heizmann

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe

Klausur im Fach
Signale und Systeme
1. Oktober 2020

Musterlösung

Aufgabe 1: 19
Aufgabe 2: 17
Aufgabe 3: 16
Aufgabe 4: 17

Gesamtpunkte: 69

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (19 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3, die gemäß Abbildung 1 vom Intervall $[0,3]$ nach $\mathbb{R}$ abbilden.

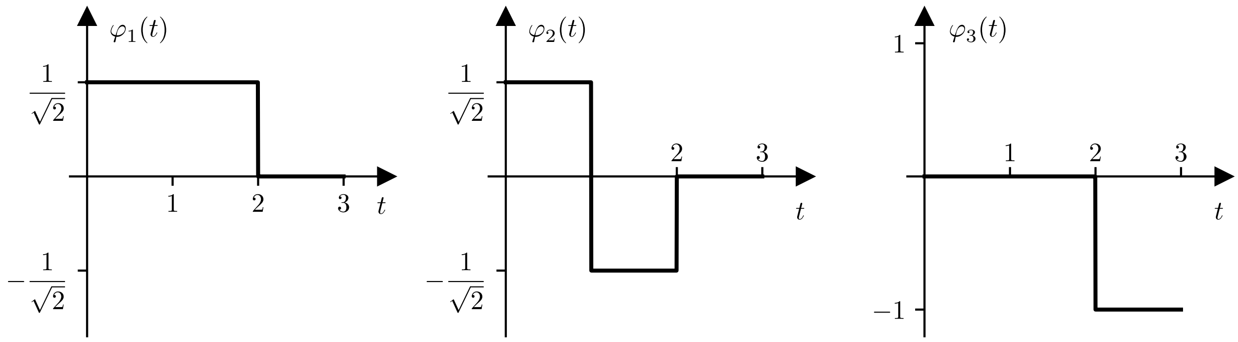

Abbildung 1: Die Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 mit folgenden Werten an den Sprungstellen:
$\varphi_1(2) = 0$, $\varphi_2(1) = -1/\sqrt{2}$, $\varphi_2(2) = 0$ und $\varphi_3(2) = -1$.

a) Geben Sie Funktionsgleichungen für die Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 gemäß Abbildung 1 an! *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 im Intervall $[0,3]$ eine orthonormale Basis eines Funktionenraums bilden! *(2 Punkte)*

c) Geben Sie eine Näherung für die Funktion $g\colon\ [0,3] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(\frac{2\pi}{3}t)$ an! Entwicklen Sie g dafür in den Basisfunktionen φ_1, φ_2 und φ_3 ! Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, dass es keine trigonometrischen Ausdrücke mehr enthält!
Hinweis: $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ *(5 Punkte)*

Bitte Folgeseite beachten!

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_1\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(t)\sin(t) + \frac{1}{2}$.

d) Skizzieren Sie das Signal y_1! Zeichnen Sie dazu jeweils genau eine Periode links sowie rechts von $t = 0$! Achten Sie dabei auf eine korrekte Achsenbeschriftung!
Hinweis: $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ *(3 Punkte)*

e) Handelt es sich bei dem Signal y_1 um ein Energiesignal, ein Leistungssignal oder keines von beidem? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung. *(2 Punkte)*

Das Signal y_1 werde nun zeitlich begrenzt. Man erhält das Signal y_2 mit

$$y_2\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \begin{cases} y_1(t) & \text{für } \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

f) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte Y_2 des Signals y_2 unter Verwendung der Rechenregeln und der Korrespondenzen der Fourier-Transformation! *(4 Punkte)*

Das Spektrum Y_2 werde nun tiefpassgefiltert. Man erhält das Spektrum $\hat{Y}_2$ mit

$$\hat{Y}_2\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \begin{cases} Y_2(f) & \text{für } |f| \leq f_\mathrm{g} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für eine endliche Grenzfrequenz $f_\mathrm{g} \gg 1$. Anschließend wird das Signal $\hat{y}_2$ mittels der inversen Fourier-Transformation aus $\hat{Y}_2$ rekonstruiert.

g) Welchen Maximalwert nimmt $\hat{y}_2(t)$ ungefähr an? Begründen Sie Ihre Angabe! Eine aufwendige Rechnung ist zur Begründung nicht nötig. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Die Funktionsgleichungen für die Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 lassen sich aus Abbildung 1 ablesen und lauten

$$\begin{aligned} \varphi_1\colon\ & [0,3] \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2\colon\ & [0,3] \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } t < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3\colon\ & [0,3] \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } 2 < t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ . \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Damit die Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 eine orthonormale Basis eines Funktionenraums bilden, muss gelten

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle_t = \delta_{ij} \qquad \text{für} \qquad i, j \in \{1, 2, 3\} \ .$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wie sich durch die Prüfung folgender neun Relationen ergibt:

1) $\langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle_t = \int_0^3 \varphi_1(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{1}{2} \,\mathrm{d}t = 1$
2) $\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle_t = \int_0^3 \varphi_1(t)\varphi_2(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{2} \,\mathrm{d}t + \int_1^2 -\frac{1}{2} \,\mathrm{d}t = 0$
3) $\langle \varphi_1(t), \varphi_3(t) \rangle_t = \int_0^3 \varphi_1(t)\varphi_3(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^3 0 \,\mathrm{d}t = 0$
4) $\langle \varphi_2(t), \varphi_1(t) \rangle_t = \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle_t = 0$
5) $\langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle_t = \int_0^3 \varphi_2(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{1}{2} \,\mathrm{d}t = 1$
6) $\langle \varphi_2(t), \varphi_3(t) \rangle_t = \int_0^3 \varphi_2(t)\varphi_3(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^3 0 \,\mathrm{d}t = 0$
7) $\langle \varphi_3(t), \varphi_1(t) \rangle_t = \langle \varphi_1(t), \varphi_3(t) \rangle_t = 0$
8) $\langle \varphi_3(t), \varphi_2(t) \rangle_t = \langle \varphi_2(t), \varphi_3(t) \rangle_t = 0$
9) $\langle \varphi_3(t), \varphi_3(t) \rangle_t = \int_0^3 \varphi_3(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_2^3 1 \,\mathrm{d}t = 1$

(Σ: 2 Punkte)

c) Für die geforderte Näherung gilt

$$g(t) \approx a_1 \cdot \varphi_1(t) + a_2 \cdot \varphi_2(t) + a_3 \cdot \varphi_1(t) \ ,$$

wobei die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ bestimmt werden müssen. Aus dem Hinweis und der Symmetrie der Sinus-Funktion ergibt sich

$$\sin(4\pi/3) = -\sin(2\pi/3) = -\sqrt{3}/2 \ .$$

Damit gilt für die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \langle g(t), \varphi_1(t)\rangle_t \\
&= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\left[\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right]_0^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\,, \\
a_2 &= \langle g(t), \varphi_2(t)\rangle_t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\left(\left[\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right]_0^1 - \left[\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right]_1^2\right) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\left(\sin(\frac{2\pi}{3}) - \sin(\frac{4\pi}{3}) + \sin(\frac{2\pi}{3})\right) = \frac{9}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \\
a_3 &= \langle g(t), \varphi_3(t)\rangle_t = \int_2^3 -\cos(\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{2\pi}\left[\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right]_2^3 \\
&= -\frac{3}{2\pi}\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{3}\,.
\end{aligned}
$$

