

Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

**Klausur im Fach
Signale und Systeme
29. März 2012**

Musterlösung

MUSTERLÖSUNG

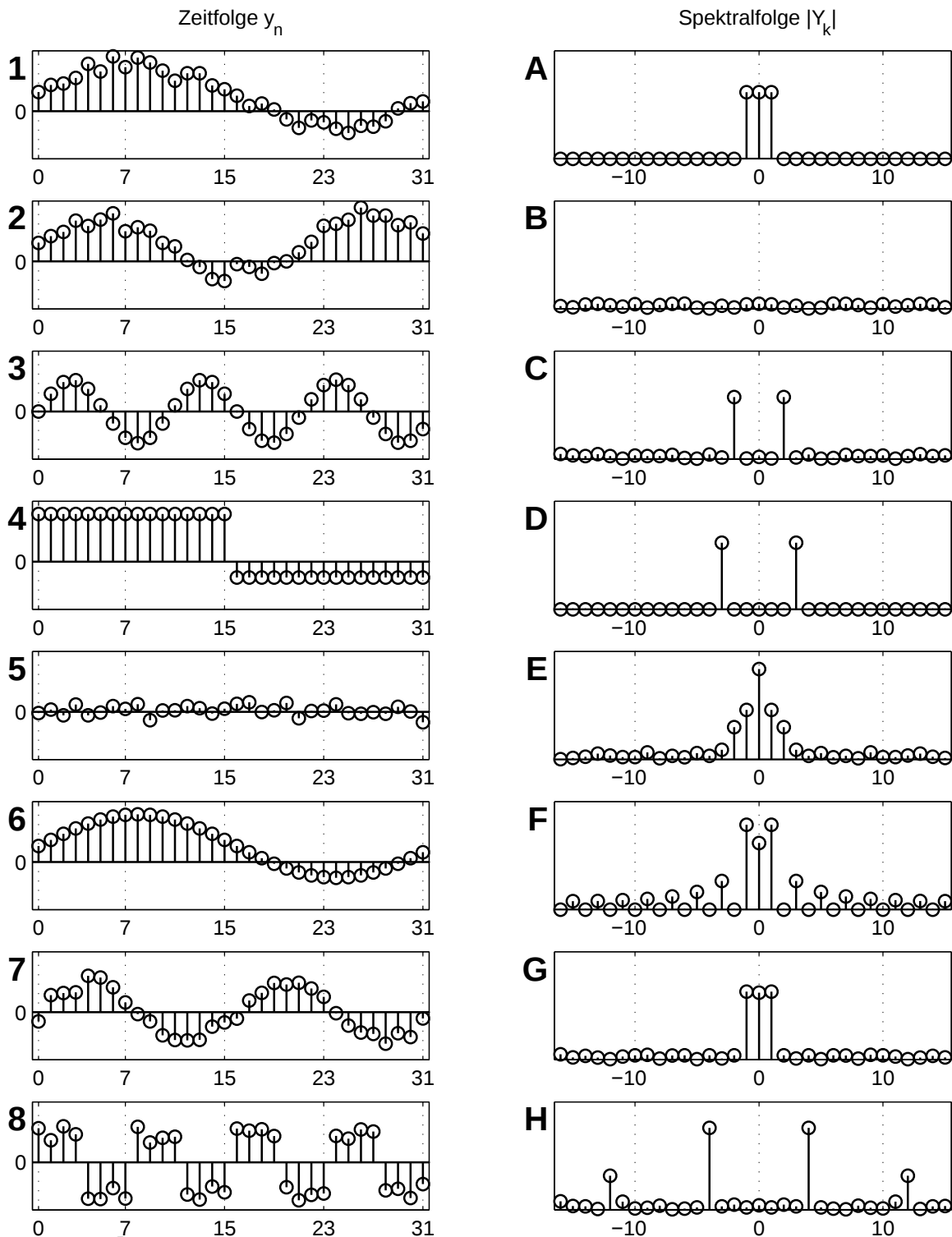
Zuordnungsaufgaben (12 Punkte)

a) Diskrete Fourier-Transformation (4 Punkte)

Im unteren Bild finden Sie in der linken Spalte acht diskrete Zeitsignale und in der rechten Spalte die zugehörigen diskreten Fourier-Transformierten. Leider sind die diskreten Fourier-Transformierten nicht in der richtigen Reihenfolge.

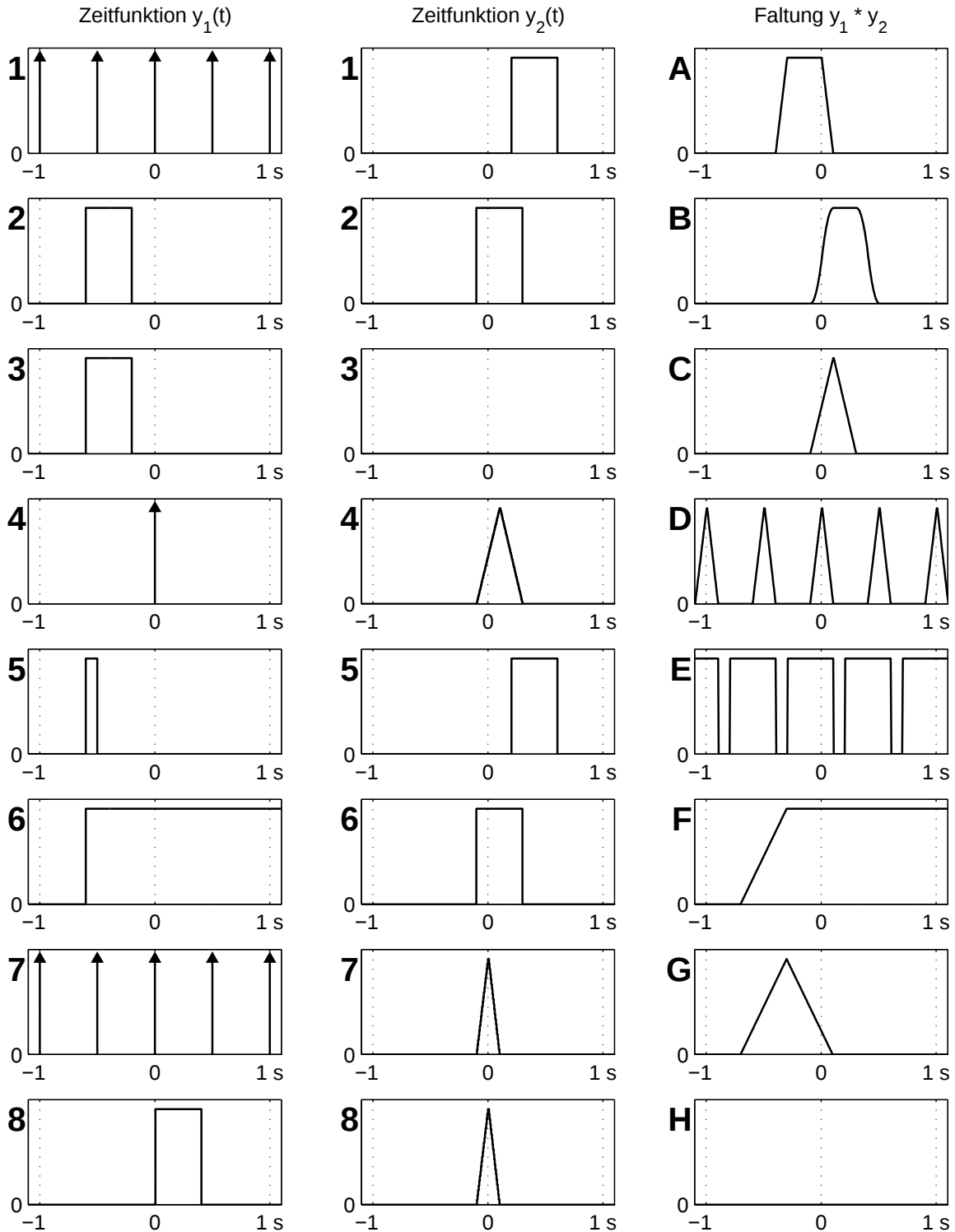
Geben Sie zu jeder Zeitfolge y_n (1-8) das zugehörige Betragsspektrum $|Y_k|$ (A-H) an.

