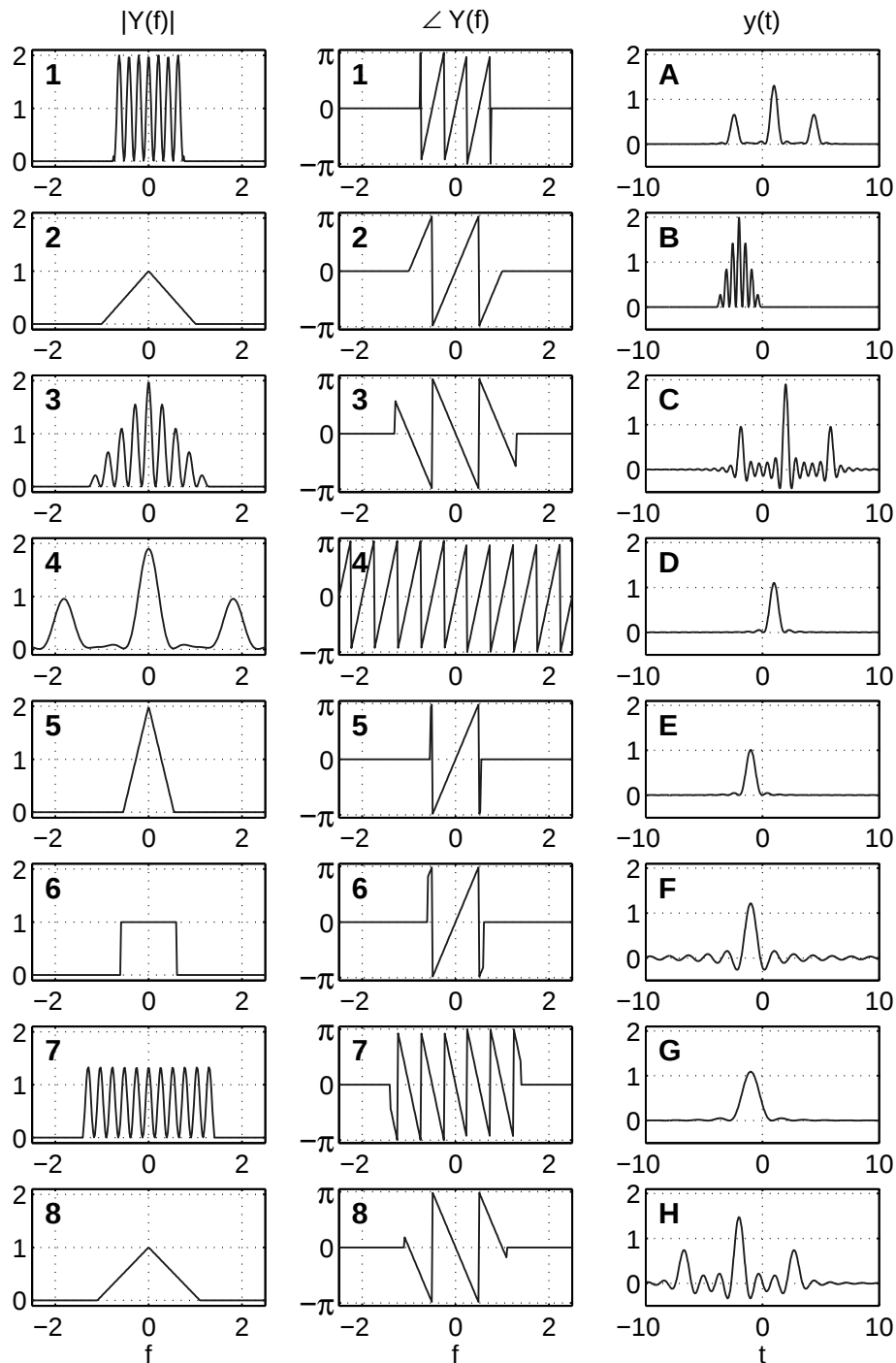


Zuordnungsaufgaben (12 Punkte)

a) Fourier-Transformation Im unteren Bild finden Sie in der rechten Spalte achtmal (A–H) jeweils ein kontinuierliches Zeitsignal. Leider sind die Fourier-Transformierten nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jeder Zeitfunktion $y(t)$ (A–H) das zugehörige Spektrum $Y(f)$ (1–8) an.

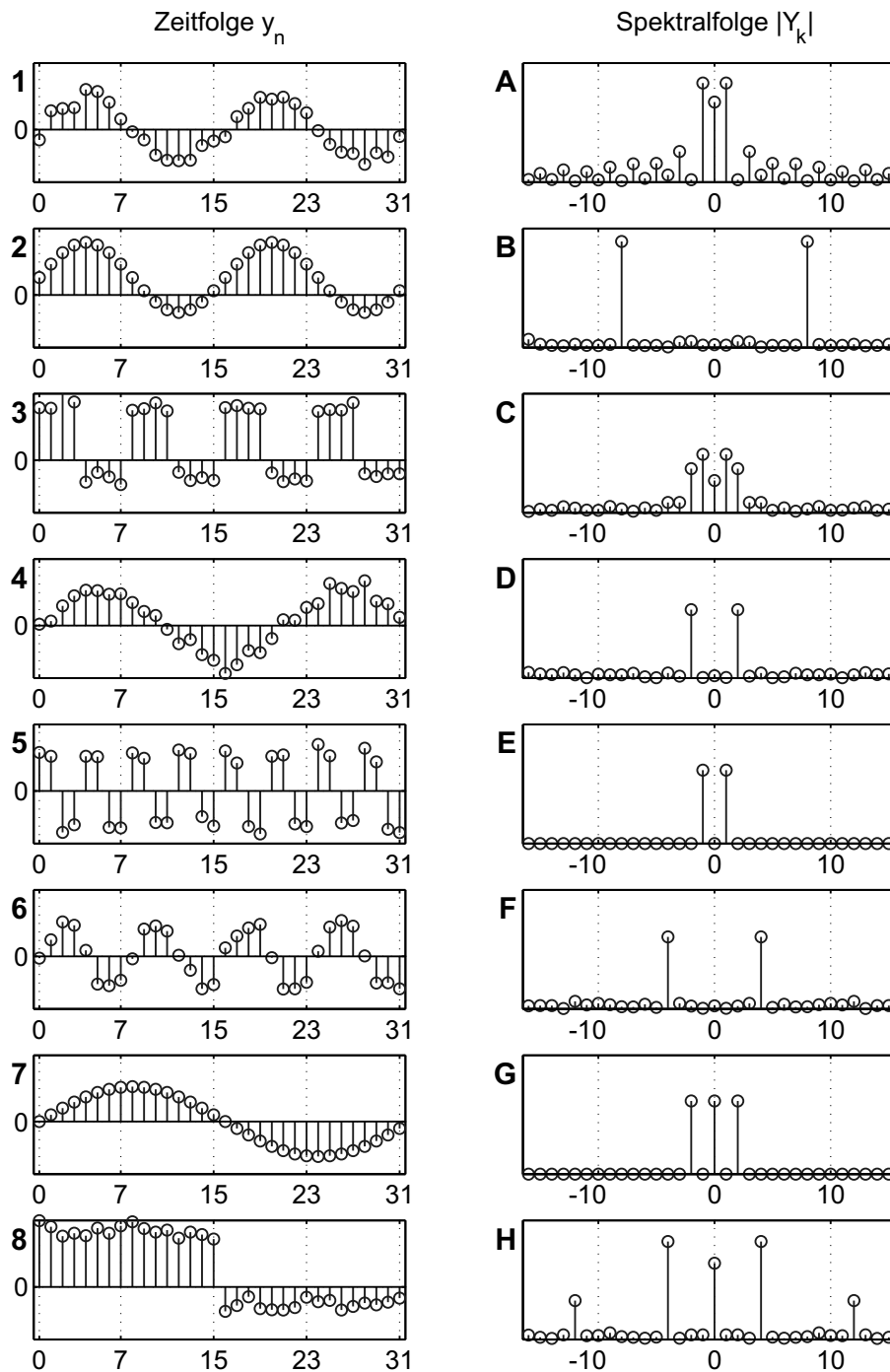
(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)



b) Diskrete Fourier-Transformation

Im unteren Bild finden Sie in der rechten Spalte achtmal (A–H) jeweils ein diskretes Zeitsignal. Leider sind die diskreten Fourier-Transformierten nicht in der richtigen Reihenfolge. Geben Sie zu jeder Zeitfolge y_n (A–H) das zugehörige Betragsspektrum $|Y_k|$ (1–8) an.