Man erhält für $t \in [0, 3]$

$$
g(t) \approx \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} & \text{für } 0 \le t < 1 \text{ oder } 2 \le t \le 3 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} & \text{für } 1 \le t < 2 \end{cases} .
$$

Abbildung L1 zeigt die Funktion g und die errechnete Näherung. (Die Abbildung ist nicht verlangt.) ***(Σ: 5 Punkte)***

d) Den skizzenhaften Verlauf des Signals y_1 erhält man z. B. über eine Wertetabelle, mit

$$
\begin{aligned}
y_1(0) = y_1(\pi/2) = y_1(\pi) &= 1/2\,, \\
y_1(\pi/4) &= 1\,, \\
y_1(3\pi/4) &= 0 \quad \text{und} \\
y_1(-t) - \frac{1}{2} &= -y_1(t) + \frac{1}{2} \quad \text{wegen Punktsymmetrie am Punkt } (0, \frac{1}{2})\,.
\end{aligned}
$$

Durch das Nullsetzen der Ableitung erhält man Kandidaten für Hoch- und Tiefpunkte mittels des Hinweises aus der Aufgabenstellung bei

$$
\frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t)^2 = \sin(t)^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = n\cdot\pi + \pi/4\,, n \in \mathbb{Z}\,,
$$

wodurch der skizzenhafte Signalverlauf festgelegt ist. Alternativ erkennt man mittels der dritten binomischen Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, dass gilt

$$
\cos(t)\sin(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t)\,. \tag{L1}
$$

Das selbe Resultat erhält man auch mittels folgendem trigonometrischem Zusammenhang

$$
\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]
$$

mit $\alpha = \beta = t$. Anschließend nutzt man den bekannten Verlauf der Sinus-Funktion zur skizzenhaften Darstellung.

Abbildung L2 zeigt den Verlauf von y_1. ***(Σ: 3 Punkte)***

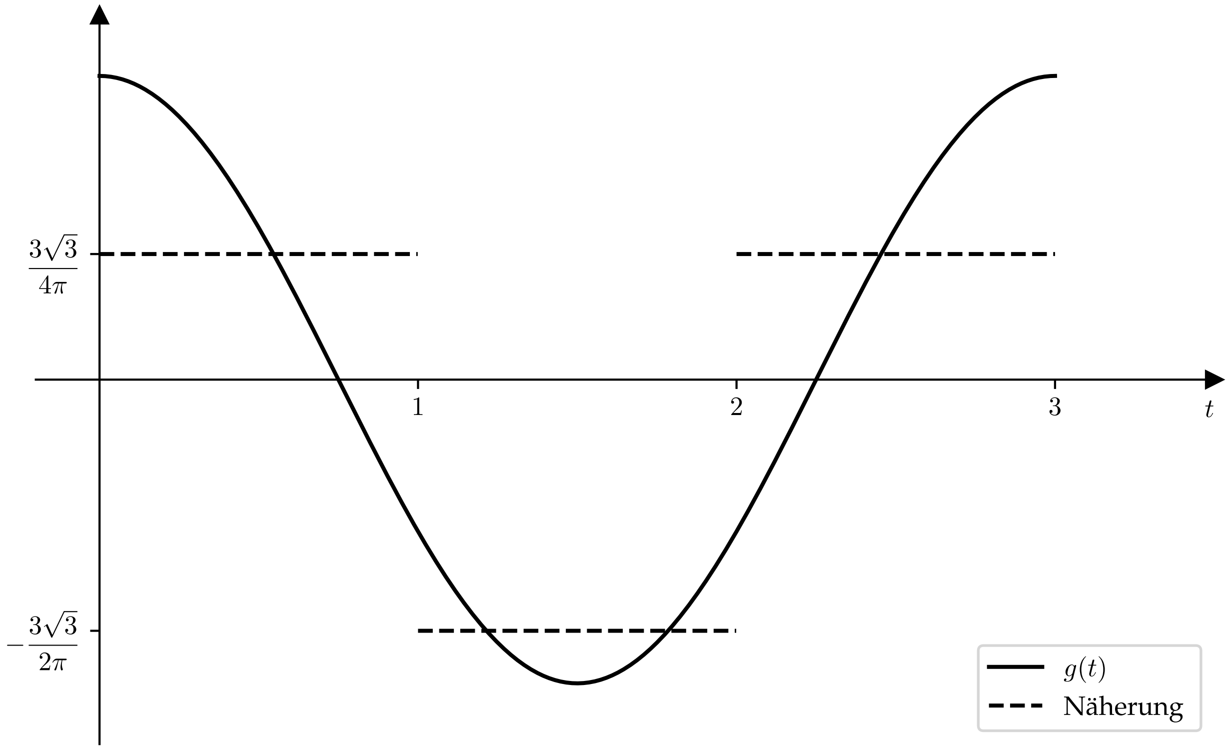

Abbildung L1: Die Funktion g und die errechnete Näherung.

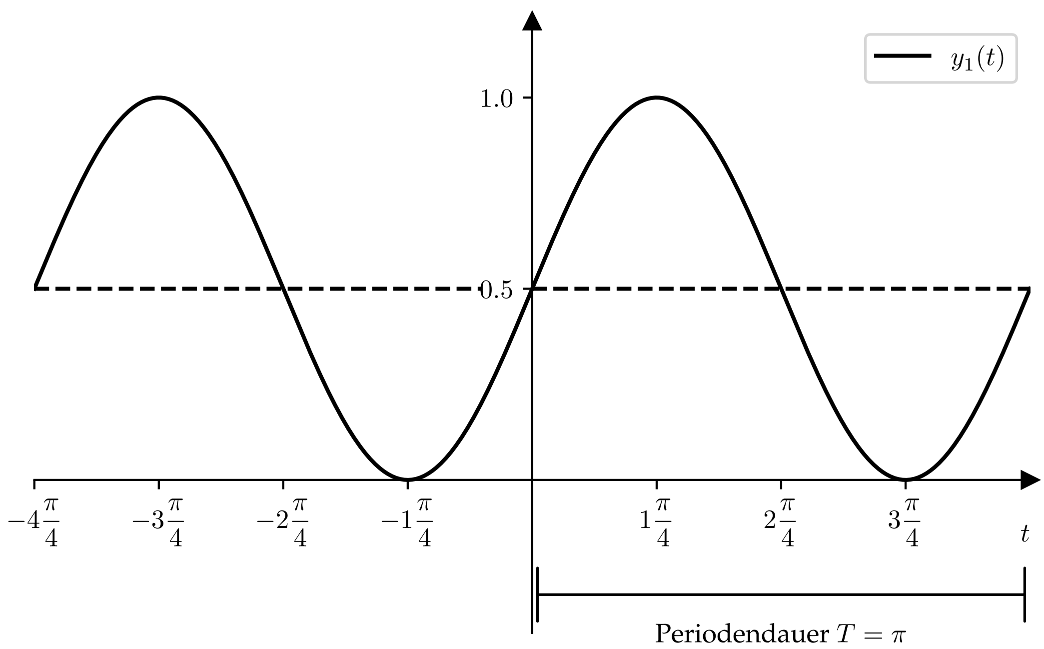

Abbildung L2: Skizze des Signals y_1. Abgebildet sind jeweils eine Periode links und rechts von $t = 0$. Das Einzeichnen der Periodendauer ist nicht verlangt.

e) Um herauszufinden, ob es sich bei y_1 um ein Energiesignal handelt, wird das folgende Integral betrachtet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_1(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t)^2 \sin(t)^2 \,\mathrm{d}t}_{=:A} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t}_{=:B} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t}_{=:C} \ .$$

Es gilt $B \neq -\infty$, während die Ausdrücke A und C gegen $+\infty$ divergieren. Das Integral konvergiert also nicht und das Signal y_1 ist damit kein Energiesignal.