(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)



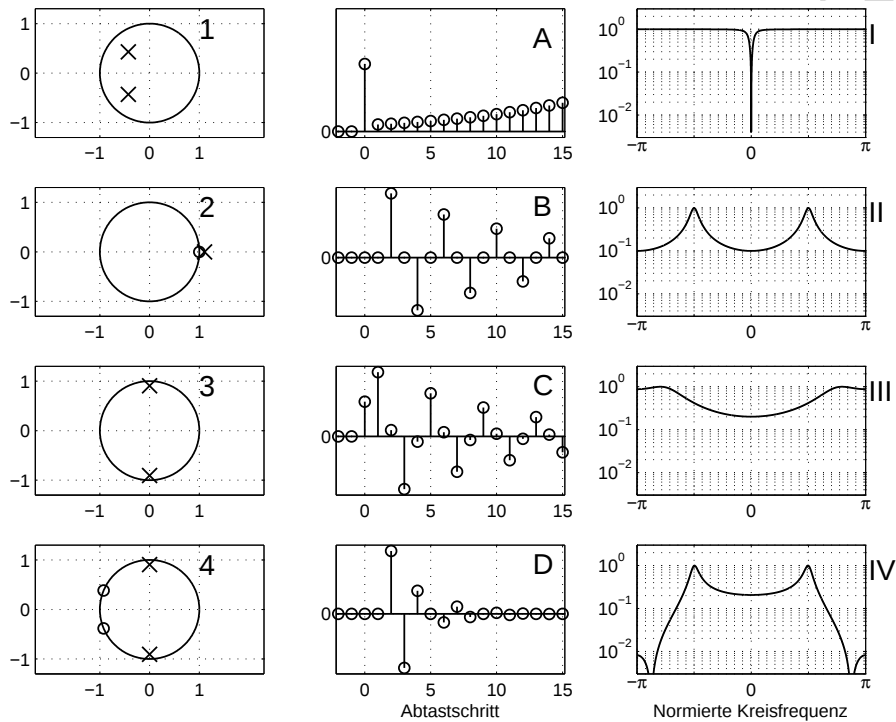
b) Faltung (4 Punkte)

Im unteren Bild finden Sie in der linken und mittleren Spalte acht (1-8) jeweils zueinandergehörige Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ und in der rechten Spalte acht Faltungen $y_1 * y_2$ (A-H). Leider sind die Faltungen nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jedem Funktionenpaar (1-8) die zugehörige Faltung (A-H) an. (0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)



c) Zeitdiskrete Systeme (4 Punkte)

Im unteren Bild finden Sie in der linken Spalte vier Pol-/Nullstellendiagramme zeitdiskreter Systeme (1-4). Ordnen Sie diesen jeweils die korrekte Impulsantwort (A-D) und den korrekten Amplitudengang (I-IV) zu. (0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)



Lösung

Diskrete Fourier-Transformation

- 1-G
- 2-E
- 3-D
- 4-F
- 5-B
- 6-A
- 7-C
- 8-H

Faltung

- 1-E
- 2-G
- 3-H
- 4-C
- 5-A
- 6-F
- 7-D
- 8-B

Zeitdiskrete Systeme

- 1-D-III
- 2-A-I
- 3-B-II
- 4-C-IV

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (16 Punkte)

Mit dem Verfahren der Pulsweitenmodulation (PWM) können in Digitalendstufen aus einer konstanten Eingangsspannung $u(t) = A$ Ausgangsspannungen $y(t)$ mit $0 \leq y(t) \leq u(t)$ erzielt werden. Dabei sind die Schaltelemente entweder maximal leitend oder maximal sperrend und erzeugen so ein Rechtecksignal $r(t)$.

Durch einen Tiefpass werden die harmonischen Frequenzen, die durch die Schaltoperationen im Rechtecksignal $r(t)$ vorhanden sind, unterdrückt. In diesem Fall soll der Tiefpass alle Frequenzen $f > 0$ unterdrücken und somit gerade den Mittelwert des modulierten Signals zurück liefern.

Die Funktion der Schaltung kann mithilfe der Fourier-Reihe untersucht werden. Wenn zwischen zwei Spannungsimpulsen die Zeitdauer T liegt, erhält man vor dem Tiefpass einen Spannungsverlauf wie in Abbildung 1.

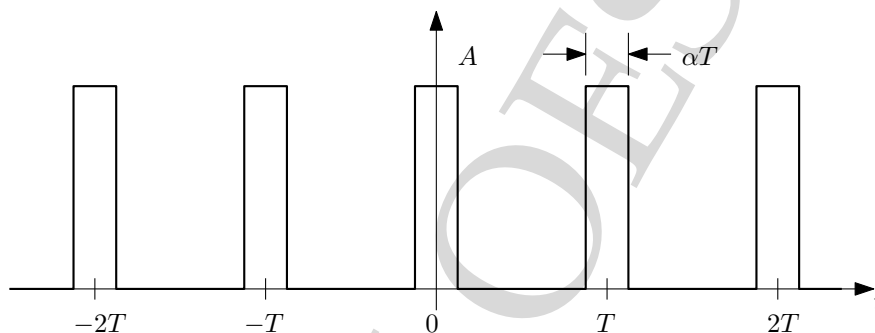


Abbildung 1: Rechtecksignal.

Die Breite eines Impulses ist αT . Für $\alpha = 1$ wird die Spannung A erzeugt, für $\alpha = 0$ die Spannung 0.

- Welchen Wert nimmt die Ausgangsspannung $y(t)$ in Abhängigkeit von α an, wenn nach dem Tiefpassfilter nur der Gleichanteil des Signals vorhanden bleibt? (2 Punkte)
- Der Tiefpass filtert die Grundfrequenz und alle Oberschwingungen aus dem Signal heraus. Wie groß ist die Amplitude der Grundfrequenz in Abhängigkeit von α ? (3 Punkte)
- Bei welchem Wert von α nimmt die Amplitude der Grundfrequenz den höchsten Wert an? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

- Berechnen Sie mithilfe der Faltungsdefinition die Faltung $h(t) = f(t) * g(t)$ der beiden Signale

$$f(t) = \cos(2\pi t)\sigma(t) \quad \text{und} \quad g(t) = \sigma\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Dabei steht $\sigma(t)$ für die Sprungfunktion.