(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)



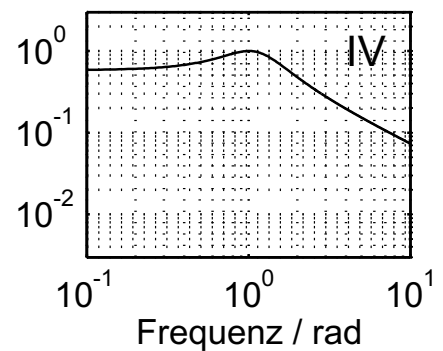
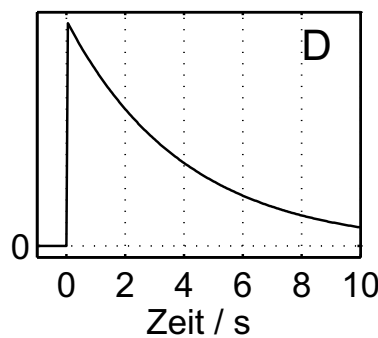
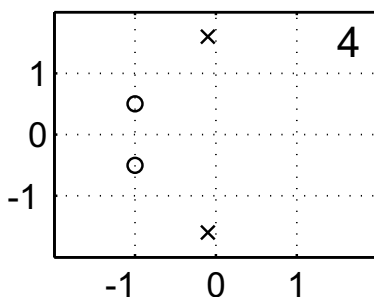
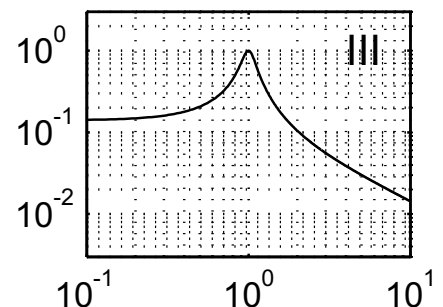
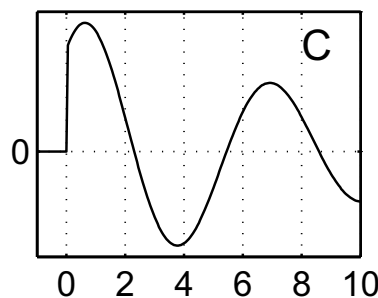
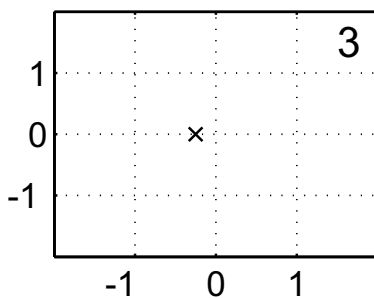
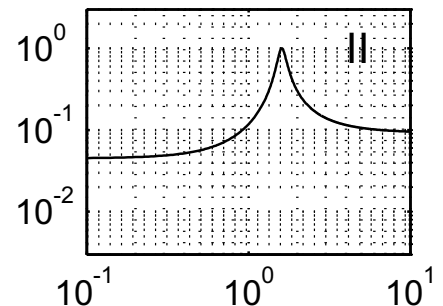
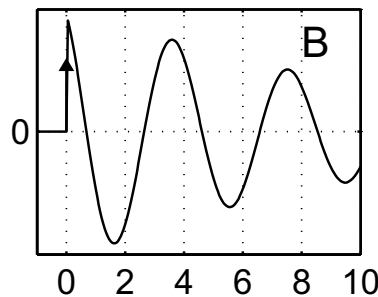
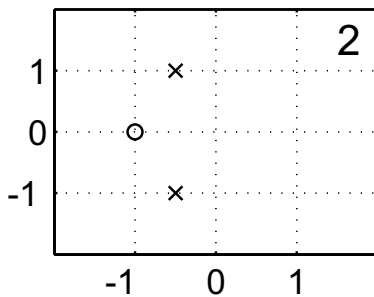
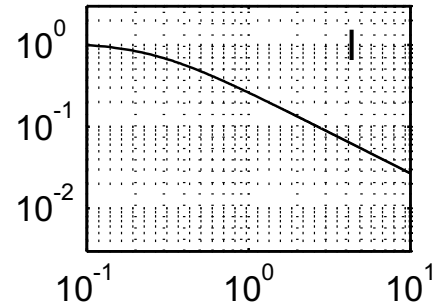
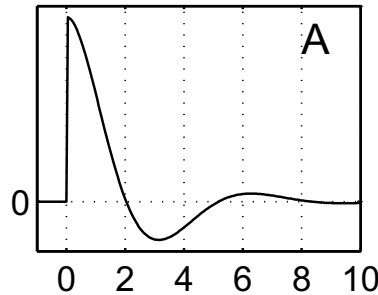
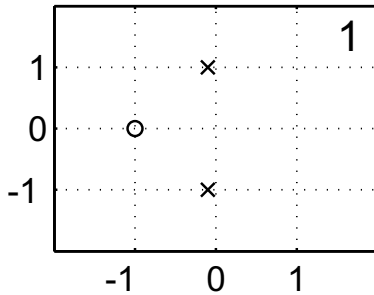
(4 Punkte)

c) Zeitkontinuierliche Systeme

Im unteren Bild finden Sie in der linken Spalte vier Pol-/Nullstellendiagramme zeitkontinuierlicher Systeme. Ordnen Sie diesen jeweils die korrekte Impulsantwort (A–D) und den korrekten Amplitudengang (I–IV) zu.

(0,5 Punkte für jede korrekte Zuordnung)

(4 Punkte)



Lösung

Fourier-Transformation

- 1-H
- 2-E
- 3-A
- 4-B
- 5-G
- 6-F
- 7-C
- 8-D

(Σ : 4 Punkte)

Diskrete Fourier-Transformation

- 1-D
- 2-G
- 3-H
- 4-C
- 5-B
- 6-F
- 7-E
- 8-A

(Σ : 4 Punkte)

Zeitkontinuierliche Systeme

- 1-C-III
- 2-A-IV
- 3-D-I
- 4-B-II

(Σ : 4 Punkte)

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (19 Punkte)

Es sei das folgende periodische Signal gegeben:

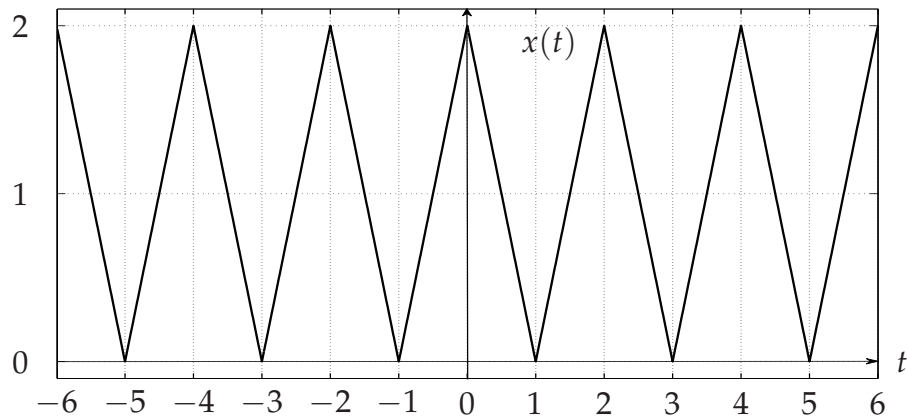


Abbildung 1: Periodisches Signal $x(t)$ mit der Periodendauer $T_0 = 2$.

- Aus Abbildung 1 ist ersichtlich, dass $x(t) \geq 0$ ist. Welche Aussage lässt sich dadurch über das Maximum des Betragsspektrums machen? (1 Punkt)
- Besitzt das Signal einen Gleichanteil? Wenn ja, welchen Betrag hat der Gleichanteil? (1 Punkt)

Das in Abbildung 1 gegebene periodische Signal soll nun durch ein Funktionensystem approximiert werden. Es stehen folgende Basisfunktionensysteme zur Auswahl:

$$B_k(t) = t^k \quad \text{und} \quad F_k(t) = \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \\ \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \end{cases}.$$

- Welche Basisfunktionen sind in diesem Fall besser geeignet? Begründen Sie Ihre Wahl. (1 Punkt)
- Approximieren Sie das Signal mit Hilfe des von Ihnen gewählten Basisfunktionensystems. (5 Punkte)

$$\text{Hinweis: } \int t \cos(at) dt = \frac{1}{a^2} \cos(at) + t \frac{1}{a} \sin(at).$$

Eine weitere Möglichkeit, das Signal $x(t)$ zu approximieren, ist durch die Vorschrift

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \quad (1)$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt$$

gegeben.

- e) Die verwendeten Basisfunktionen für die komplexe Fourier-Reihe in Gleichung (1) stellen ein orthogonales Funktionensystem dar. Wie ist ein Vorfaktor A zu wählen, um ein orthonormales System zu erhalten? (keine Rechnung erforderlich) (1 Punkt)
- f) Leiten Sie den Ausdruck für die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k in Abhängigkeit der reellen Fourier-Koeffizienten aus der Darstellung für die reelle Fourier-Reihe her. Wie lauten die Zahlenwerte für die komplexen Fourier-Koeffizienten für $x(t)$? (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Abgebildet ist ein Ausschnitt des Zeitsignals $u(t)$:

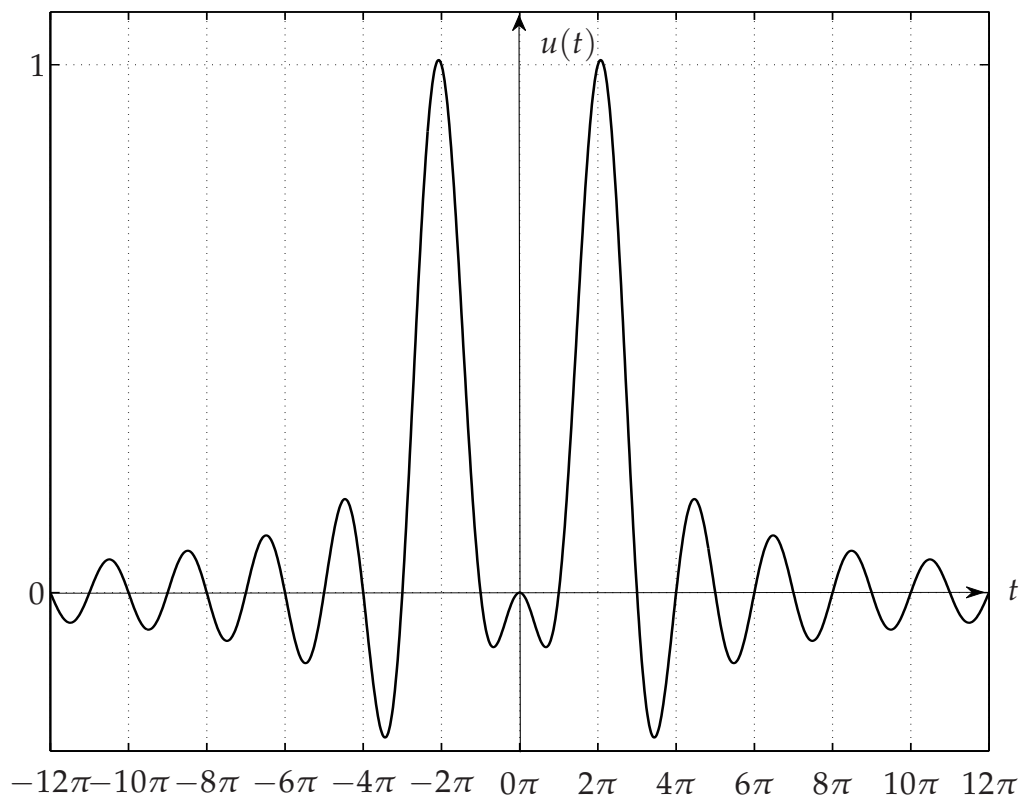


Abbildung 2: Signal $u(t)$.

- g) Wie lautet die Fourier-Transformierte des Signals? (4 Punkte)
Skizzieren Sie $U(f)$ im Frequenzbereich $-\pi \leq f \leq \pi$.
- h) Wie ändert sich die Signalenergie von $U(f)$ nach Tiefpassfilterung mit einem idealen Tiefpass der Sperrfrequenz $|f| = \frac{1}{2\pi}$ Hz? Begründung! (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Geben Sie für die folgenden Ausdrücke je eine Funktion $g(t)$ an, sodass gilt:

$$y(t) = x(t) * g(t).$$

- i) $y(t) = x(t)$

j) $y(t) = x(t - 1)$

k) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \, d\tau$

l) $y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) \, d\tau$

(2 Punkte)

Lösung

- a) Nach der Eigenschaft der Fourier-Transformation für positive Signale liegt das Maximum des Betragsspektrums bei $f = 0$. ($\Sigma: 1 \text{ Punkt}$)
- b) Man erkennt sofort, dass das Signal $x(t)$ den Gleichanteil $\frac{a_0}{2} = c_0 = 1$ besitzt. ($\Sigma: 1 \text{ Punkt}$)
- c) Die Basisfunktionen F_k stellen das zur Fourier-Reihe gehörende Basissystem dar. Dieses ist insbesondere geeignet um periodische Signale zu beschreiben. ($\Sigma: 1 \text{ Punkt}$)
- d) Aufgrund der Periodizität des Signals eignet sich das Basisfunktionenpaar F_k zur Approximation des Signals. Die Berechnung der Koeffizienten für die dazugehörige reelle Fourier-Reihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \right]$$

erfolgt mit

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt \quad \text{sowie} \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt.$$

Da es sich um ein gerades Signal handelt, gilt $b_k = 0 \, \forall k$. Aus dem ersten Aufgabenteil ist bereits $a_0 = 2$ beziehungsweise $\frac{a_0}{2} = 1$ bekannt.
Mit

$$x(t) = \begin{cases} 2 + 2t & , -\frac{T_0}{2} < t \leq 0 \\ 2 - 2t & , 0 < t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

ergibt sich durch Rechnung mit $T_0 = 2$ für a_0 entsprechend:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \, dt = \int_{-1}^1 2 \, dt + \int_{-1}^0 2t \, dt - \int_0^1 2t \, dt = 4 - (-1)^2 - 1^2 = 2.$$

Für alle anderen $k = 1, 2, 3, \dots$ berechnen sich die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt \\
 &= 1 \int_{-1}^1 x(t) \cos(\pi k t) dt = \int_{-1}^0 (2+2t) \cos(\pi k t) dt + \int_0^1 (2-2t) \cos(\pi k t) dt \\
 &= \int_{-1}^1 2 \cos(\pi k t) dt + \int_{-1}^0 2t \cos(\pi k t) dt - \int_0^1 2t \cos(\pi k t) dt.
 \end{aligned}$$

Mit dem unbestimmten Integral:

$$\begin{aligned}
 &\int 2t \cos(\pi k t) dt \\
 &= 2 \left[t \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} \right] - \frac{1}{\pi k} 2 \int \sin(\pi k t) dt = 2 \left[t \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} \right] - \frac{1}{\pi k} 2(-1) \frac{1}{\pi k} [\cos(\pi k t)] \\
 &= 2 \left[t \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} \right] + 2 \frac{1}{(\pi k)^2} [\cos(\pi k t)]
 \end{aligned}$$

ergibt sich für a_k :

$$\begin{aligned}
 a_k &= 2 \left[\frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} \right]_{-1}^1 \\
 &\quad + 2 \left[t \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} \right]_{-1}^0 + 2 \frac{1}{(\pi k)^2} [\cos(\pi k t)]_{-1}^0 \\
 &\quad - 2 \left[t \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} \right]_0^1 - 2 \frac{1}{(\pi k)^2} [\cos(\pi k t)]_0^1 \\
 &= 2 \frac{1}{(\pi k)^2} ((1 - \cos(-\pi k)) - (\cos(\pi k) - 1)) \\
 &= 4 \frac{1}{(\pi k)^2} (1 - \cos(\pi k)) \\
 &= 4 \frac{1}{(\pi k)^2} (1 - (-1)^k) \\
 &= \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ 8 \frac{1}{(\pi k)^2} & , k \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Σ: 5 Punkte)

e) Mit einem Faktor $A = \frac{1}{\sqrt{T_0}}$ folgt ein orthonormales Funktionensystem.

(Σ: 1 Punkt)

f) Mit der Euler'schen Formel

$$e^{jkt} = \cos(kt) + j \sin(kt)$$

sowie

$$\cos(t) = \frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) \quad \text{und} \quad \sin(t) = \frac{1}{2j} (e^{jt} - e^{-jt})$$

ergibt sich die reelle Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} + e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} \right) \right. \\ &\quad \left. + b_k \frac{1}{2j} \left(e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} - e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2j} \right) + e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Und man erhält somit die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}.$$

Mit $b_k = 0$ und dem Ergebnis aus der vorangegangenen Aufgabe folgt somit für die komplexen Fourier-Koeffizienten für $x(t)$ für k ungleich 0:

$$c_k = c_{-k} = \frac{a_k}{2} = 4 \frac{1}{(\pi k)^2}, \quad k \text{ ungerade}.$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos\left(-j2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt + j \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin\left(-j2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos\left(j2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin\left(j2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt \\ &= \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

g) Aus der Abbildung lässt sich ablesen

(Σ: 4 Punkte)

$$u(t) = \text{si}(t - 2\pi) + \text{si}(t + 2\pi).$$

Mit Hilfe der Faltungsdefinition lässt sich dies schreiben als

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t - 2\pi - \tau) + \delta(t + 2\pi - \tau)) 2\text{si}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} (\delta(t - 2\pi) * 2\text{si}(t) + \delta(t + 2\pi) * 2\text{si}(t)) \\ &= \frac{1}{2} (\delta(t - 2\pi) + \delta(t + 2\pi)) * 2\text{si}(t). \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Eigenschaften der Symmetrie und der Verschiebung im Zeitbereich unter Berücksichtigung, dass sowohl die Cosinusfunktion als auch die Rechteckfunktion gerade Funktionen, sind erhält man:

$$u(t) = \frac{1}{2} (\delta(t - 2\pi) + \delta(t + 2\pi)) * 2\text{si}(t)$$

○—●

$$\begin{aligned} U(f) &= \cos(2\pi 2\pi(-f)) 2\pi \text{rect}_{\frac{1}{\pi}}(-f) \\ &= \cos(2\pi 2\pi f) 2\pi \text{rect}_{\frac{1}{\pi}}(f). \end{aligned}$$

Skizze:

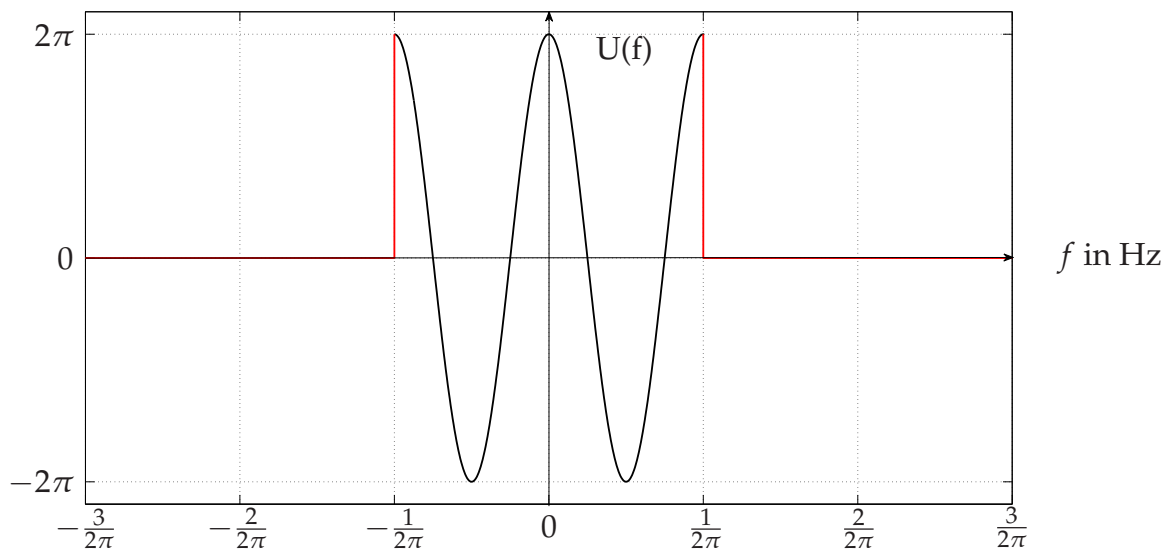


Abbildung 3: Spektrum $U(f)$.