Anschließend wird der folgende Ausdruck betrachtet und nach oben abgeschätzt:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |y_1(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1 \,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} 2T = 1 < \infty \ .$$

Es handelt sich bei y_1 also um ein Leistungssignal. *(Σ: **2 Punkte**)*

f) Das Signal y_2 lässt sich mittels einer um $\pi/2$ verschobenen Rechteckfunktion $r_{\frac{\pi}{2}}$ der Breite $\pi/2$ auch wie folgt schreiben

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot r_{\frac{\pi}{2}}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Nach einer Umformung mittels Gleichung (L1) erhält man die Fourier-Transformierte durch die Korrespondenzen der Sinus-Funktion, der 1 sowie der Rechteckfunktion und der Anwendung der Rechenregeln zur Zeitverschiebung sowie der Multiplikation im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \left(\cos(t)\sin(t) + \frac{1}{2}\right) \cdot r_{\frac{\pi}{2}}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(2t) + 1\right) \cdot r_{\frac{\pi}{2}}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
Y_2(f) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\delta\left(f + \frac{1}{\pi}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{\pi}\right)\right] + \delta(f)\right\} * \left\{\frac{\pi}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{\pi}{2}}\right\} \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\mathrm{j}}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi^2(f+\frac{1}{\pi})} - \frac{\mathrm{j}}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f - \frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi^2(f-\frac{1}{\pi})}\right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi^2 f}\right] \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi^2 f}\left[-\frac{\mathrm{j}}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f + \frac{1}{2}\right) + \frac{\mathrm{j}}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f - \frac{1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right)\right] \ .
\end{aligned}$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

g) Aufgrund der Tiefpass-Filterung von $\hat{Y}_2$ kommt es bei der Rekonstruktion von $\hat{y}_2$ an der Sprungstelle bei $t = \pi/4$ zu Gibbs'schen Überschwingern. An dieser Sprungstelle springt $y_2(t)$ von 0 auf den Maximalwert 1. Der Überschwinger beträgt etwa $9\,\%$ der ursprünglichen Sprunghöhe unabhängig von der Wahl von f_g, womit sich der Maximalwert von $\hat{y}_2(t)$ zu ungefähr $1{,}09$ ergibt. Abbildung L3 zeigt die Signale y_2 und $\hat{y}_2$. (Die Abbildung ist nicht verlangt.) *(Σ: **1 Punkt**)*

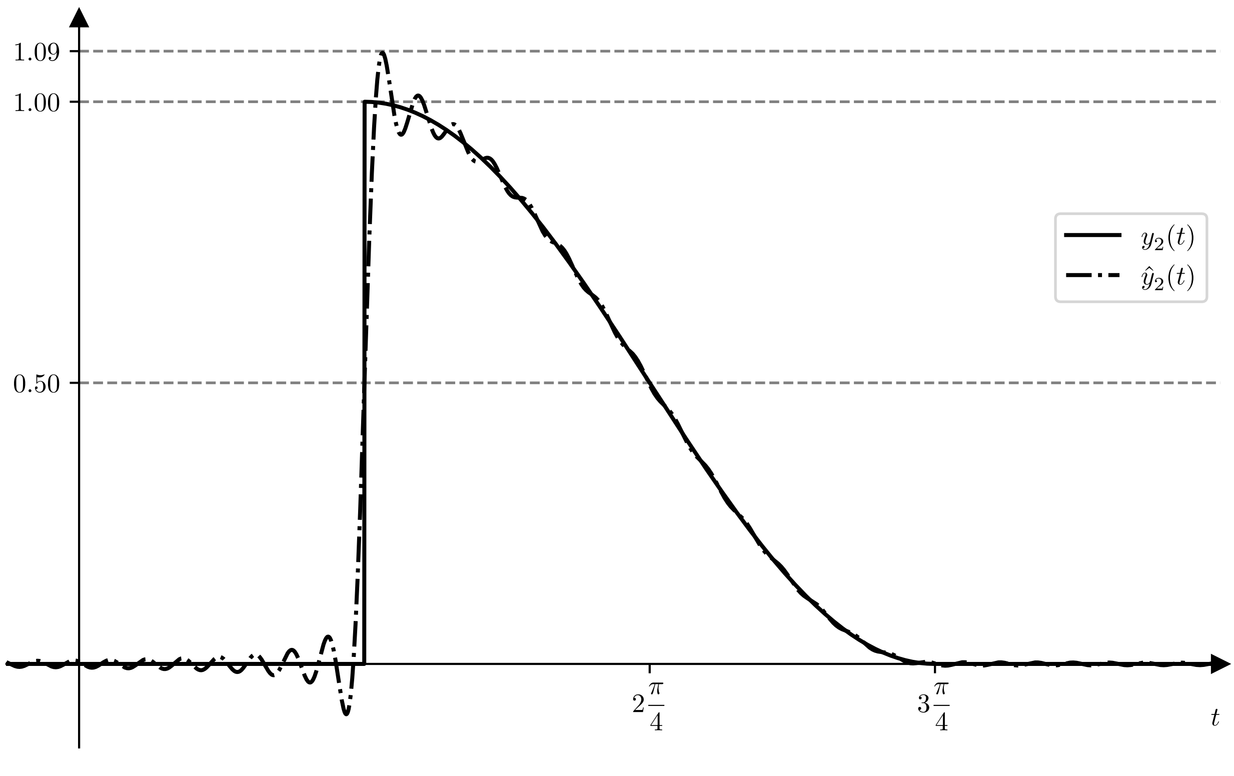

Abbildung L3: Skizze der Signale y_2 und $\hat{y}_2$.

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei das Pol-Nullstellen-Diagramm eines Systems $\mathcal{S}_1$ gemäß Abbildung 2.