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

- Das Spektrum eines Signals $x(t)$ sei bandbegrenzt: $X(f) = 0$ für $|f| > f_0$. Es seien die Funktionen

$$y_1(t) = x(t) + x(t - 1) \quad \text{und} \quad y_2(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

gegeben. Auf welchen Bereich B ist das Spektrum der Signale $y_i(t)$ begrenzt? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Sie haben die Funktionen $x(t)$ und $h(t)$ wie in Abbildung 2 gegeben.

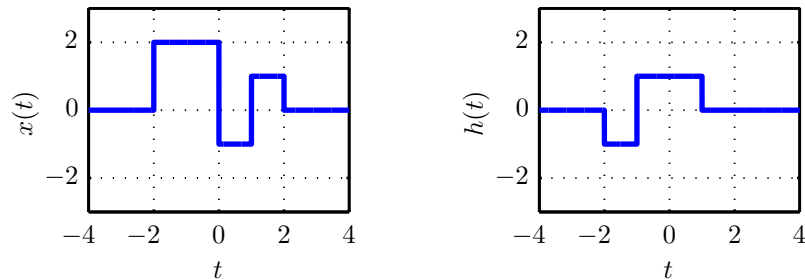


Abbildung 2: Vorgegebene Funktionen.

- f) Skizzieren Sie das Ergebnis $y(t)$ der Faltung von $x(t)$ und $h(t)$. Hinweis: Beachten Sie charakteristische Punkte. (4 Punkte)

Lösung

- a) Die Ausgangsspannung entspricht dem Gleichanteil der Rechteckspannung:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} A dt = \alpha A.$$

- b) Die Amplitude der Grundschiwingung setzt sich aus den ersten positiven und negativen Koeffizienten der entsprechenden komplexen Fourier-Reihe zusammen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-j2\pi \frac{1}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} A e^{-j2\pi \frac{1}{T} t} dt = \frac{1}{T} \frac{-T}{j2\pi} A \left[e^{-j2\pi \frac{1}{T} t} \right]_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} \\ &= A \frac{j}{2\pi} \left(e^{-j\alpha\pi} - e^{j\alpha\pi} \right) = \frac{A}{\pi} \sin(\alpha\pi) = c_{-1}. \end{aligned}$$

Die Amplitude ist die Summe der zwei Koeffizienten:

$$\hat{y}(t) = c_1 + c_{-1} = 2 \frac{A}{\pi} \sin(\alpha\pi).$$

- c) Den maximalen Wert nimmt der Koeffizient c_1 für $\alpha = 0,5$ an.
d) Durch Einsetzen der beiden Funktionen in die Definitionsgleichung der Faltung erhält

man

$$\begin{aligned}
 h(t) &= f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\tau) \sigma(\tau) \sigma\left(t - \frac{1}{2} - \tau\right) \, d\tau \\
 &= \int_0^{t-\frac{1}{2}} \cos(2\pi\tau) \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(2\pi\tau) \right]_0^{t-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \sigma\left(t - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \sigma\left(t - \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

e) Zeitverschiebung:

$$Y(f) = X(f) + e^{-j2\pi f} X(f) \quad \Rightarrow \quad B = -f_0 \dots f_0$$

Multiplikation entspricht Faltung im Frequenzbereich:

$$Y(f) = \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \right) * X(f) \quad \Rightarrow \quad B = -2f_0 \dots 2f_0$$

f) Die Faltung der beiden Signale liefert das Signal $y(t)$:

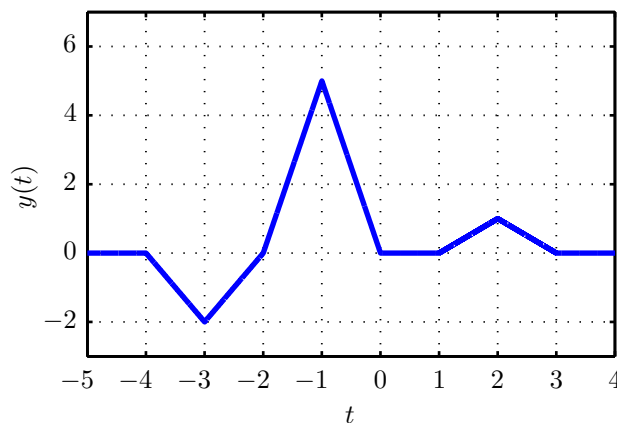


Abbildung 3: Faltung.

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (21 Punkte)

Ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t)$$

beschrieben. Dabei ist $y(t)$ das Ausgangssignal und $x(t)$ das Eingangssignal.

- Geben sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/X(s)$ an. (1 Punkt)
- An das System wird das Eingangssignal

$$x_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

angelegt. Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y_1(t)$. (2 Punkte)

- Der Ausgang des Systems werde nun rückgekoppelt (siehe Abbildung 4). Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die das Gesamtsystem beschreibt. (2 Punkte)

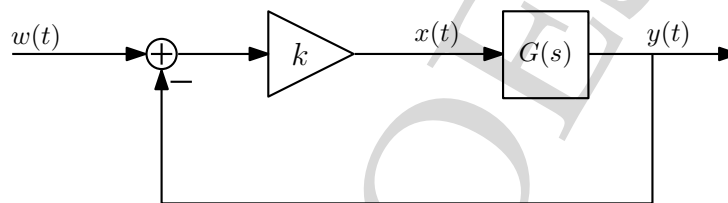


Abbildung 4: Rückgekoppeltes LTI-System.

- Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ ist das rückgekoppelte System stabil? (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Ein LTI-System wird durch die Impulsantwort

$$g(t) = \frac{1}{2} \text{si}(\pi t/2)$$

beschrieben. An das System wird das Eingangssignal

$$x(t) = \text{si}^2(\pi t)(1 + 2 \cos(2\pi t))$$

angelegt.

- Wie lautet die Fourier-Transformierte $G(f)$? Skizzieren Sie diese. (2 Punkte)
- Wie lautet die Fourier-Transformierte $X(f)$? Skizzieren Sie diese. (2 Punkte)
- Wie lautet die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals $Y(f)$? Skizzieren Sie diese. (2 Punkte)
- Wie lautet das Ausgangssignal $y(t)$? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Es sei die Operationsverstärkerschaltung aus Abbildung 5 gegeben. Nehmen Sie den Operationsverstärker als ideal an, d. h. dass kein Strom in den Operationsverstärker fließt. Für $t < 0$ sind alle Ströme null und die Kondensatoren ungeladen. Für den Strom durch den Kondensator gilt

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) .$$

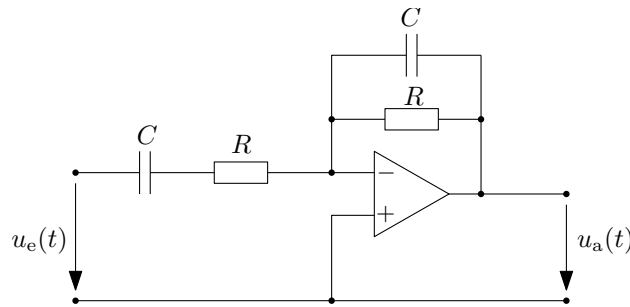


Abbildung 5: Elektrische Filterschaltung.

i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = U_a(s)/U_e(s)$ (4 Punkte)

j) Handelt es sich bei der Schaltung um einen Hoch- oder einen Tiefpass? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Ein LTI-System antwortet auf das rechteckförmige Eingangssignal $x_1(t)$ mit dem dreieckförmigen Ausgangssignal $y_1(t)$ aus Abbildung 6.