- h) Die Energie des tiefpassgefilterten Signals unterscheidet sich nicht von der Signalenergie vor der Filterung, da alle Frequenzanteile erhalten bleiben. (Σ : 1 Punkt)
- i) $g(t) = \delta(t)$
- j) $g(t) = \delta(t - 1)$
- k) $g(t) = \sigma(t)$
- l) $g(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 1)$

(Σ : 2 Punkte)

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (17 Punkte)

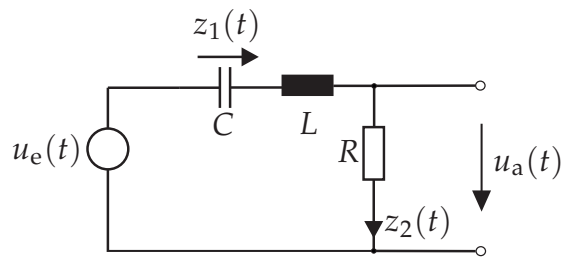


Abbildung 4: RLC-Schaltung.

Gegeben sei die in Abbildung 4 skizzierte Schaltung mit $R, L, C \in \mathbb{R}^+$. Zu Beginn der Betrachtung befindet sich das System in Ruhe.

- Stellen Sie mit Hilfe der Zusatzgrößen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ die Differentialgleichungen auf, die das System charakterisieren. (3 Punkte)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$. Zeichnen Sie anschließend den Signalflussgraphen in ARMA-Form. (2 Punkte)
- Berechnen Sie den stationären Endwert der Impulsantwort $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$. (1 Punkt)
- Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion. Ist das System stabil? Stellen Sie hierfür eine geeignete Beziehung zwischen den Parametern R, L und C und den Polstellen auf. (3 Punkte)
- Für welche Werte von R, L und C enthält die Impulsantwort Schwingungen? Wie verhält sich die Sprungantwort bezüglich der Schwingfähigkeit? (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Im Folgenden sei die Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems gegeben durch:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 11s + 10}.$$

- Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems. (3 Punkte)
- Zeichnen Sie den Amplitudengang des Systems in das nachstehende Diagramm ein. (3 Punkte)

Lösung

- An einem Kondensator gilt mit $Q_C = CU_C$ der Zusammenhang:

$$I_C = \dot{Q}_C = C\dot{U}_C.$$

Für die Spannung an einer Spule gilt:

$$U_L = L \cdot \dot{I}_L.$$

Angewandt auf die obige Schaltung erhält man die Gleichungen:

$$z_2(t) = C\dot{z}_1(t) \Rightarrow \dot{z}_1(t) = \frac{1}{C}z_2(t), \quad u_L(t) = L \cdot \dot{z}_2(t) \Rightarrow \dot{z}_2(t) = \frac{1}{L}u_L(t), \quad (2)$$

$$u_a(t) = R \cdot z_2(t) \Rightarrow z_2(t) = \frac{1}{R}u_a(t) \Rightarrow \dot{z}_2(t) = \frac{1}{R}\dot{u}_a(t). \quad (3)$$

Zusammen mit der Maschengleichung

$$u_e(t) = u_a(t) + u_C(t) + u_L(t) = u_a(t) + z_1(t) + \dot{z}_2(t)L$$

ist damit das System vollständig beschrieben. Setzt man in die beiden Gleichungen (2) jeweils Gleichung (3) ein, erhält man den Zusammenhang:

$$\dot{z}_1(t) = \frac{1}{CR}u_a(t), \quad \dot{u}_L(t) = \frac{L}{R}\ddot{u}_a(t).$$

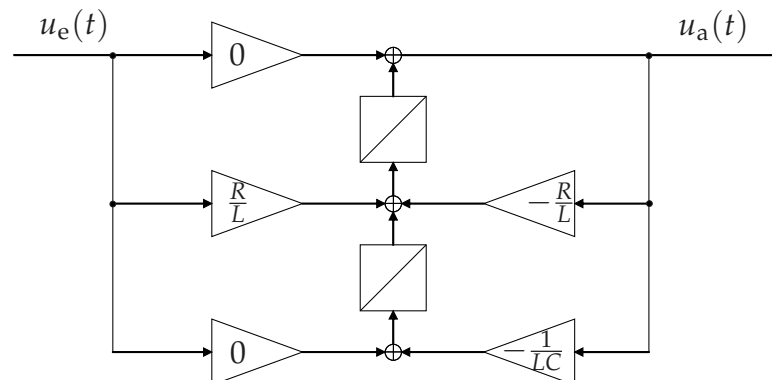
Bildet man die erste Ableitung der Maschengleichung und setzt die übrigen Gleichungen ein, erhält man schließlich die Differentialgleichung:

$$\dot{u}_e = \dot{u}_a(t) + \frac{1}{CR}u_a(t) + \frac{L}{R}\ddot{u}_a(t), \quad (4)$$

die nur noch das Eingangs- und das Ausgangssignal sowie deren Ableitungen beinhaltet. (Σ: 3 Punkte)

b) Die Laplace-Transformation von Gleichung (4) ergibt

$$\begin{aligned} sU_e(s) &= \frac{1}{CR}U_a(s) + sU_a(s) + \frac{L}{R}s^2U_a(s) \\ &= \left(\frac{L}{R}s^2 + s + \frac{1}{CR}\right)U_a(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$



(Σ: 2 Punkte)

c) Mit dem Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{R}{L}s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = 0$. (Σ: 1 Punkt)

d) Die Pole liegen bei

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}.$$

Fallunterscheidung reelle/komplexe Pole:

1. Fall: $R^2C - 4L \geq 0 \Rightarrow$ Reelle Pole, Betrachtung des Pols "weiter rechts".

$$\begin{aligned} s_{\infty} &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \stackrel{!}{<} 0 \\ \Rightarrow \frac{R^2C - 4L}{4L^2C} &< \frac{R^2C}{4L^2C} \\ \Rightarrow -4L &< 0 \\ \Rightarrow L &> 0 \quad \text{immer erfüllt.} \end{aligned}$$

2. Fall: $R^2C - 4L < 0 \Rightarrow$ komplexe Pole, nur Betrachtung des Realteils.

$$\operatorname{Re}\{s_\infty\} = -\frac{R}{2L} < 0 \quad \text{immer erfüllt.}$$

Damit ist das System immer stabil.

(Σ : 3 Punkte)

e) Damit die Sprungantwort schwingt, müssen die Polstellen konjugiert komplex sein. Dies ist für $R^2C - 4L < 0$ der Fall. (Σ : 1 Punkt)

f)

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{s}{s^2 + 11s + 10} = \frac{s}{(s+10)(s+1)}.$$

Mit der Partialbruchzerlegung ergibt sich:

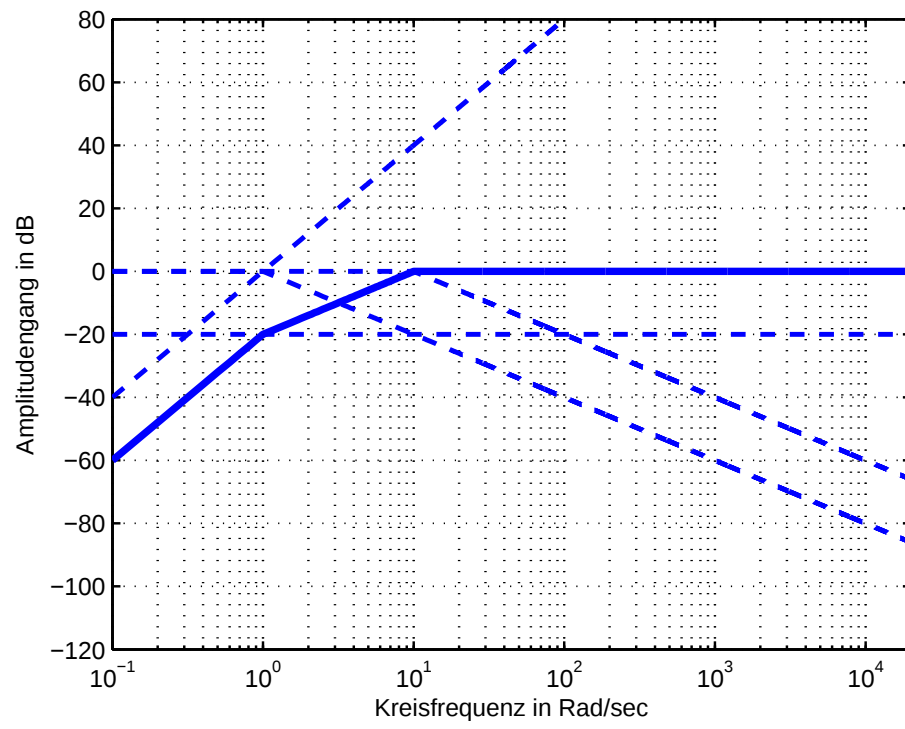
$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{A}{s - s_{\infty 1}} + \frac{B}{s - s_{\infty 2}} \\ H(s) &= \frac{A}{s+10} + \frac{B}{s+1} \\ \Rightarrow s &= A(s+1) + B(s+10) \\ \Rightarrow 1 &= A+B, \quad 0 = 1A+10B \\ \Rightarrow A &= \frac{10}{9}, \quad B = -\frac{1}{9} \\ \Rightarrow H(s) &= \left(\frac{10}{9} \frac{1}{s+10} - \frac{1}{9} \frac{1}{s+1} \right) \\ &\quad \bullet \text{---} \circ \\ h(t) &= \left(\frac{10}{9} e^{-10t} - \frac{1}{9} e^{-1t} \right). \end{aligned}$$