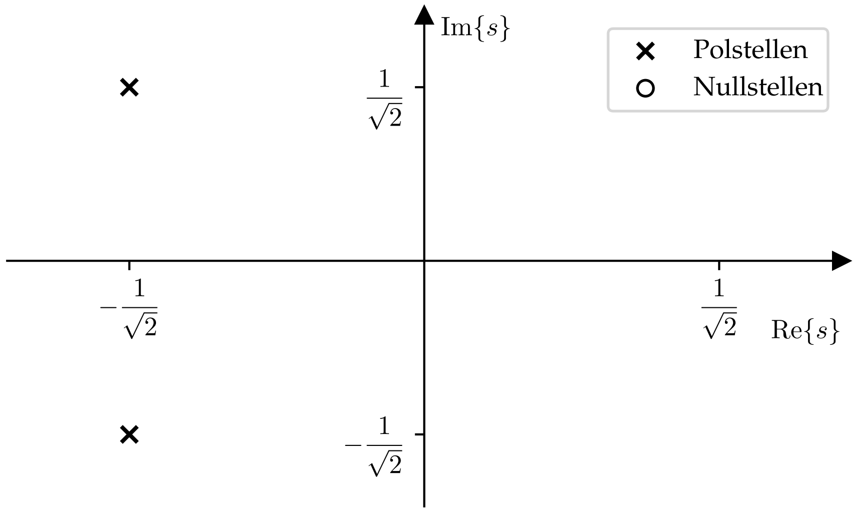

Abbildung 2: Das Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems $\mathcal{S}_1$.

a) Stellen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ des Systems $\mathcal{S}_1$ auf! Dabei soll $G_1(0) = 2$ gelten. *(2 Punkte)*

b) Stellen Sie die zeitliche Differentialgleichung auf, die das Verhalten des Systems $\mathcal{S}_1$, d.h. den Zusammenhang zwischen einem Ausgangssignal y_a und einem Eingangssignal y_e , beschreibt! *(2 Punkte)*

c) Geben Sie für das System $\mathcal{S}_1$ die Systemmatrix $\mathbf{A}$, die Steuermatrix $\mathbf{B}$, die Beobachtungsmatrix $\mathbf{C}$ und die Durchschaltmatrix $\mathbf{D}$ gemäß der Beobachter-Normalform an! **Hinweis:** Da es sich bei $\mathcal{S}_1$ um ein eindimensionales System handelt, haben die besagten Matrizen ggf. nur eine Zeile oder Spalte. *(4 Punkte)*

Bitte Folgeseite beachten!

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das System $\mathcal{S}_2$, welches durch seine Differentialgleichung

$$-\ddot{y}_{\mathrm{e}}(t) - 2\dot{y}_{\mathrm{e}}(t) + y_{\mathrm{e}}(t) = \ddot{y}_{\mathrm{a}}(t) - 2\dot{y}_{\mathrm{a}}(t)$$

beschrieben wird.

d) Erstellen Sie den Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_2$ in ARMA-Form! *(3 Punkte)*

e) Das System $\mathcal{S}_2$ werde nun mit dem Eingangssignal

$$y_{\mathrm{e}}(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sigma(t)$$

belastet. Berechnen Sie ein mögliches Ausgangssignal $y_{\mathrm{a}}(t)$ für $t \neq 0$! *(6 Punkte)*

Lösung

a) Für die Übertragungsfunktion gilt

$$G_1(s) = \frac{k}{(s - s_{\infty 0})(s - s_{\infty 1})}$$

mit

$$k \in \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad s_{\infty 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{j}) \qquad \text{und} \qquad s_{\infty 1} = s_{\infty 0}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - \mathrm{j})$$

Für k erhält man

$$G_1(0) = 2 \quad \Rightarrow \frac{k}{s_{\infty 0} s_{\infty 1}} = 2 \quad \Rightarrow \frac{k}{s_{\infty 0} s_{\infty 0}^{*}} = 2 \quad \Rightarrow \frac{k}{|s_{\infty 0}|^2} = 2 \quad \Rightarrow \frac{k}{1} = 2 \quad \Rightarrow k = 2 \, .$$

Damit ergibt sich

$$G_1(s) = \frac{2}{[s - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{j})][s - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - \mathrm{j})]} \, .$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Die gesuchte Differentialgleichung lässt sich aus der Übertragungsfunktion bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
& & G_1(s) = \frac{2}{(s - s_{\infty 0})(s - s_{\infty 1})} &= \frac{Y_\mathrm{a}(s)}{Y_\mathrm{e}(s)} \\
&\Rightarrow & s^2 Y_\mathrm{a}(s) - (s_{\infty 0} + s_{\infty 1}) s Y_\mathrm{a}(s) + s_{\infty 0} s_{\infty 1} Y_\mathrm{a}(s) &= 2 Y_\mathrm{e}(s) \\
&\Rightarrow & s^2 Y_\mathrm{a}(s) + \sqrt{2} s Y_\mathrm{a}(s) + Y_\mathrm{a}(s) &= 2 Y_\mathrm{e}(s) \\
& & &\bullet\!\!-\!\!\circ \\
& & \ddot{y}_\mathrm{a}(t) + \sqrt{2} \dot{y}_\mathrm{a}(t) + y_\mathrm{a}(t) &= 2 y_\mathrm{e}(t) \, . \qquad \text{(L2)}
\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Es gilt gemäß Gleichung (L2)

$$\sum_{\nu=0}^{2} a_\nu \, y_\mathrm{a}^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{2} b_\mu \, y_\mathrm{e}^{(\mu)}(t)$$

mit

$$a_0 = 1 \, , \qquad a_1 = \sqrt{2} \, , \qquad a_2 = 1 \, , \qquad b_0 = 2, \qquad b_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_2 = 0 \, .$$

Daraus ergibt sich die Zustandsraumdarstellung zu

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0(t) &= -\frac{a_0}{a_2} z_1(t) + \left(b_0 - b_2 \frac{a_0}{a_2}\right) y_\mathrm{e}(t) &&= 0 \cdot z_0(t) - z_1(t) + 2 y_\mathrm{e}(t) \\
\dot{z}_1(t) &= z_0(t) - \frac{a_1}{a_2} z_1(t) + \left(b_1 - b_2 \frac{a_1}{a_2}\right) y_\mathrm{e}(t) &&= z_0(t) - \sqrt{2} z_1(t) + 0 \cdot y_\mathrm{e}(t) \\
y_\mathrm{a}(t) &= \left(0, \frac{1}{a_2}\right) \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} + \frac{b_2}{a_2} y_\mathrm{e}(t) &&= \ (0, 1) \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot y_\mathrm{e}(t) \, .
\end{aligned}$$

Für die Beobachter-Normalform bzw. für $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\dot{z}_0(t)\\ \dot{z}_1(t)\end{pmatrix} &= \mathbf{A}\begin{pmatrix}z_0(t)\\ z_1(t)\end{pmatrix} + \mathbf{B}y_\mathrm{e}(t)\\
y_\mathrm{a}(t) &= \mathbf{C}\begin{pmatrix}z_0(t)\\ z_1(t)\end{pmatrix} + \mathbf{D}y_\mathrm{e}(t)\ .
\end{aligned}$$

Man liest ab

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\,, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\,, \qquad \mathbf{C} = (0,1) \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = 0\ .$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

d) Die Differentialgleichung des Systems $\mathcal{S}_2$ wird zunächst zweifach integriert und nach der Ausgangsgröße $y_\mathrm{a}(t)$ umgestellt:

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{a}(t) &= -y_\mathrm{e}(t) - 2\int y_\mathrm{e}(t)\,\mathrm{d}t + \int\int y_\mathrm{e}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t + 2\int y_\mathrm{a}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= -y_\mathrm{e}(t) + \int\left(-2y_\mathrm{e}(t) + \int y_\mathrm{e}(t)\,\mathrm{d}t + 2y_\mathrm{a}(t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Anschließend kann der Signalflussplan wie in Abbildung L4 erstellt werden.