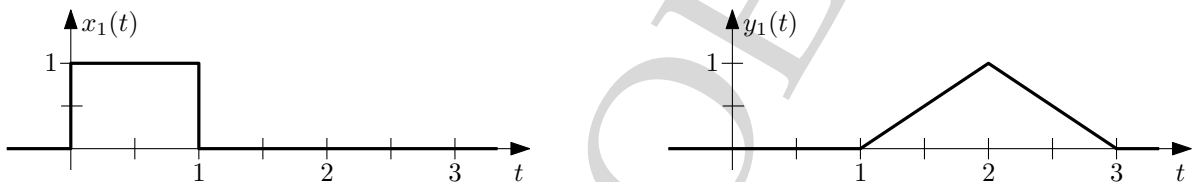


Abbildung 6: Ein- und Ausgangssignal eines LTI-Systems.

An das System werde nun ein Eingangssignal der Form in Abbildung 7 angelegt.

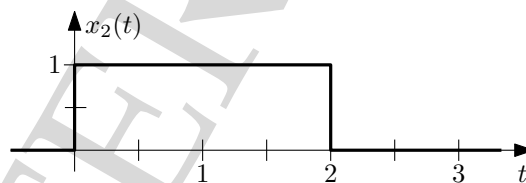


Abbildung 7: Neues Eingangssignal $x_2(t)$ des LTI-Systems.

k) Zeichnen Sie das resultierende Ausgangssignal $y_2(t)$. Überlegen Sie sich zunächst, welche Form die Impulsantwort $g(t)$ des Systems hat. (2 Punkte)

Lösung

a) Durch Laplace-Transformation erhält man

$$(s+1)Y(s) = (s-1)X(s)$$

und die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

- b) Die Laplace-Transformierte des Eingangssignal $x_1(t)$ ist

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Damit ergibt sich

$$Y_1(s) = \frac{s-1}{s+1} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Laplace-Rücktransformation liefert

$$y_1(t) = (e^{-t} - 2te^{-t}) \sigma(t).$$

- c) Die Differentialgleichung lässt sich aus der Übertragungsfunktion des Gesamtsystems herleiten:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{k \frac{s-1}{s+1}}{1 + k \frac{s-1}{s+1}} = k \frac{s-1}{s+1 + ks - k} = k \frac{s-1}{(k+1)s - (k-1)}.$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$(k+1) \frac{d}{dt} y(t) - (k-1)y(t) = k \frac{d}{dt} w(t) - kw(t).$$

- d) Die Polstelle des Gesamtsystems liegt bei

$$s_\infty = \frac{k-1}{k+1}.$$

Für diese muss gelten

$$\frac{k-1}{k+1} < 0$$

1. Fall: $k > -1$

$$\frac{k-1}{k+1} < 0$$

$$k-1 < 0$$

$$k < 1$$

2. Fall: $k < -1$

$$\frac{k-1}{k+1} < 0$$

$$k-1 > 0$$

$$k > 1$$

Dies ist ein Widerspruch. Insgesamt ergibt sich also

$$-1 < k < 1.$$

- e) Aus der Korrespondenz-Tabelle lässt sich entnehmen (siehe auch Abbildung 8(a)):

$$G(f) = r_{\frac{1}{2}}(f).$$

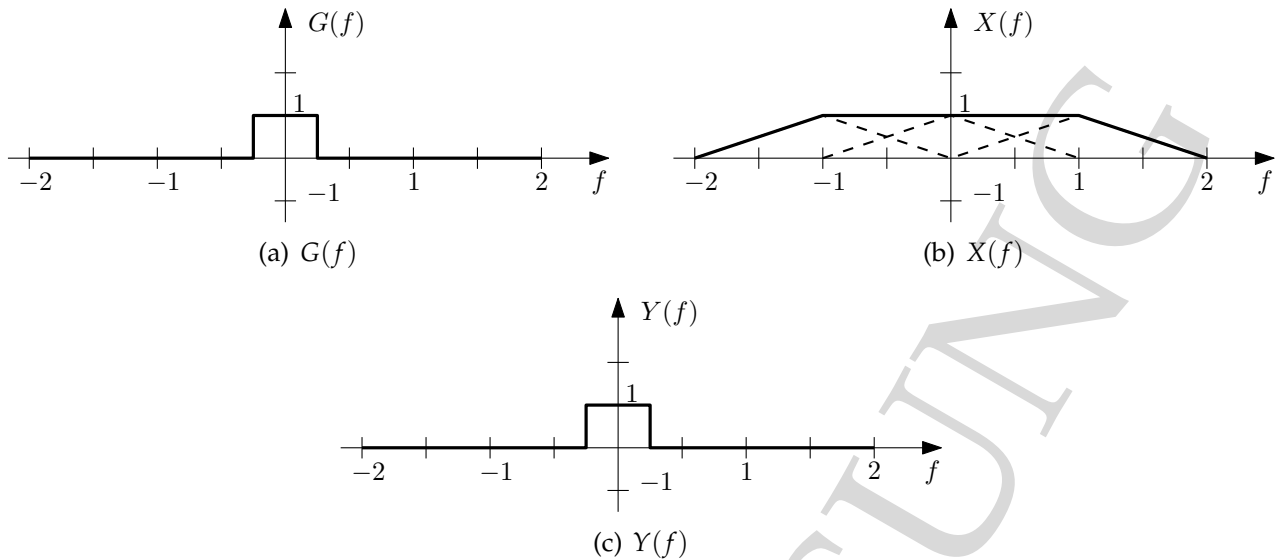


Abbildung 8: Fourier-Transformierte.

- f) Es gilt (siehe auch Abbildung 8(b))

$$X(f) = d_2(f) * (\delta(f) + \delta(f - 1) + \delta(f + 1)) = d_2(f - 1) + d_2(f) + d_2(f + 1) .$$

- g) Es gilt (siehe auch Abbildung 8(c))

$$Y(f) = r_{\frac{1}{2}}(f) .$$

- h) Fourier-Rücktransformation liefert

$$y(t) = \frac{1}{2} \text{si}(\pi t/2) .$$

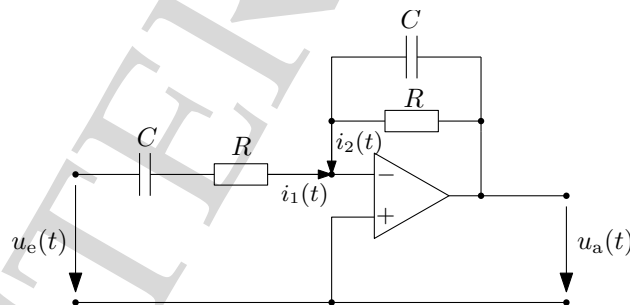


Abbildung 9: Elektrische Filterschaltung.