(Σ : 3 Punkte)

g) Erstellen des Bode-Diagramms:

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+10)(s+1)} = \frac{s^2}{(s-s_{\infty 1})(s-s_{\infty 2})} = \frac{1}{s_{\infty 1}s_{\infty 2}} \frac{s^2}{\left(\frac{s}{s_{\infty 1}} - 1\right)\left(\frac{s}{s_{\infty 2}} - 1\right)}.$$

Die beiden Pole ergeben sich zu $s_{\infty 1} = -10$, $s_{\infty 2} = -1$. Der konstante Faktor liefert im Bode-Diagramm einen konstanten Offset $20 \log \left| \frac{1}{s_{\infty 1}s_{\infty 2}} \right| = -20$. Die doppelte Nullstelle bei $\omega = 0$ ergibt im Bode-Diagramm des Amplitudengangs eine Gerade mit 40 dB/Dekade Steigung, die bei $\omega = 10^0$ die Frequenzachse schneidet. Jeder der Pole ergibt eine Linie, die bis zur entsprechenden Knickfrequenz $|s_{\infty 1}| = 10$, $|s_{\infty 2}| = 1$ konstant null ist und dann mit -20 dB/Dekade abfällt. Die Superposition all dieser Linien ergibt den approximierten Frequenzgang.



(Σ : 3 Punkte)

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (21 Punkte)

Eine Stimmgabel dient zum Einstimmen von Musikinstrumenten. Dabei macht man sich zu Nutze, dass Stimmgabeln beim Anschlagen einen klaren Ton einer bestimmten Frequenz erzeugen. Um die Eigenfrequenz einer Stimmgabel genau zu bestimmen, ist es notwendig, dass Sie bei der Untersuchung eine Frequenzauflösung von mindestens 0,01 Hz erreichen. Sie wollen Messungen durchführen und diese anschließend am Rechner weiter verarbeiten.

- a) Wie lange müssen Sie den Ton der Stimmgabel bei einer Abtastzeit von $t_A = 0,125$ s messen, um das Signal mit Hilfe einer Radix-2-FFT bei der geforderten Frequenzauflösung zu untersuchen? (2 Punkte)

Hinweis: In der Vorlesung wurde ausschließlich die Radix-2-FFT behandelt.

- b) Ihnen steht leider nur halb soviel Zeit zum Messen wie in der vorigen Aufgabe berechnet zur Verfügung. Durch welche Methode können sie dennoch die benötigte Auflösung erreichen? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Es sei das kontinuierliche Zeitsignal

$$s(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sinc} \left(t \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

gegeben, das ein bandbegrenztes Spektrum $S(f)$ besitzt:

$$S(f) = 0 \text{ für } |f| > B, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Um eine günstige Rekonstruktion zu gewährleisten, soll $s(t)$ mit einer Frequenz $f'_A = r f_A$ ($r \in \mathbb{N}$) abgetastet werden, wobei $f_A = 2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ gilt.

Das Rekonstruktionsfilter $T(f)$ sei gegeben durch folgendes Übertragungsverhalten:

$$T(f) = \frac{2\pi f_0}{2\pi f_0 + j2\pi f} \quad \text{mit } f_0 = 1.$$

- c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $s(t)$ und skizzieren Sie das Spektrum $S(f)$ und das Spektrum des abgetasteten Signals $S_*(f)$ für $r = 1$. (2 Punkte)
- d) Wie ist der Grad der Überabtastung r zu wählen, sodass die Spektralanteile, die durch Aliasing entstehen, um mindestens 6 dB gedämpft werden? (4 Punkte)
- Hinweis: Nutzen sie als Näherung $10^{-0,3} \approx 0,5$.
- e) Zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer zuvor berechneten Lösung für r die Spektren $S(f)$ sowie $S_*(f)$ zusammen mit $T(f)$ in ein neues Diagramm. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Im Weiteren seien das Signal $x(t)$ sowie dessen Spektrum $X(f)$ gegeben:

$$x(t) = \operatorname{si}(\pi t) + \frac{1}{2} \operatorname{si}^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad (5)$$

○—●

$$X(f) = r_1(f) + d_1(f).$$

Abbildung 5 zeigt das Spektrum $X(f)$.

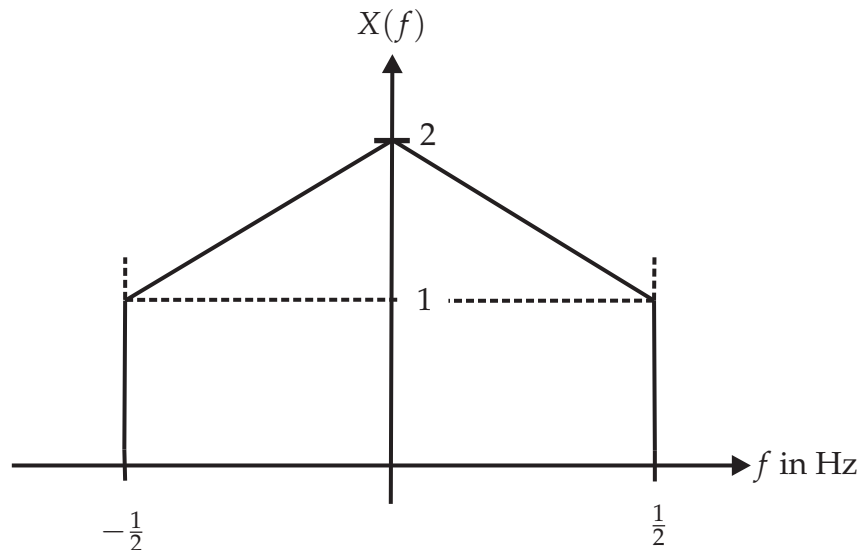


Abbildung 5: Spektrum $X(f)$ des Signals $x(t)$.

- f) Gegeben ist der Frequenzgang eines zeitkontinuierlichen Filters in Abbildung 6. Das Filter soll nun diskretisiert werden. Skizzieren Sie das Spektrum des zeitdiskreten Filters $H_*(f)$, wenn als Abtastfrequenz $f_A = 1$ Hz benutzt wird. (2 Punkte)
Hinweis: Die Impulsantwort h_n muss nicht berechnet werden.

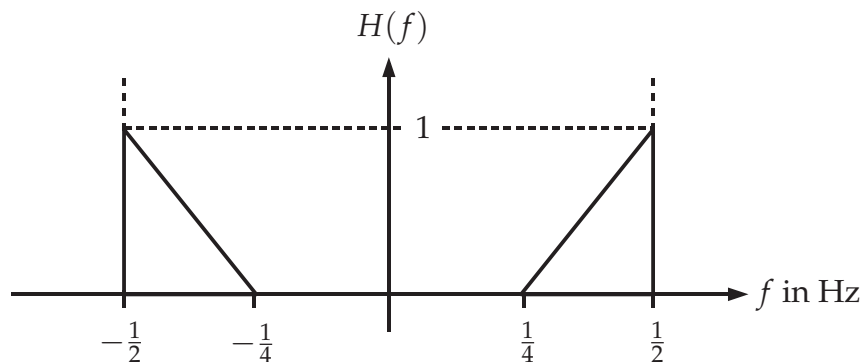


Abbildung 6: Frequenzgang des Filters $H(f)$.

- g) Das durch Diskretisierung des Signals $x(t)$ aus Gleichung (5) resultierende zeitdiskrete Signal x_n wird nun mit dem Filter $H_*(f)$ gefiltert. Das gefilterte Signal sei $x_{2,n}$. Berechnen Sie zuerst im Intervall $\frac{1}{4} \text{ Hz} \leq f \leq \frac{1}{2} \text{ Hz}$ das Spektrum des gefilterten Signals $X_{2*}(f)$ und skizzieren Sie dann das Spektrum $X_{2*}(f)$ für $-1 \text{ Hz} \leq f \leq 1 \text{ Hz}$. (3 Punkte)
- h) Zur Verminderung des Speicherplatzes werde die Abtastfrequenz des Signals $x_{2,n}$ halbiert (Downsampling). Das heißt, es gilt

$$f'_A = f_A/2, \quad x_{3,n} = x_{2,2n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Skizzieren Sie das Spektrum $X_{3*}(f)$ des Signals nach dem Downsampling.

(3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sind die 4 Werte der Funktion y_n :

$$y_n = [1, 1, -1, -1].$$

- i) Berechnen Sie die DFT $Y_k = \text{DFT}\{y_n\}$. (1 Punkt)

Hinweis: Zahlenwerte durch Einsetzen von $k = 0, 1, 2, \dots$ müssen nicht berechnet werden.