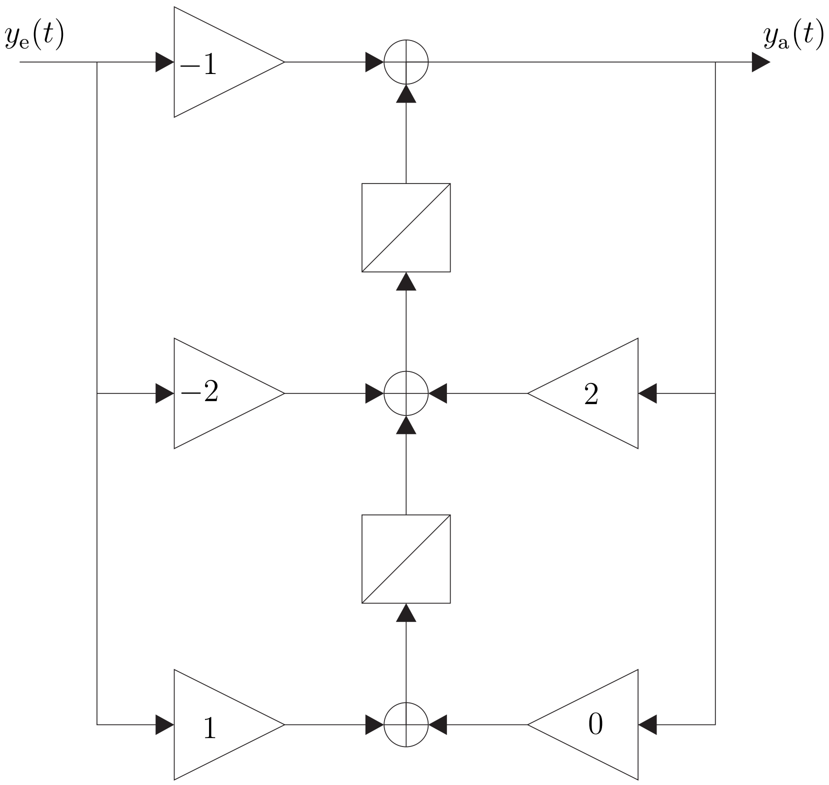

Abbildung L4: Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_2$.

*(Σ: **3 Punkte**)*

e) Aus der Laplace-Transformation der Differentialgleichung erhält man die Laplace-Transformierte des Ausgangssignals in Abhängigkeit von der Laplace-Transformierten des Eingangssignals

$$-\ddot{y}_\mathrm{e}(t) - 2\dot{y}_\mathrm{e}(t) + y_\mathrm{e}(t) = \ddot{y}_\mathrm{a}(t) - 2\dot{y}_\mathrm{a}(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$-s^2 Y_\mathrm{e}(s) - 2sY_\mathrm{e}(s) + Y_\mathrm{e}(s) = s^2 Y_\mathrm{a}(s) - 2sY_\mathrm{a}(s)$$

$$\Rightarrow \qquad Y_\mathrm{a}(s) = \frac{-s^2 - 2s + 1}{s(s-2)} Y_\mathrm{e}(s)\ .$$

Gemäß der Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation gilt

$$y_\mathrm{e}(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+2} = Y_\mathrm{e}(s)$$

und damit mittels Partialbruchzerlegung

$$Y_\mathrm{a}(s) = \frac{-s^2 - 2s + 1}{s(s-2)} \frac{1}{s+2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-2}$$

$$\Rightarrow \qquad -s^2 - 2s + 1 = A(s+2)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s+2)\ .$$

Durch das Einsetzen von 0, -2 und 2 für s erhält man

$$A = -\frac{1}{4}\,, \qquad B = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad C = \frac{-7}{8}\ .$$

Die nun vorliegenden Terme der Laplace-Transformierten des Ausgangssignals können mit Hilfe der Korrespondenztabelle rücktransformiert werden, sodass sich das Ausgangssignal im Zeitbereich ergibt:

$$Y_\mathrm{a}(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+2} - \frac{7}{8}\frac{1}{s-2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$y_\mathrm{a}(t) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2t} - \frac{7}{8}\,\mathrm{e}^{2t}\right) \cdot \sigma(t)\ .$$

(Σ: 6 Punkte)

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (16 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_1(t) = 4\,\mathrm{sinc}^2(2t)$.

a) Berechnen Sie das Spektrum $Y_1(f)$! *(2 Punkte)*

b) Welche Abtastfrequenz muss hier gemäß dem Abtasttheorem gewählt werden, damit das Ursprungssignal fehlerfrei rekonstruiert werden kann? *(1 Punkt)*

c) Das Signal y_1 werde nun mit der Frequenz $f_{\mathrm{A},1} = 6$ abgetastet. Zeichnen Sie das Betragsspektrum $|Y_{1,*}(f)|$ des abgetasteten Signals im Bereich $-10 \leq f \leq 10$! *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_2(t) = \mathrm{e}^{-2\pi|t|}$.

d) Das Signal y_2 werde nun abgetastet. Kann eine Abtastfrequenz gemäß dem Abtasttheorem gewählt werden, sodass das Ursprungssignal fehlerfrei aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort! *(2 Punkte)*

e) Das Signal y_2 werde nun mit der Frequenz $f_{\mathrm{A},2} = 3$ abgetastet. Zeigen Sie, dass die Änderung des Betragsspektrums durch Aliasing an der Stelle $f = 0$ ungefähr $34\,\%$ beträgt.
Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2} \approx 0{,}17$ *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal $y_{3,n} = (0, 1, 2, 3)$. Die Abtastfrequenz liegt bei $f_{\mathrm{A},3} = 1 \cdot 10^3$.

f) Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $Y_{3,k}$ des Signals $y_{3,n}$ und skizzieren Sie $|Y_{3,k}|$! *(4 Punkte)*

g) Im weiteren Vorgehen soll eine Frequenzauflösung von $\Delta f_3 = 0{,}2$ erreicht werden. Die Abtastfrequenz sei unveränderlich. Wie muss die Messung angepasst werden? *(1 Punkt)*

Lösung

a) Gemäß der Korrespondenztabelle der Fourier-Transformation sowie der Symmetrie $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(-t)$ erhält man eine Dreiecksfunktion der Breite 4 und Höhe 2 als Spektrum

$$y_1(t) = 4\,\mathrm{sinc}^2(2t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2d_4(-f) = 2d_4(f) = Y_1(f)\ .$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Gemäß dem Abtasttheorem muss für eine vollständige Rekonstruktion die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch gewählt werden wie die betragsmäßig größte, im Spektrum vorkommende Frequenz. Es gilt $Y_1(f) = 0$ für $|f| \geq 2$ und $Y_1(f) \neq 0$ für $|f| \leq 2$. Also muss für die Abtastfrequenz $f_{\mathrm{A},1} \geq 4$ gelten. ***(Σ: 1 Punkt)***

c) Abbildung L5 zeigt das Betragsspektrum $|Y_{1,*}(f)|$ im Bereich $-10 \leq f \leq 10$.