- i) In den Operationsverstärker darf kein Strom hineinfließen und der Potentialunterschied zwischen den Eingängen des Operationsverstärkers wird zu null angenommen. Somit gilt für die Ströme aus Abbildung 9.

$$i_1(t) = -i_2(t) .$$

Die einzelnen Ströme lassen sich im Laplace-Bereich leicht aufstellen:

$$I_1(s) = \frac{U_e(s)}{\frac{1}{Cs} + R} ,$$

$$I_2(s) = \frac{U_a(s)}{R} + \frac{U_a(s)}{\frac{1}{Cs}} .$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{U_e(s)}{\frac{1}{Cs} + R} &= - \left(\frac{U_a(s)}{R} + \frac{U_a(s)}{\frac{1}{Cs}} \right) \\ \frac{U_a(s)}{U_e(s)} &= - \frac{1}{\frac{1}{Cs} + R} \frac{1}{\frac{1}{R} + Cs} \\ &= - \frac{1}{RC} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2}.\end{aligned}$$

- j) Es handelt sich um einen Tiefpass.
k) Die Impulsantwort $g(t)$ ist ebenfalls ein Rechteckimpuls (siehe Abbildung 10). Dies ergibt sich aus dem Zusammenhang

$$y_1(t) = g(t) * x_1(t).$$

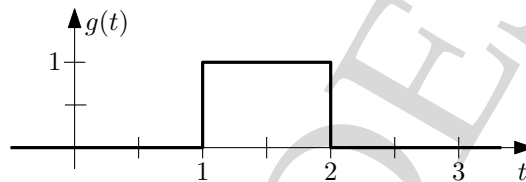


Abbildung 10: Impulsantwort $g(t)$ des LTI-Systems.

Die Faltung von $g(t)$ mit dem neuen Eingangssignal $x_2(t)$ liefert das Ausgangssignal $y_2(t)$ aus Abbildung 11.

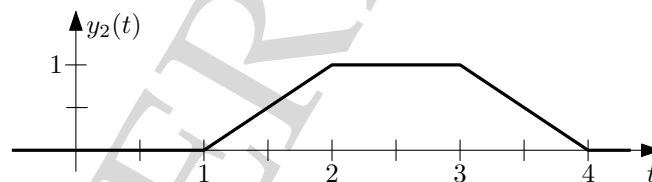


Abbildung 11: Neues Ausgangssignal $y_2(t)$ des LTI-Systems.

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (12 Punkte)

Bei einem Crashtest gewonnene Signale sollen auf einem digitalen Signalprozessor (DSP) analysiert werden.

Die Abtastfrequenz betrage zunächst $f_A = 1$ kHz.

- a) Bei einem ersten Testlauf wird folgendes Signal für die Beschleunigung in x-Richtung aufgenommen:

$$u_n = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Berechnen Sie die 6-Punkte-DFT U_k des Signals u_n und skizzieren Sie $|U_k|$. Was lässt sich daraus über u_n aussagen? Tritt ein Leckeffekt auf? (6 Punkte)

- b) Ein interessanter Peak in der diskreten Fourier-Transformierten soll nun genauer untersucht werden. Was muss bei der Signalgewinnung beachtet werden, damit bei gleicher Abtastfrequenz die Frequenzauflösung besser als $2 \cdot 10^{-1}$ Hz wird? (2 Punkte)
- c) Die Berechnung der DFT auf dem DSP erweist sich nun als zu langsam. Daher soll zur Berechnung der FFT-Algorithmus verwendet werden. Welcher Parameter muss hierzu wie geändert werden, damit auch die oben gestellten Bedingungen erfüllt bleiben? (2 Punkte)
- d) Durch eine theoretische Analyse des Versuchsaufbaus ist bekannt, dass das abzutastende Signal das in Abbildung 12 dargestellte Betragsspektrum besitzt.

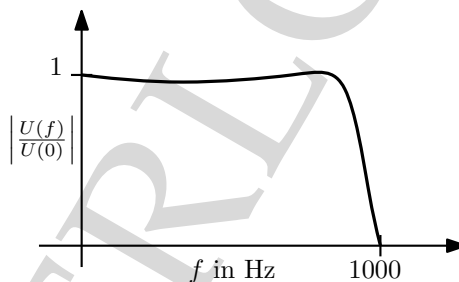


Abbildung 12: Modell für $U(f)$.

Welcher Effekt tritt bei der Abtastung unter der Annahme, dass das theoretische Modell korrekt ist, auf? (1 Punkt)

- e) Um die Auflösung im Zeitbereich zu verfeinern, wird die Abtastfrequenz nun auf $f_A = 10$ kHz gesetzt. Welcher der drei Sensortypen aus Abbildung 13 liefert nun die besten Ergebnisse? Begründen Sie! (1 Punkt)

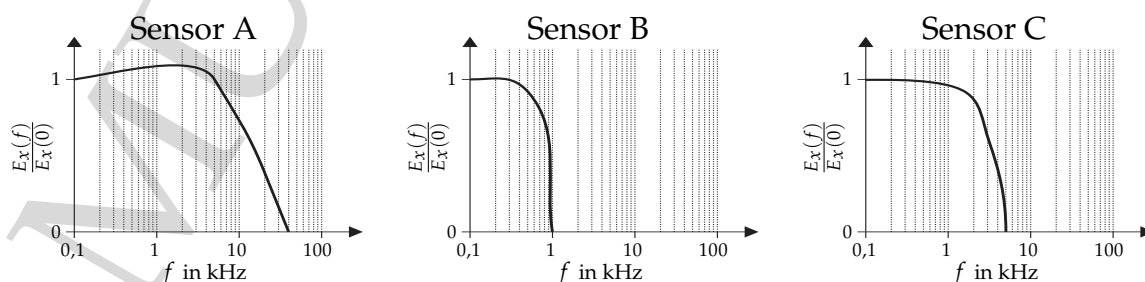


Abbildung 13: Normalisierte Empfindlichkeit E der Sensoren.

Lösung

a)

$$\begin{aligned}
 U_k &= \sum_{n=0}^5 u_n e^{-j2\pi k \frac{n}{6}} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j2\pi k \frac{1}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j2\pi k \frac{2}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j2\pi k \frac{4}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j2\pi k \frac{5}{6}} \\
 &= 1 + \sqrt{3} j \sin\left(2\pi \frac{k}{6}\right) + \sqrt{3} j \sin\left(2\pi \frac{2k}{6}\right) \\
 &= (1, 1 + 3j, 1, 1, 1, 1 - 3j)
 \end{aligned}$$

Der Betrag der DFT ist in Bild 14 skizziert.