- j) Berechnen Sie die Energie des Spektrums

$$E_{Y_k} = \sum_{k=0}^{N-1} |Y_k|^2.$$

(1 Punkt)

Lösung

- a) Es gilt für die Frequenzauflösung:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{f_A}{N} = \frac{1}{N t_A} = \frac{1}{T_0} \\ N &\geq \frac{1}{\Delta f t_A} = \frac{1}{0,01 \cdot 0,125} = 800 \\ \Rightarrow N &= 1024 = 2^{10}\end{aligned}$$

zum Anwenden der FFT. Und damit gilt für die Beobachtungszeit:

$$T_0 = N t_A = 1024 \cdot 0,125 \text{ s} = 128 \text{ s} = 2 \text{ min } 8 \text{ s}.$$

(Σ: 2 Punkte)

- b) Durch Zero-Padding lässt sich das Signal künstlich verlängern, indem an das ursprünglich aufgenommene Signal Nullen angehängt werden. Somit steigt die Anzahl N der Messpunkte. Da die zusätzlichen Messpunkte den Wert null haben, ändert sich weder die Signalenergie noch die Einhüllende des Spektrums. (Σ: 1 Punkt)

- c) Für die Fourier-Transformierte ergibt sich:

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sinc}\left(t \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\quad \circ \text{---} \bullet \\ S(f) &= \text{rect}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(f).\end{aligned}$$

Abbildung 7 zeigt das ursprüngliche Spektrum sowie das abgetastete Spektrum für $r = 1$. Zusätzlich ist das Spektrum des Filters eingezeichnet (nicht in diesem Aufgabenteil verlangt).

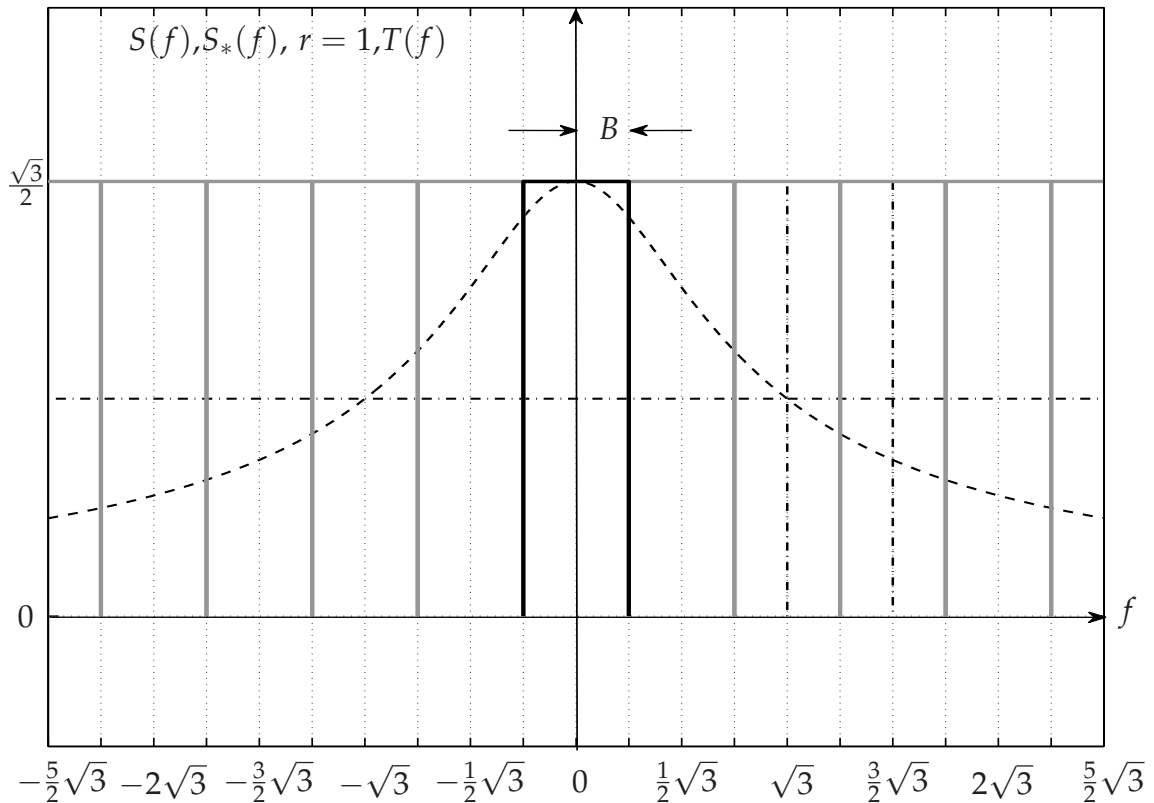


Abbildung 7: Tiefpassfilter $T(f)$ und Spektren $S(f)$, $S_{*,1}(f)$ mit $r = 1$.

(Σ : 2 Punkte)

- d) Eine Dämpfung um 6 dB entspricht (unter Berücksichtigung des Hinweises) einer Verstärkung von 0,5:

$$\begin{aligned} -20 \log |T(f)| &= 6 \\ \Rightarrow |T(f)| &\approx 0,5. \end{aligned}$$

Zunächst gilt es zu bestimmen, bei welcher Frequenz das Rekonstruktionsfilter diese Verstärkung aufweist:

$$|T(f)| = \left| \frac{2\pi f_0}{2\pi f_0 + j2\pi f} \right| \stackrel{!}{=} 0,5.$$

Mit $f_0 = 1$ folgt

$$\begin{aligned} |T(f)| &= \left| \frac{1 - jf}{1 + f^2} \right| = \frac{\sqrt{1 + f^2}}{1 + f^2} \stackrel{!}{=} 0,5 \\ \sqrt{1 + f^2} &= \frac{1}{2} (1 + f^2) \\ 1 + f^2 &= \frac{1}{4} (1 + f^2)^2. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\hat{f} = f^2$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\hat{f}^2 - 2\hat{f} - 3) &= 0 \Rightarrow \hat{f} = -1 \vee 3 \\ \hat{f} = f^2 = 3 &\Rightarrow f = -\sqrt{3} \vee \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Die Lösung $\hat{f} = -1$ kann vernachlässigt werden, da die gesuchte Frequenz reell sein soll. Somit ergibt sich $f^* = \sqrt{3}$.

Da die Verstärkung periodisch wiederholter Spektralanteile maximal 0,5 betragen darf, darf die linke Flanke der ersten periodischen Fortsetzung von $S(f)$ frühestens bei $f = \sqrt{3}$ auftauchen. Aus

$$f'_A - B \geq f^*$$

folgt mit $B = \frac{f_A}{2}$:

$$\Rightarrow f'_A = rf_A \geq \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \frac{5}{4}.$$

Mit $f_A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist $r \geq 3$ und damit $f'_A = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ zu wählen.

(Σ : 4 Punkte)

- e) Abbildung 8 zeigt die Zusammenhänge graphisch. Es gilt zu beachten, dass die gestrichelt gezeichnete Rect-Funktion keine Lösung darstellt, da sie die Mittenfrequenz $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ hat und $r \in \mathbb{N}$ gilt.

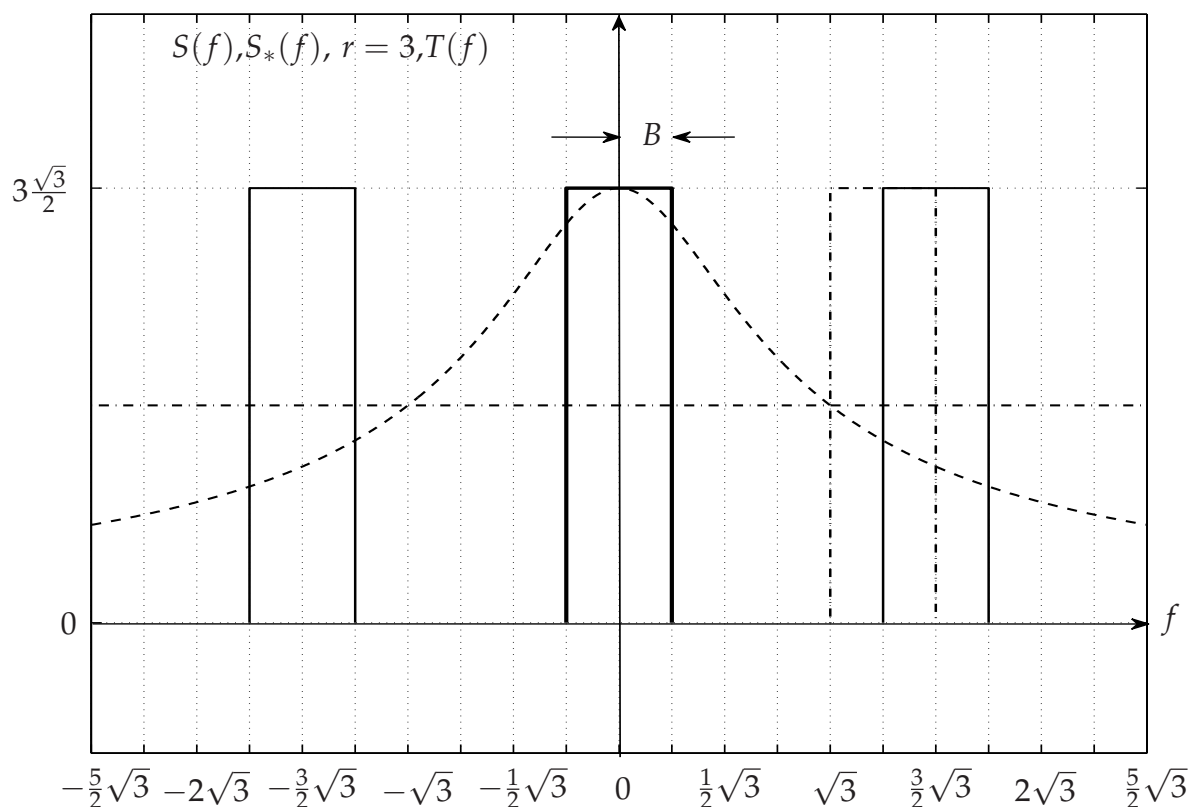


Abbildung 8: Tiefpassfilter $T(f)$ und Spektren $S(f)$, $S_{*,3}(f)$ mit $r = 3$.