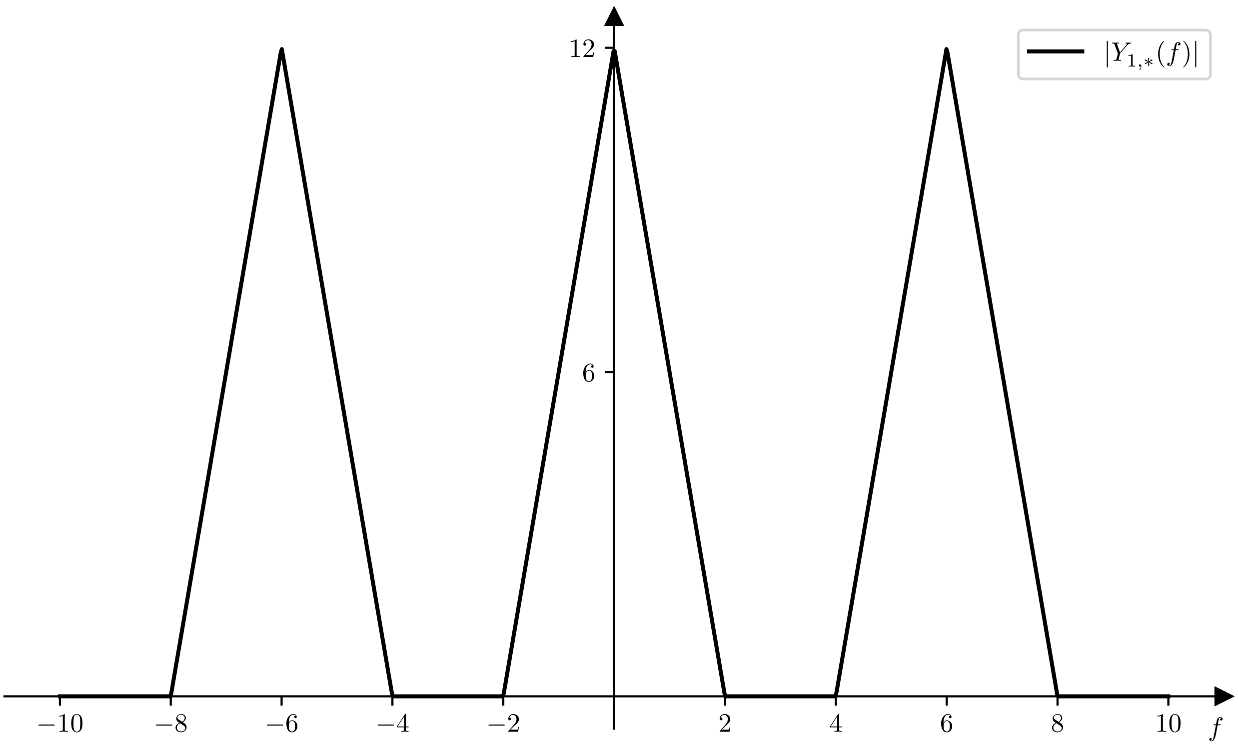

Abbildung L5: Das Betragsspektrum $|Y_{1,*}(f)|$.

(Σ: 2 Punkte)

d) Gemäß der Korrespondenztabelle der Fourier-Transformation erhält man das kontinuierliche Spektrum

$$y_2(t) = \mathrm{e}^{-2\pi|t|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2\cdot 2\pi}{(2\pi)^2 + (2\pi f)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+f^2} = Y_2(f)\ . \tag{L3}$$

Das Spektrum $Y_2(f)$ ist also insbesondere nicht bandbegrenzt und das Abtasttheorem ist demnach nicht anwendbar. ***(Σ: 2 Punkte)***

e) Die Abtastung des Signals führt zu einer periodischen Wiederholung im Spektrum. Die periodischen Wiederholungen überlappen sich und es kommt zu Aliasing. Der Wert von $Y_{2,*}(0)$ beträgt also nicht $f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)$, sondern die Summe aller periodischen Wiederholungen

$$Y_{2,*}(0) = f_{\mathrm{A},2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_2(0 - n f_{\mathrm{A},2}) \ .$$

Gesucht ist der prozentuale Unterschied der beiden Werte (der relative Fehler), also

$$\frac{|Y_{2,*}(0)| - |f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)|}{|f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)|} = \frac{Y_{2,*}(0) - f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)}{f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)} \ .$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil das Spektrum Y_2 reell und positiv ist.

Für das Spektrum des abgetasteten Signals gilt

$$Y_{2,*}(f) = f_{\mathrm{A},2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_2(f - n f_{\mathrm{A},2}) \ .$$

Wegen $Y_2(f) = Y_2(-f)$ erhält man

$$Y_{2,*}(0) = f_{\mathrm{A},2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_2(n f_{\mathrm{A},2}) = f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0) + 2 f_{\mathrm{A},2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Y_2(n f_{\mathrm{A},2}) \ .$$

Daraus folgt

$$Y_{2,*}(0) - f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0) = 2 f_{\mathrm{A},2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Y_2(n f_{\mathrm{A},2}) \overset{\text{(L3)}}{=} 2 f_{\mathrm{A},2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (n f_{\mathrm{A},2})^2} \ .$$

Mit $Y_2(0) = 1/\pi$ und $f_{\mathrm{A},2} = 3$ ergibt sich mittels des Hinweises aus der Aufgabenstellung

$$\frac{Y_{2,*}(0) - f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)}{f_{\mathrm{A},2}\,Y_2(0)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 9n^2} \approx 2 \cdot 0{,}17 = 0{,}34 = 34\,\% \ .$$

Abbildung L6 veranschaulicht die Verfälschung des Spektrums durch Aliasing. (Die Abbildung ist nicht verlangt.) ***(Σ: 4 Punkte)***

f) Die 4-Punkte-DFT der gegebenen Wertefolge lautet

$$\begin{aligned} Y_{3,k} &= \sum_{n=0}^{3} y_{3,n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \frac{n}{4}} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k \frac{1}{2}} + 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} + 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k \frac{3}{2}} \ . \end{aligned}$$

Durch einsetzen von 0, 1, 2 und 3 für k erhält man

$$\begin{aligned} Y_{3,0} &= 6 && \Rightarrow |Y_{3,0}| = 6\,, \\ Y_{3,1} &= -2 + 2\mathrm{j} && \Rightarrow |Y_{3,1}| = 2 \cdot \sqrt{2}\,, \\ Y_{3,2} &= -2 && \Rightarrow |Y_{3,2}| = 2\,, \\ Y_{3,3} &= -2 - 2\mathrm{j} && \Rightarrow |Y_{3,3}| = 2 \cdot \sqrt{2}\ . \end{aligned}$$