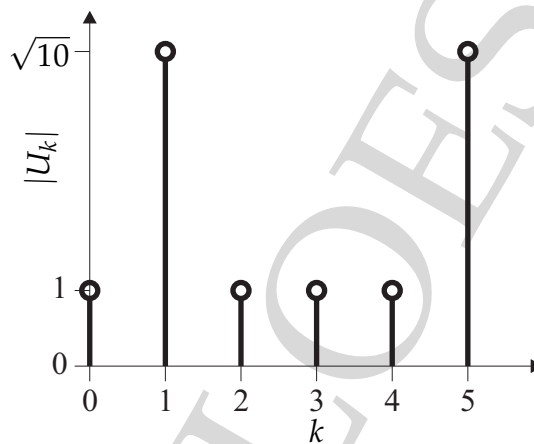


Abbildung 14: 6-Punkte-DFT.

Es lässt sich erkennen, dass u_n aus einem Dirac-Impuls sowie einer negativen Sinusschwingung der Amplitude 1 und der Frequenz $\frac{1}{3} \cdot \frac{f_A}{2}$ besteht. Da diese Schwingung genau in das Raster der Abtastfrequenz passt, tritt kein Leckeffekt auf.

- b) Die Frequenzauflösung ist definiert als $\Delta f = \frac{f_A}{N}$ wobei N die Anzahl der Abtastpunkte ist. Da die Bandbreite des Signals über die Abtastfrequenz gesteuert wird, bleibt hier nur die Möglichkeit, die Anzahl der Abtastpunkte durch eine längere Beobachtungszeit zu erhöhen.

Es folgt, dass mindestens $5 \cdot 10^3$ Abtastwerte vorliegen müssen, die Beobachtungszeit also bei mindestens 5 s liegen muss.

- c) Für die Verwendung der DFT muss für die Anzahl der Abtastpunkte gelten $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Unter Berücksichtigung der Frequenzauflösung ist die kürzeste mögliche Versuchsdauer 8,192 s ($N = 2^{13}$).
- d) Durch die zu geringe Abtastfrequenz entsteht Aliasing.
- e) Des Sensor C ist am besten geeignet, da er sowohl im Durchlassbereich die normierte Empfindlichkeit 1 hat, als auch bei 5 kHz vollständig sperrt.

Aufgabe 4: Diskrete Systeme (22 Punkte)

Ein zeitdiskretes System habe die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}{z^2 - \frac{1}{4}}.$$

- Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems und zeichnen Sie diese in ein Pol-Nullstellen-Diagramm ein. (3 Punkte)
- Ist das System $G(z)$ stabil? (1 Punkt)
- Zerlegen Sie das System $G(z)$ in einen Allpass und ein Minimalphasensystem. (2 Punkte)
- Ein Eingangssignal x_n habe die z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}.$$

Bestimmen Sie das kausale Ausgangssignal y_n durch Rücktransformation mithilfe des Residuensatzes. (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.
Es sei der Signalflussgraph in Abbildung 15 gegeben.

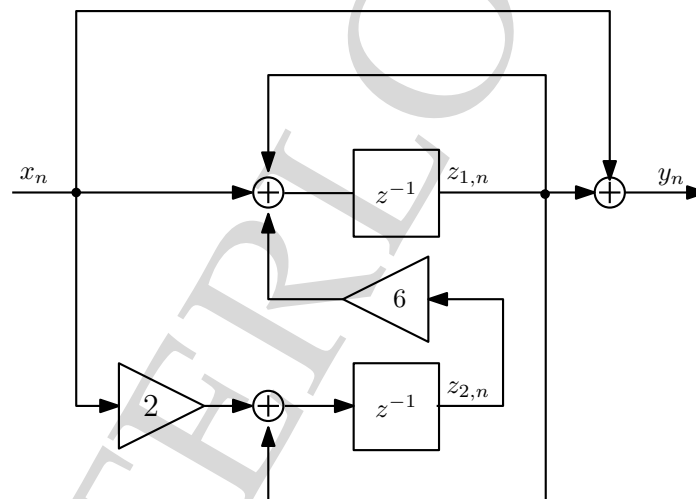


Abbildung 15: Signalflussgraph.

- Bestimmen Sie eine Zustandsraumdarstellung der Form

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_n + \mathbf{B}x_n$$

$$y_n = \mathbf{C}\mathbf{z}_n + D x_n$$

(2 Punkte)

- Bestimmen Sie aus der Zustandsraumdarstellung die Übertragungsfunktion $G(z)$. (2 Punkte)
- Zeichnen Sie die ARMA-Darstellung des Systems. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Ein Audio-Signal soll digital verarbeitet werden.

- Das Signal sei durch ein schmalbandiges Rauschsignal überlagert (z. B. Netzbrummen). Mit welcher Art von Filter lassen sich derartige Störanteile reduzieren? (1 Punkt)

- i) Zeichnen Sie qualitativ das Pol-Nullstellen-Diagramm eines solchen zeitdiskreten Filters mit der Abtastfrequenz f_A , bei dem für die zu filternde Frequenz f_0 gilt:

$$f_0 = \frac{1}{4}f_A.$$

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Von einem zeitdiskreten LTI-System $G(z)$ seien folgende Eigenschaften bekannt:

1. Es existieren insgesamt fünf Pol-/Nullstellen (zusammen).
2. Es gibt mehr Polstellen als Nullstellen.
3. Das System besitzt zwei Nullstellen.
4. Es handelt sich um ein reelles System.
5. Das System ist minimalphasig.
6. Der Realteil aller Polstellen ist $\frac{1}{2}$.
7. Der Betrag einer Polstelle ist $\sqrt{2}/2$.
8. Für eine Kombination von Polstelle $z_{\infty i}$ und Nullstelle z_{0j} gilt

$$\angle z_{\infty i} = \angle z_{0j}.$$

9. Der Betrag der Nullstellen ist größer als der der Polstellen.
- j) Skizzieren Sie ein mögliches Pol-/Nullstellendiagramm und begründen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen. Nutzen Sie dafür die Nummerierung der oben genannten Eigenschaften.

(4 Punkte)

Lösung

- a) Das System hat die Polstellen

$$x_{\infty,1/2} = \pm \frac{1}{2}$$

und die Nullstellen

$$x_{0,1/2} = \sqrt{2}(1 \pm j).$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm zeigt Abbildung 16.

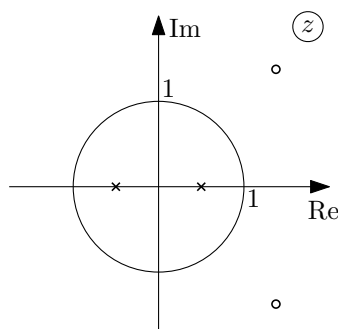


Abbildung 16: Pol-Nullstellen-Diagramm.

- b) Das System ist stabil, da alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.
- c) Man erhält eine Zerlegung $G_z = G_M(z) \cdot G_A(z)$ mit

$$G_M(z) = \frac{\left[-\sqrt{2}(z-j) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}(1-j)} \right) \right] \left[-\sqrt{2}(z+j) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}(1+j)} \right) \right]}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4z^2 - 2\sqrt{2} + 1}{z^{-\frac{1}{4}}}$$

und

$$G_A(z) = \frac{(z - (1+j)\sqrt{2})(z - (1-j)\sqrt{2})}{(1 - (1+j)\sqrt{2}z)(1 - (1-j)\sqrt{2}z)} = \frac{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}{4z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}.$$

Abbildung 17 zeigt die entsprechenden Pol-Nullstellen-Diagramme.