(Σ : 2 Punkte)

- f) Eine Abtastung im Zeitbereich entspricht einer periodischen Fortsetzung im Frequenzbereich. Durch die Abtastung der Impulsantwort wird also der Frequenzgang periodisch fortgesetzt. Das Abtasttheorem wird dabei eingehalten. (Σ : 2 Punkte)

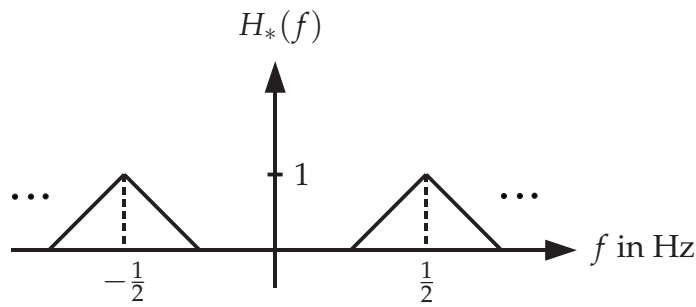


Abbildung 9: Filter $H_*(f)$.

g) Generell gilt:

$$X_{2*}(f) = H_*(f) \cdot X_*(f).$$

Im Intervall $\frac{1}{4} \leq f \leq \frac{1}{2}$ speziell berechnet sich das Produkt zu:

$$X_{2*}(f) = (4f - 1) \cdot (-2f + 2) = -8f^2 + 10f - 2$$

$$X'_{2*}(f) = -16f + 10 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow f = \frac{10}{16} > 0$$

$$X_{2*}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Das Spektrum ist in diesem Intervall also eine nach unten geöffnete Parabel, deren Maximum rechts außerhalb des betrachteten Intervalls liegen würde. Für das Intervall $0 \text{ Hz} \leq f \leq \frac{1}{4} \text{ Hz}$ ist das Produkt gerade null und aufgrund der Symmetrie und periodischen Fortsetzung ergibt sich das unten abgebildete Spektrum. (Σ : 3 Punkte)

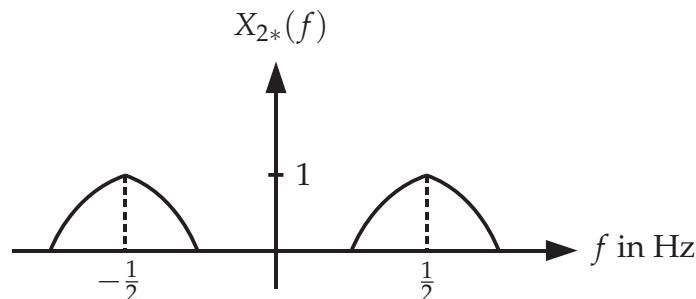
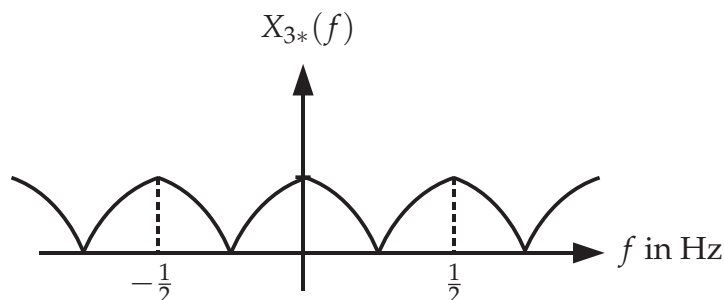


Abbildung 10: Spektrum $X_{2*}(f)$ des gefilterten Signals.

h) Das Downsampling entspricht einer idealen Rekonstruktion des Signals durch Rechteckfensterung im Frequenzbereich und anschließender Unterabtastung mit f'_A . Dadurch erhält man: (Σ : 3 Punkte)



i)

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= 1e^0 + 1e^{-j2\pi \frac{k}{4}} - 1e^{-j2\pi \frac{2k}{4}} - 1e^{-j2\pi \frac{3k}{4}} \\ &= 1 - (-1)^k + 1e^{-j2\pi \frac{k}{4}} - 1e^{j2\pi \frac{k}{4}} \\ &= 1 - (-1)^k - 2j \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right). \end{aligned}$$

(Σ : 1 Punkt)

j) Es gilt mit dem Parseval'schen Theorem

$$\sum_{k=0}^{N-1} |Y_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 = 4(1 + 1 + 1 + 1) = 16.$$

(Σ : 1 Punkt)

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (15 Punkte)

Ein reelles, kausales, zeitdiskretes System S wird durch das Blockschaltdiagramm in Bild 11 beschrieben.

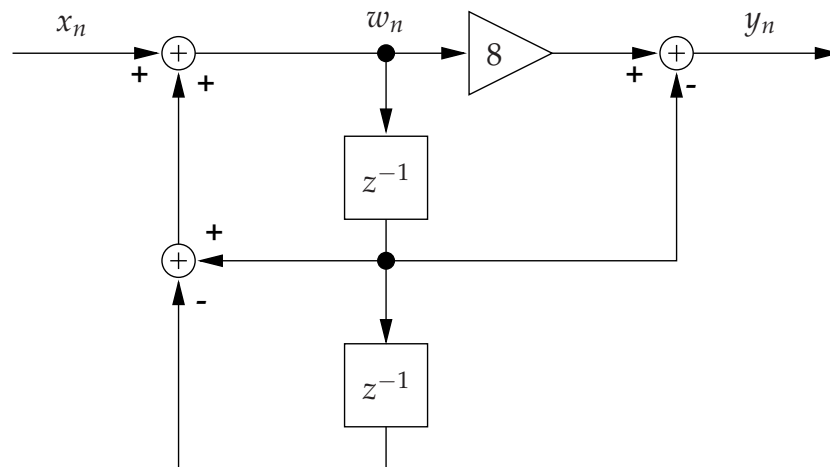


Abbildung 11: Zeitdiskretes System S .

- Stellen Sie unter Verwendung der Hilfsgröße w_n die Differenzengleichung für y_n in Abhängigkeit von y_{n-1} , y_{n-2} , x_n und x_{n-1} auf, die das System beschreibt. (2 Punkte)
Hinweis: Stellen Sie zunächst Differenzengleichungen für w_n und y_n auf und berechnen Sie deren z -Transformierte.
- Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems? (1 Punkt)
- Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems an. Wählen Sie hierfür die Zustandsgrößen wie folgt:

$$\begin{aligned} z_{1,n+1} &= w_n \\ z_{2,n+1} &= z_{1,n} \end{aligned}$$

(2 Punkte)

- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b), indem Sie die Übertragungsfunktion des Systems aus der Zustandsraumdarstellung bestimmen. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$. (1 Punkt)
- Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm der Übertragungsfunktion $G(z)$. (1 Punkt)
- Ist das System stabil? (Begründung). (1 Punkt)
- Ist das System minimalphasig? (Begründung). (1 Punkt)

Das System wird mit dem Signal

$$x_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot \sigma_n$$

angeregt.

- Wie lautet das Ausgangssignal y_n des Systems S ? Geben Sie das Ergebnis mit reellen Zahlen an. (4 Punkte)

Lösung

- a) Führt man oberhalb des oberen Verzögerungsgliedes die Zustandsgröße w_n ein, so erhält man die beiden Differenzengleichungen

$$w_n = x_n + w_{n-1} - w_{n-2} \quad y_n = 8w_n - w_{n-1}$$

bzw. deren z-Transformierte

$$W(z)(1 - z^{-1} + z^{-2}) = X(z) \quad Y(z) = W(z)(8 - z^{-1}).$$

Setzt man $W(z)$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so erhält man die Beziehung zwischen $Y(z)$ und $X(z)$:

$$Y(z) = \frac{8 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} X(z). \quad (6)$$

Durch Rücktransformation erhält man die Differenzengleichung:

$$y_n - y_{n-1} + y_{n-2} = 8x_n - x_{n-1}.$$

(Σ: 2 Punkte)

- b) Aus Gleichung (6) erhält man sofort die Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{8z^2 - z}{z^2 - z + 1}.$$

(Σ: 1 Punkt)

- c) Mit der Wahl $z_{1,n+1} = w_n$ und $z_{2,n+1} = z_{1,n}$ folgt:

$$\begin{aligned} z_{1,n+1} &= w_n = x_n + z_{1,n} - z_{2,n} \\ z_{2,n+1} &= z_{1,n} \\ y_n &= 8w_n - z_{1,n} \end{aligned} \quad (7)$$

und mit Gleichung (7)

$$y_n = 8x_n + 7z_{1,n} - 8z_{2,n}.$$

Damit entsteht die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{z}_{n+1} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} x_n \\ y_n &= \underbrace{(7, -8)}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}_n + \underbrace{(8)}_{\mathbf{D}} x_n. \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

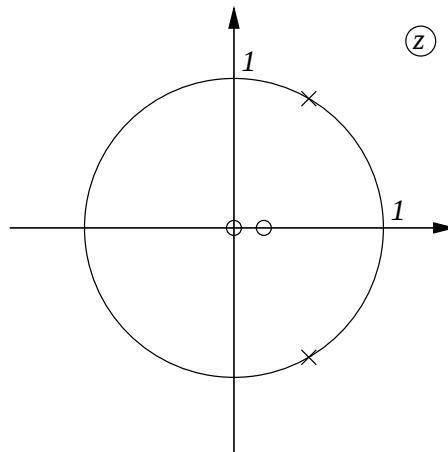


Abbildung 12: Pol-Nullstellen-Diagramm.