Abbildung L7 zeigt $|Y_{3,k}|$. ***(Σ: 4 Punkte)***

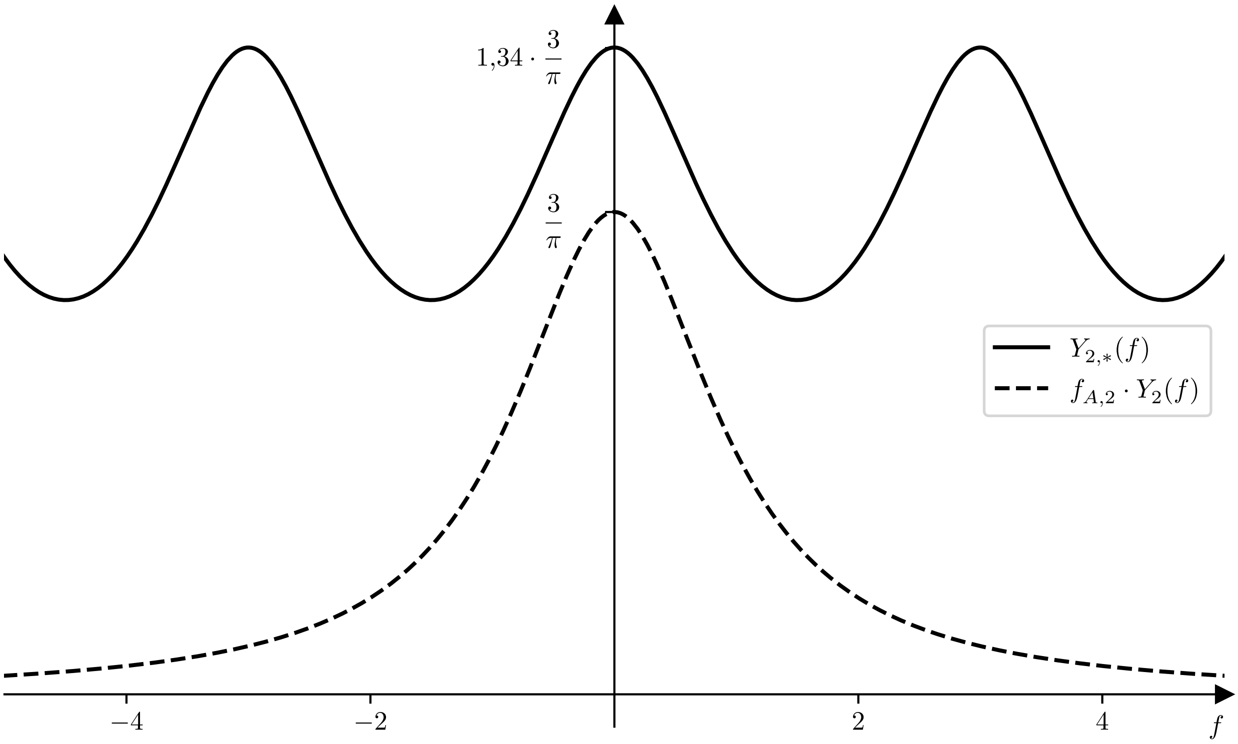

Abbildung L6: Verfälschung des Spektrums durch Aliasing.

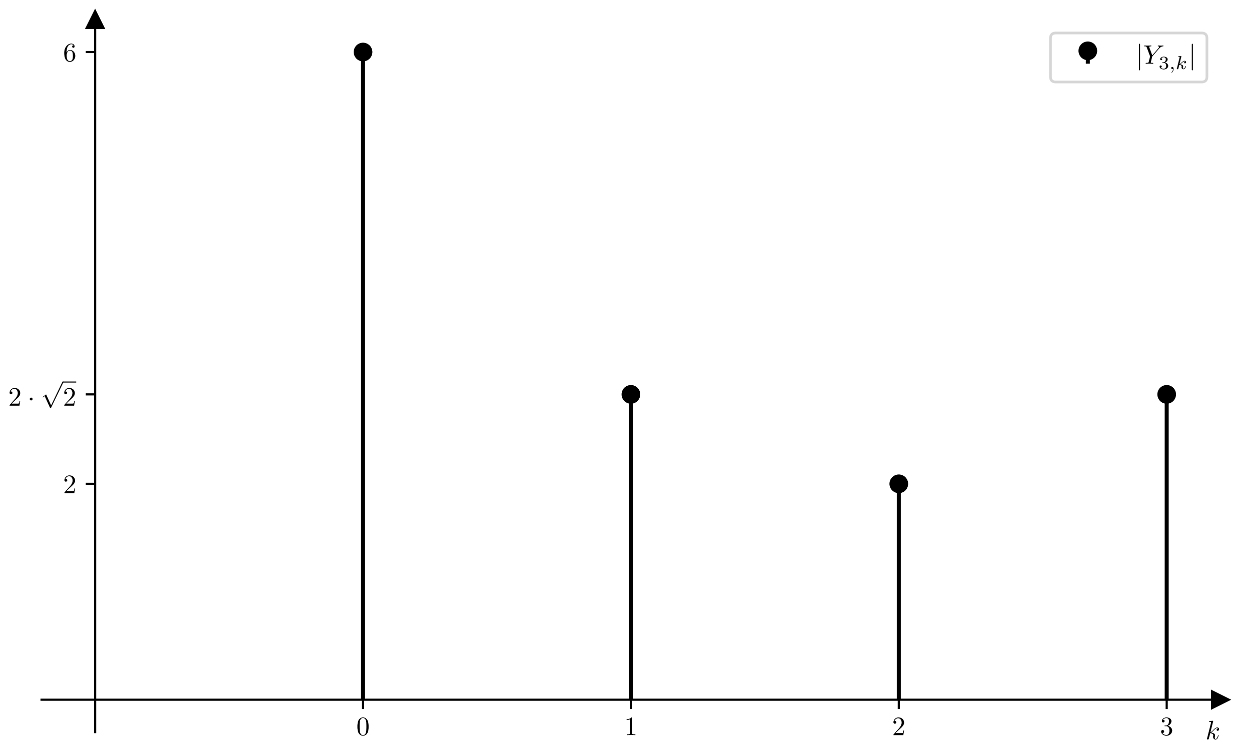

Abbildung L7: Das diskrete Betragsspektrum $|Y_{3,k}|$.

g) Die Frequenzauflösung ist definiert als $\Delta f_3 = f_{\mathrm{A},3}/N$, wobei N die Anzahl der Abtastpunkte ist. Um die Frequenzauflösung bei unveränderlicher Abtastfrequenz zu erhöhen, muss die Anzahl der Abtastpunkte vergrößert werden. Es folgt, dass mindestens

$$N = \frac{f_{\mathrm{A},3}}{\Delta f_3} = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{-1}} = 5000$$

Abtastwerte vorliegen müssen. (Nicht verlangt: Interpretiert man die Frequenz in der Einheit Hz, muss die Beobachtungszeit also mindestens $5\,\mathrm{s}$ betragen.) ***(Σ: 1 Punkt)***

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems $\mathcal{S}_1$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$.

a) Bestimmen Sie eine Übertragungsfunktion $G_2(z)$ eines zeitdiskreten Systems $\mathcal{S}_2$ aus $G_1(s)$ mittels Impulsinvarianz! Die Abtastzeit der Impulsantwort sei hierbei mit $t_\mathrm{A} > 0$ bezeichnet. Geben Sie insbesondere auch das Konvergenzgebiet von $G_2(z)$ an! *(4 Punkte)*

b) Das zeitkontinuierliche System $\mathcal{S}_1$ sei stabil. Zeigen Sie, dass dann auch das zeitdiskrete System $\mathcal{S}_2$ stabil ist! *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Differenzengleichung, die das zeitdiskrete System $\mathcal{S}_2$ charakterisiert! *(2 Punkte)*

d) Ist das aufgestellte, zeitdiskrete System $\mathcal{S}_2$ kausal? Begründen Sie Ihre Antwort! *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei die Systemantwort $Y_\mathrm{a}(z)$ eines zeitdiskreten Systems $\mathcal{S}_3$ durch

$$Y_\mathrm{a}(z) = \frac{-z^2 - z}{z^2 - 5z + 6} \,.$$

e) Ermitteln Sie die Konvergenzgebiete der z-Transformierten $Y_\mathrm{a}(z)$! *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die zu $Y_\mathrm{a}(z)$ gehörige kausale **und** antikausale Zeitfolge durch Rückführung auf Reihen! *(5 Punkte)*