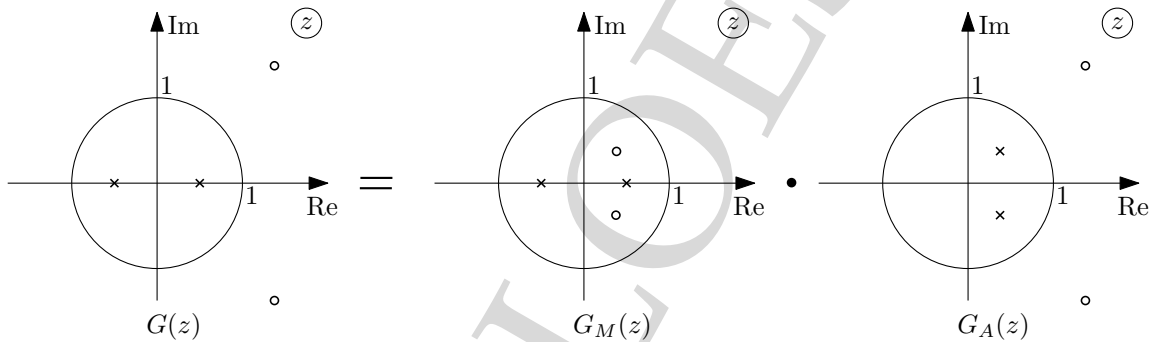


Abbildung 17: Zerlegung in Minimalphasensystem und Allpass.

- d) Durch Multiplikation erhält man die z-Transformierte des Ausgangssignal

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}{z^2 - \frac{1}{4}} \frac{z + 1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4} = \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{4}}.$$

Mithilfe des Residuensatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} y_n &= \text{Res} \left\{ Y(z) z^{n-1}; z_{\infty 1} \right\} + \text{Res} \left\{ Y(z) z^{n-1}; z_{\infty 2} \right\} \\ &= \text{Res} \left\{ \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{n-1}; z = \frac{1}{2} \right\} + \text{Res} \left\{ \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{n-1}; z = -\frac{1}{2} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{n-1} + \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{n-1} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \\ &= \left(3 + (-1)^n \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ gibt es eine zusätzliche Polstelle bei $z = 0$

$$\begin{aligned}
 y_n &= \text{Res} \left\{ \frac{z+1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{-1}; z = \frac{1}{2} \right\} + \text{Res} \left\{ \frac{z+1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{-1}; z = -\frac{1}{2} \right\} \\
 &\quad + \text{Res} \left\{ \frac{z+1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{-1}; z = 0 \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z+1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{-1} + \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \frac{z+1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{-1} \\
 &\quad + \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z+1}{z^2 - \frac{1}{4}} z^{-1} \\
 &= (3+1) \left(\frac{1}{2} \right)^0 - 4 \\
 &= 0, \quad n = 0.
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis lässt sich zusammenfassen zu

$$y_n = \left(3 + (-1)^n \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n \sigma_n - 4\delta_n.$$

e) Aus dem Signalflussgraphen lässt sich entnehmen:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_n + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_n$$

$$y_n = [1 \quad 0] \mathbf{z} + x_n$$

f) Für die Übertragungsfunktion gilt

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \\
 &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z-1 & -6 \\ -1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{(z-1)z-6} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z & 6 \\ 1 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{(z-1)z-6} [z \quad 6] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{z^2 - z - 6} (z + 12) + 1 \\
 &= \frac{z+12}{z^2 - z - 6} + 1 \\
 &= \frac{z+12+z^2-z-6}{z^2 - z - 6} \\
 &= \frac{z^2 + 6}{z^2 - z - 6}.
 \end{aligned}$$

g) Abbildung 18 zeigt die ARMA-Darstellung des Systems.

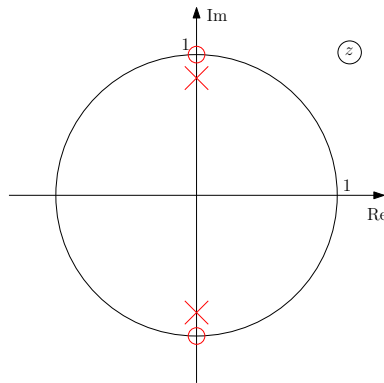


Abbildung 19: Pol-Nullstellen-Diagramm.

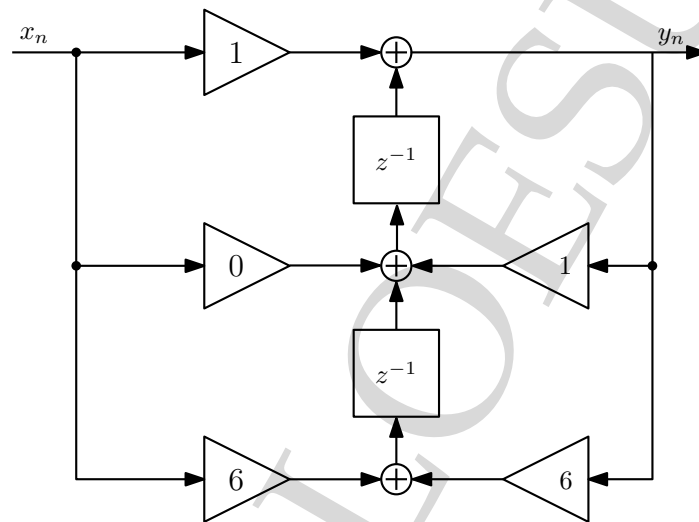


Abbildung 18: ARMA-Darstellung.

- h) Schmalbandige Störanteile lassen sich mit einem Kerbfilter (Notchfilter) reduzieren. Dies zeichnet sich durch einen schmalen Sperrbereich im Frequenzgang aus.
- i) Das Pol-Nullstellen-Diagramm zeigt Abbildung 19.
- j) Das Pol-/Nullstellendiagramm ist in Abbildung 20 zu sehen.

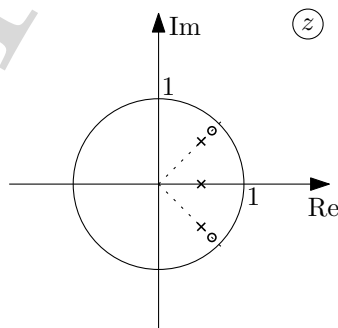


Abbildung 20: Pol-/Nullstellendiagramm.

- Nach Eigenschaften 1), 2) und 3) gibt es drei Polstellen.
- Nach Eigenschaft 4) sind alle Pol- und Nullstellen reell oder treten als konjugiert komplexe Paare auf.

- Nach Eigenschaft 6) + 7) liegt eine Polstelle bei $1/2 + j/2$. Also auch eine bei $1/2 - j/2$ und eine bei $1/2$.
- Nach Eigenschaft 5) müssen alle Nullstellen auf oder innerhalb des Einheitskreises liegen.
- Nach Eigenschaft 9) haben die Nullstellen einen Betrag größer $\sqrt{2}/2$.
- Nach Eigenschaft 8) und 9) liegen die Nullstellen auf Ursprungsgeraden durch die Polstellen $1/2 \pm j/2$ und zwischen dem Einheitskreis. Oder es handelt sich um zwei reelle Nullstellen mit einem Betrag zwischen $\sqrt{2}/2$ und 1.