- d) Es gilt für die Übertragungsfunktion die Formel:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = (7, -8) \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (8) \\
 &= (8) + (7, -8) \frac{1}{z(z-1)+1} \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{8(z^2 - z + 1) + 7z - 8}{z^2 - z + 1} = \frac{z(8z - 1)}{z^2 - z + 1}.
 \end{aligned}$$

Dies entspricht der Lösung aus Teilaufgabe b).

(Σ: 2 Punkte)

- e) Die Pol- und Nullstellen berechnet man aus dem Zähler- bzw. Nennerpolynom.

$$z_{0,1} = 0; \quad z_{0,2} = \frac{1}{8}; \quad z_{\infty} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Σ: 1 Punkt)

- f) Hieraus ergibt sich das Pol-Nullstellen-Diagramm in Abbildung 12.

(Σ: 1 Punkt)

- g) Das System ist nicht stabil, da die Pole nicht innerhalb des Einheitskreises liegen.

(Σ: 1 Punkt)

- h) Das System ist nicht minimalphasig, da die Nullstellen zwar innerhalb des Einheitskreises liegen, das System allerdings nicht stabil ist (Definition Minimalphasigkeit).

(Σ: 1 Punkt)

Das Eingangssignal

$$x_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot \sigma_n \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{8}}$$

erzeugt das Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z) \cdot X(z) = \frac{8z^2 - z}{z^2 - z + 1} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8z(z - \frac{1}{8})}{z^2 - z + 1} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8z^2}{z^2 - z + 1} . \end{aligned}$$

Ausklammern von z ergibt:

$$\begin{aligned} Y(z) &= z \frac{8z}{z^2 - z + 1} \\ &= z 8 \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{z^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{z^2 - z + 1} \end{aligned}$$

○ — ●

$$y(t) = 8 \frac{2}{\sqrt{3}} r^n \sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) \sigma_n .$$

(Σ: 4 Punkte)

Aufgabe 5: Gemischte Aufgaben (16 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

- a) Welcher Bedingung muss die Abtastzeit t_A genügen, damit bei der Abtastung des Signals $y(t)$ mit $f_0 = 40 \text{ Hz}$ und $f_1 = \frac{5f_0}{20}$,

$$y(t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t) 2 \sin(2\pi f_1 t),$$

das Abtasttheorem erfüllt wird?

(2 Punkte)

Hinweis: $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b))$.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Es sei eine Folge

$$x_n = 2^{-\lfloor n/3 \rfloor} \sigma_n$$

wie in Abbildung 13 gegeben. Dabei steht $\lfloor n/3 \rfloor$ für die größte ganze Zahl k , für die $k \leq n/3$ gilt.

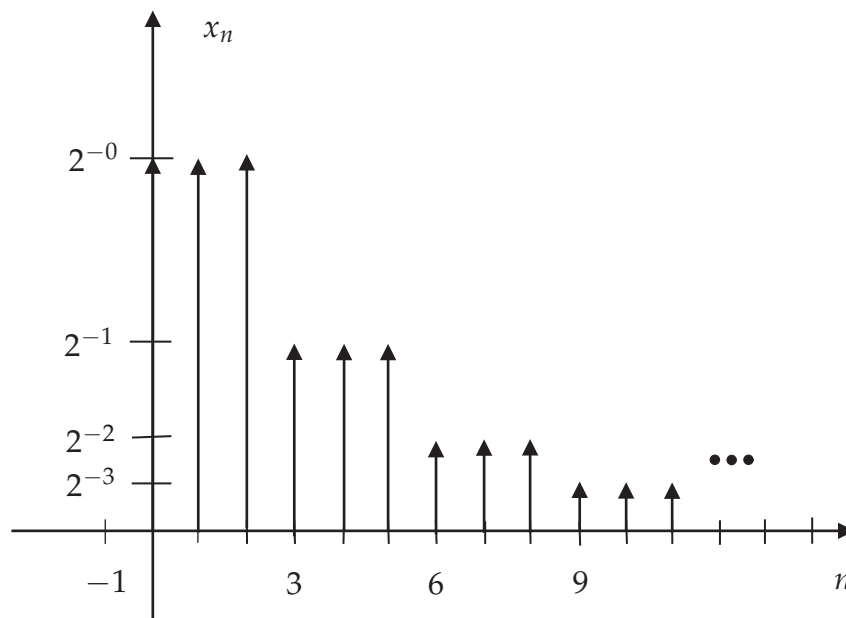


Abbildung 13: Zeitfolge x_n .

- b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- c) Geben Sie an, ob die folgenden Systeme linear, zeitinvariant und kausal sind. Das Eingangssignal ist jeweils mit x , das Ausgangssignal mit y bezeichnet. Eine tabellarische Übersicht mit ja/nein ist ausreichend.

(1) $n \cdot y_{n-1} + 3y_n = x_n + x_{n+1} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}$

(2) $y(t) = t^2 + \cos(x(t-3)) \quad t, x, y \in \mathbb{R}$

(3) $y(t) = e^{x(t+1)} \quad t, x, y \in \mathbb{R}$

(4) $y(t+1) = ax(t) + 5 \quad t, x, y, a \in \mathbb{R}$

(4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- d) Überprüfen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Korrespondenz

$$Y(z) = \frac{1}{(z-a)^2} \bullet \circ y_n = (n-1)a^{n-2}\sigma_{n-1}, \quad |z| > a$$

der z-Transformation für eine kausale Zeitfolge.

(3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Ein zeitdiskretes Filter mit dem gleichen Amplitudengang wie

$$G_1(z) = \frac{(z^2 - 4z + 8)}{(z - \frac{1}{2})(z^2 - z + \frac{1}{2})}$$

soll zur Verarbeitung von Audiodaten eingesetzt werden.

- e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Filters $G_2(z)$, welches bei gleichem Amplitudengang die kleinstmögliche Phasenzunahme in jedem Frequenzintervall besitzt.
(2 Punkte)
- f) Wie heißt das System, mit dem $G_2(z)$ multipliziert werden muss, um $G_1(z)$ zu erhalten?
(1 Punkt)

Lösung

- a) Das Signal besteht aus einem Gleichanteil und zwei Schwingungen.

$$y(t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t) 2 \sin(2\pi f_1 t) = 1 + \sin(2\pi t(f_1 - f_0)) + \sin(2\pi t(f_1 + f_0)).$$

Da für beide Frequenzen $f_0, f_1 \geq 0$ gilt, ist die höchste im Signal vorkommende Frequenz $f_0 + f_1 = 50$ Hz. Hieraus folgt aus dem Abtasttheorem die Bedingung $f_A > 100$ Hz für die Abtastfrequenz und die Bedingung $t_A < 10$ ms für die Abtastzeit.

(Σ: 2 Punkte)

- b) Durch Einsetzen der Folge x_n in die Definitionsgleichung der z-Transformation erhält man mit $a = 2^{-1}$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-3n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-(3n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-(3n+2)} \\ &= \left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z^3}\right)^n \\ &= \left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) \frac{1}{1 - \frac{a}{z^3}} \\ &= \frac{z^3 + z^2 + z}{z^3 - a}. \end{aligned}$$

(Σ: 4 Punkte)

- c)

System	linear	zeitinvariant	kausal
(1)	ja	nein	nein
(2)	nein	nein	ja
(3)	nein	ja	nein
(4)	nein	ja	ja

(Σ: 4 Punkte)

d) Die Rücktransformation mittels des Residuensatzes lautet

$$y_n = \sum_i \text{Res}\{Y(z)z^{n-1}; z_{\infty i}\}.$$

1. Für $n < 0$ ist $y_n = 0$, da es sich um eine kausale Folge handelt.
2. Für $n \geq 1$ ist $z = a$ der einzige (doppelte) Pol der Funktion $Y(z)z^{n-1}$ und es folgt

$$y_n = \text{Res}\left\{\frac{z^{n-1}}{(z-a)^2}; z=a\right\} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz}\{z^{n-1}\} = (n-1)a^{n-2}.$$

3. Für $n = 0$ ergibt sich

$$y_0 = \text{Res}\left\{\frac{1}{z(z-a)^2}; z=0\right\} + \text{Res}\left\{\frac{1}{z(z-a)^2}; z=a\right\} = \frac{1}{a^2} + \frac{-1}{a^2} = 0.$$

(Σ: 3 Punkte)

e) Es gilt:

$$G_1(z) = \underbrace{\frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{8}} e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)}}_{\text{Minimalphasensystem}=G_2} \cdot \underbrace{\frac{(z^2 - 4z + 8)}{\left(z - \frac{1}{\sqrt{8}} e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}}_{\text{Allpass}}.$$

(Σ: 2 Punkte)

f) $G_2(z)$ muss mit einem Allpass multipliziert werden, um $G_1(z)$ zu erhalten.

(Σ: 1 Punkt)