Lösung

a) Die Schritte zum Aufstellen der Übertragungsfunktion $G_2(z)$ aus $G_1(s)$ mittels Impulsvarianz sind folgende:

1) Zunächst wird die Impulsantwort $g_1(t)$ mittels der inversen Laplace-Transformation berechnet. Mittels einer Partialbruchzerlegung erhält man

$$
\begin{aligned}
G_1(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} &= \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)} \\
\Rightarrow \qquad 1 &= A(s-b) + B(s-a)\ .
\end{aligned}
$$

Durch das Einsetzen von a und b für s erhält man $A = 1/(a-b)$ und $B = -A$. Damit ergibt sich mittels der Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) \\
&\ \bullet\!\!-\!\!\circ \\
g_1(t) &= \frac{1}{a-b}\left(\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{bt}\right)\sigma(t)\ .
\end{aligned}
$$

2) Als nächstes wird die zeitdiskrete Impulsantwort $g_{2,n}$ durch Abtasten mit der Abtastzeit t_A der zeitkontinuierlichen Impulsantwort $g_1(t)$ aufgestellt

$$
g_{2,n} = g_1(nt_\mathrm{A}) = \frac{1}{a-b}\left(\mathrm{e}^{ant_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{bnt_\mathrm{A}}\right)\sigma(nt_\mathrm{A}) = \frac{1}{a-b}\left[\left(\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}}\right)^n - \left(\mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}\right)^n\right]\sigma_n\ . \tag{L4}
$$

3) Im letzten Schritt wird die z-Transformierte von $g_{2,n}$ mittels der Korrespondenztabelle unter Beachtung des Konvergenzgebietes bestimmt

$$
\begin{aligned}
g_{2,n} &= \frac{1}{a-b}\left[\left(\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}}\right)^n - \left(\mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}\right)^n\right]\sigma_n \\
&\ \bullet\!\!-\!\!\circ \\
G_2(z) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}}} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}}\right) \qquad \text{für} \quad |z| > |\,\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}}\,| \quad \text{und} \quad |z| > |\,\mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}\,|\ .
\end{aligned}
$$

(Σ: 4 Punkte)

b) Um zu zeigen, dass das aufgestellte System S_2 stabil ist, kann folgende Kette von Implikationen aufgestellt werden:

$$
\begin{aligned}
S_1 \text{ ist stabil.} &\Rightarrow G_1 \text{ hat nur Polstellen mit negativem Realteil.} \\
&\Rightarrow a < 0 \quad \text{und} \quad b < 0 \quad \text{unter Beachtung von } a, b \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow at_\mathrm{A} < 0 \quad \text{und} \quad bt_\mathrm{A} < 0 \\
&\Rightarrow |\,\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}}\,| < 1 \quad \text{und} \quad |\,\mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}\,| < 1 \\
&\Rightarrow G_2 \text{ hat nur Polstellen innerhalb des Einheitskreises.} \\
&\Rightarrow S_2 \text{ ist stabil.}
\end{aligned}
$$

(Σ: 3 Punkte)

c) Die Differenzengleichung kann aus der Übertragungsfunktion $G_2(z)$ abgeleitet werden. Zunächst wird $G_2(z)$ als Bruch zweier Polynome in z wie folgt dargestellt

$$G_2(z) = \frac{(\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}})}{a-b} \left(\frac{z}{z^2 - (\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}})z + \mathrm{e}^{(a+b)t_\mathrm{A}}} \right) .$$

Mittels des Verschiebungssatzes der z-Transformation erhält man die Differenzengleichung

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \frac{Y_\mathrm{a}(z)}{Y_\mathrm{e}(z)} \\ \Rightarrow \qquad z^2 Y_\mathrm{a}(z) - (\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}) z Y_\mathrm{a}(z) + \mathrm{e}^{(a+b)t_\mathrm{A}}\, Y_\mathrm{a}(z) &= \frac{(\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}})}{a-b} z Y_\mathrm{e}(z) \\ &\;\circ\!\!-\!\!\bullet \\ y_{a,n+2} - (\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}) y_{a,n+1} + \mathrm{e}^{(a+b)t_\mathrm{A}}\, y_{a,n} &= \frac{(\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}})}{a-b} y_{e,n+1} \, . \end{aligned} \tag{L5}$$

(Σ: 2 Punkte)

d) Durch Umstellen der Gleichung (L5) und durch eine Indexverschiebung $n' = n+2$ erhält man

$$y_{a,n'} = (\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}}) y_{a,n'-1} - \mathrm{e}^{(a+b)t_\mathrm{A}}\, y_{a,n'-2} + \frac{(\mathrm{e}^{at_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{bt_\mathrm{A}})}{a-b} y_{e,n'-1} \, .$$

Man erkennt, dass das Ausgangssignal $y_{a,n'}$ nur von vergangenen Ein- und Ausgangswerten abhängt. Das System S_2 ist somit kausal.

Alternativ kann man auch mittels Gleichung (L4) argumentieren, dass die zeitdiskrete Impulsantwort $g_{2,n}$ für negative Indizes zu 0 wird und das System S_2 somit kausal ist.

(Σ: 1 Punkt)

e) Die z-Transformierte $Y_\mathrm{a}(z)$ besitzt Polstellen bei $z = 3$ und $z = 2$. Somit ergeben sich folgende Konvergenzgebiete:

1) $|z| > 3$ (kausal),
2) $|z| < 2$ (antikausal) und
3) $2 < |z| < 3$ (akausal).

(Σ: 2 Punkte)

f) Zunächst erfolgt eine Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} Y_\mathrm{a}(z) = \frac{-z^2 - z}{z^2 - 5z + 6} &= -z \cdot \frac{z+1}{(z-3)(z-2)} \\ &= -z \cdot \left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-2} \right) \\ &= -z \cdot \left(\frac{4}{z-3} + \frac{-3}{z-2} \right) \\ &= \frac{-4z}{z-3} + \frac{3z}{z-2} \, . \end{aligned}$$

Die kausale Lösung ergibt sich für das Konvergenzgebiet $|z| > 3$:

$$\begin{aligned}
Y_\mathrm{a}(z) &= \frac{-4z}{z-3} + \frac{3z}{z-2} \\
&= -4 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} + 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\
&= -4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n + 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \\
&= -4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot z^{-n} + 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot z^{-n}
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$y_{a,n} = (-4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n) \cdot \sigma_n \,.$$

Die antikausale Lösung ergibt sich für das Konvergenzgebiet $|z| < 2$:

$$\begin{aligned}
Y_\mathrm{a}(z) &= \frac{-4z}{z-3} + \frac{3z}{z-2} \\
&= \frac{-4z}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{3z}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= \frac{4z}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{3z}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^{n+1} - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} && \Big| \quad n = -n' - 1 \\
&= 4 \cdot \sum_{n'=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{3}\right)^{-n'} - 3 \cdot \sum_{n'=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n'} \\
&= 4 \cdot \sum_{n'=-\infty}^{-1} 3^{n'} z^{-n'} - 3 \cdot \sum_{n'=-\infty}^{-1} 2^{n'} z^{-n'}
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$y_{a,n'} = \left(4 \cdot 3^{n'} - 3 \cdot 2^{n'}\right) \cdot \sigma_{-n'-1} \,.$$

(Σ: 5 Punkte)