Aufgabe 5: Gemischte Aufgaben (17 Punkte)

Lösen Sie folgendes Integral mithilfe der Fourier-Transformation.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^4(\pi t) dt$

Nutzen Sie die Parseval'sche Beziehung.

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

- b) Geben Sie für folgende Systeme jeweils an, ob die Bedingungen für Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität erfüllt sind. Das Signal y ist dabei stets das Ausgangssignal und x das Eingangssignal.

(3 Punkte)

$$y_1(t) = x(t) \sin(\omega t + \phi)$$

$$y_2(t) = x(t)x(t+1)$$

$$y_3(t) = x^2(t) - 5x(t)$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

- c) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke. Berücksichtigen Sie dabei die Eigenschaften des Dirac-Impulses $\delta(t)$.

(4 Punkte)

$$x_1(t) = \cos(t) (\delta(t) + \delta(t - \pi)) \quad x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t) (\delta(t) + \delta(t - \pi)) dt$$

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+1) \delta(t-2) dt \quad x_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi T) \delta(t - \pi) dt$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

Es sei eine Funktion $x(t)$ aus Abbildung 21 gegeben. Das Signal setzt sich entsprechend der Abbildung in positive Zeiten fort.

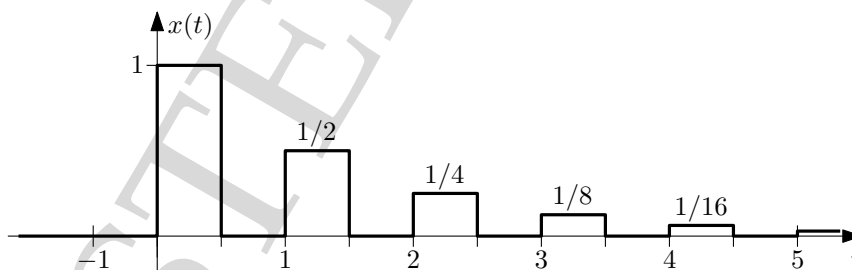


Abbildung 21: Zeitsignal $x(t)$.

- d) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $X(s)$. Stellen Sie dazu die Funktion zunächst mithilfe von Sprungfunktionen $\sigma(t)$ dar. Geben Sie eine geschlossene Darstellung der Laplace-Transformierten an (ohne Summen).

(4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den Ergebnissen der vorhergehenden unabhängig.

- e) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für

$$G(s) = \frac{1}{100} \frac{s(s+1000)^2}{(s+10)(s+100)^2}$$

in das entsprechende Diagramm in den Lösungsblättern ein.

(4 Punkte)

Lösung

- a) Die Parseval'sche Beziehung lautet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Mit ihr und der Beziehung

$$\text{si}^2(\pi t) \circ \bullet d_2(f)$$

lässt sich das Integral lösen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^4(\pi t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\text{si}^2(\pi t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |d_2(f)|^2 df = 2 \int_0^1 (1-f)^2 df = \frac{2}{3}.$$

- b) 1. linear, zeitvariant, kausal
 2. nicht linear, zeitinvariant, nicht kausal
 3. nicht linear, zeitinvariant, kausal
- c) $x_1(t) = \cos(t)(\delta(t) + \delta(t - \pi)) = \cos(0)\delta(t) + \cos(\pi)\delta(t - \pi) = \delta(t) - \delta(t - \pi)$
 $x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t)(\delta(t) + \delta(t - \pi)) dt = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 - 1 = 0$
 $x_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+1)\delta(t-2) dt = f(2+1) = f(3)$
 $x_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi T)\delta(t - \pi) dt = \cos(\pi T) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \pi) dt = \cos(\pi T) \cdot 1$
- d) Das Signal $x(t)$ lässt sich als Summe von verschobenen und skalierten Sprungfunktionen $\sigma(t)$ darstellen:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\sigma(t-k) - \sigma(t-k-1/2)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\sigma(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\sigma(t-k-1/2)).$$

Laplace-Transformation liefert:

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{s} e^{-ks} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{s} e^{-(k+1/2)s} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{1}{2}s}\right) \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-s}}{2}\right)^k \\ &= \left(1 - e^{-\frac{1}{2}s}\right) \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{e^{-s}}{2}}. \end{aligned}$$

- e) Die Übertragungsfunktion muss umgeformt werden, um die Knickfrequenzen abzulesen:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{100} \cdot 1000^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100^2} \cdot s \cdot \left(1 + \frac{s}{1000}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{10}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)^2} \\ &= \frac{1}{10} s \cdot \left(1 + \frac{s}{1000}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{10}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)^2} \end{aligned}$$

Das Bode-Diagramm ist in Abbildung 22 dargestellt.

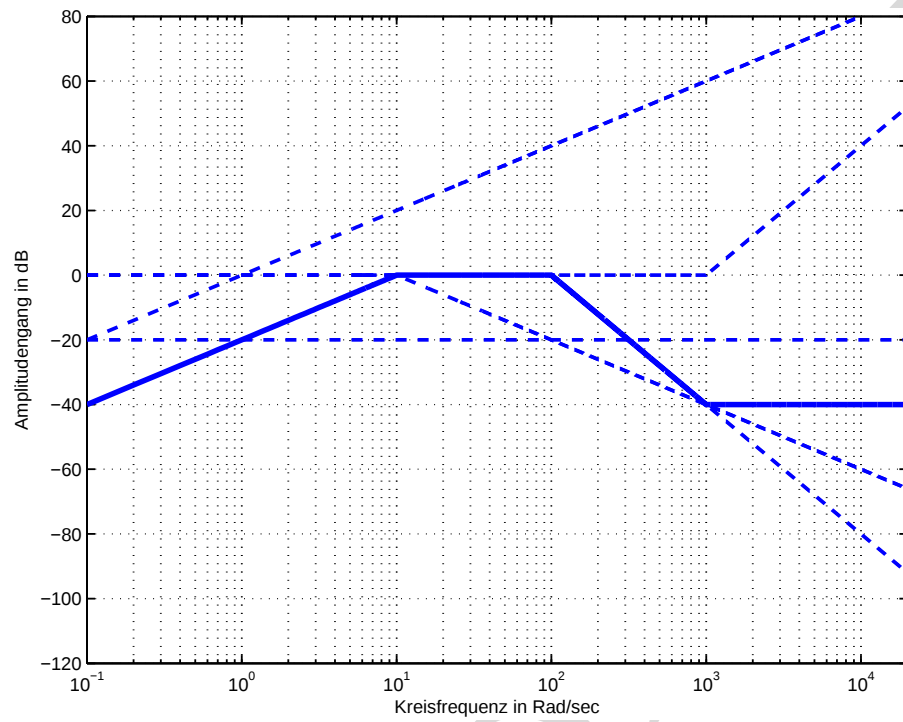


Abbildung 22: Bode-Diagramm.