Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach Signale und Systeme 27. März 2014

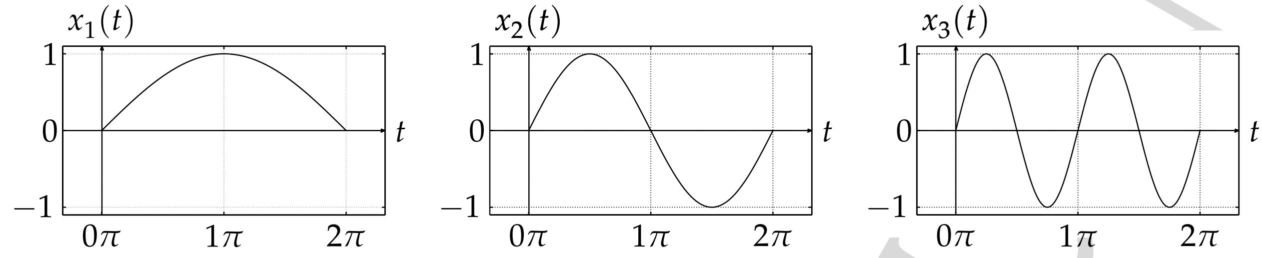
Musterlösung

Aufgabe 1: 22
Aufgabe 2: 11
Aufgabe 3: 26
Aufgabe 4: 10

Gesamtpunkte: 69

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (22 Punkte)

Gegeben seien auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ die Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$:



(a) Funktion $x_1(t)$. (b) Funktion $x_2(t)$. (c) Funktion $x_3(t)$.

Abbildung 1: Gegebene Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$.

Außerhalb des Intervalls $(0, 2\pi)$ seien die Funktionen $x_i(t) = 0$.

a) Handelt es sich bei den Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ um Energiesignale? (Begründung) *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von der vorhergehenden gelöst werden.

b) Bilden die Funktionen $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ auf dem Intervall $(0,\ 2\pi)$ ein orthogonales System? Prüfen Sie hierzu, ob die entsprechenden Innenprodukte verschwinden. Nehmen Sie an, dass es sich bei den gegebenen Funktionen um Energiesignale handelt. *(3 Punkte)*

c) Bilden Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe **b)** ein orthonormales Funktionensystem $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)$ aus $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren anwenden. *(7 Punkte)*

Hinweis zu den Aufgabenteilen **b)** und **c)**:

$$\int \sin^2(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin(2kt)}{2k}\right)$$

$$\int \sin(at)\sin(bt)\ \mathrm{d}t = \frac{\sin((a-b)t)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)t)}{2(a+b)}$$

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

d) Wozu lassen sich orthogonale Funktionensysteme verwenden? Worin liegen die Vorteile von Orthonormalsystemen? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

e) Welches Phänomen kann bei realen Systemen bei der Rücktransformation der Fourier-Transformation in den Zeitbereich auftreten? Wo tritt dieser Effekt auf? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

Gegeben sei das **kausale** System S mit der Impulsantwort für $t \geq 0$:

$$g_S(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-t_0} & , t \leq 10 \\ 0 & , \text{sonst}. \end{cases}$$

f) Skizzieren Sie $g_S(t)$ für $t_0 = 0$. *(1 Punkt)*

g) Bestimmen Sie $t_0 \in \mathbb{Z}$, so dass das System S stabil ist und prüfen Sie die Stabilität im Grenzfall durch Rechnung. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

Es sei die Funktion $y(t)$ gegeben:

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi + \mathrm{j}\,t)^2}\,.$$

h) Zeigen Sie im Frequenzbereich die Mittelwertfreiheit des Signals $y(t)$. *(3 Punkte)*

i) Beweisen Sie durch zweimaliges Anwenden der Hilbert-Transformation auf die Funktion $y(t)$ und unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus der vorhergehenden Teilaufgabe den Zusammenhang

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{y(t)\}\} = -y(t)\,,$$

wobei $\mathcal{H}\{\cdot\}$ dem Hilbert-Operator entspricht. *(3 Punkte)*

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil **h)** nicht gelöst haben, nehmen Sie für das Signal $y(t)$ Mittelwertfreiheit an.

Lösung

a) Ein Energiesignal muss die folgende Bedingung erfüllen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)x_i^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)|^2\ \mathrm{d}t \overset{!}{<} \infty\,. \tag{L1}$$

Alle drei Funktionen sind auf dem endlichen Intervall $(0, 2\pi)$ definiert, beschränkt und nehmen sonst den Wert 0 an. Daraus folgt, dass Gleichung (L1) erfüllt ist. Es handelt sich also um Energiesignale. ***(Σ: 1 Punkt)***

b) Aus Abbildung 1 ist sofort ersichtlich, dass die gegebenen Funktionen ein orthogonales Funktionensystem bilden. Prüfen auf Orthogonalität der Funktionen $x_1(t)$,$x_2(t)$ und $x_3(t)$ durch Rechnung (erforderlich!):

$$\begin{aligned}
\langle x_1(t), x_2(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}-1\right)t\right)}{2\left(\frac{1}{2}-1\right)} - \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)t\right)}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)}\right]_0^{2\pi} = 0 \\
\langle x_1(t), x_3(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_3^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{3\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\sin(2t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}-2\right)t\right)}{2\left(\frac{1}{2}-2\right)} - \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}+2\right)t\right)}{2\left(\frac{1}{2}+2\right)}\right]_0^{2\pi} = 0 \\
\langle x_2(t), x_3(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)x_3^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{3\pi} \sin(t)\sin(2t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin((1-2)\,t)}{2\,(1-2)} - \frac{\sin((1+2)\,t)}{2\,(1+2)}\right]_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

Da alle Innenprodukte gleich null sind, handelt es sich bei dem angegebenen Funktionensystem um ein orthogonales System (jeweils ein Punkt pro Rechnung).

(Σ: 3 Punkte)

c) Zunächst werden die Innenprodukte der Signale mit sich selbst berechnet (je 1 Punkt):

$$\begin{aligned}
\langle x_1(t), x_1(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} \left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|^2\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{2\pi} \sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(t)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi \\
\langle x_2(t), x_2(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)x_2^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} |\sin(t)|^2\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{2\pi} \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin(2t)}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \pi \\
\langle x_3(t), x_3(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)x_3^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^2\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} |\sin(2t)|^2\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{2\pi} \sin^2(2t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{2\pi} = \pi\,.
\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe **b)** und der Norm eines Signals in L_2,

$$\|x_i(t)\| = \left(\langle x_i(t), x_i(t)\rangle\right)^{\frac{1}{2}},$$

kann nun das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren angewandt werden (je ein 1 Punkt pro Ergebnis und 1 Punkt für das Verfahren):

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|} = \frac{x_1(t)}{\sqrt{\pi}} \\
\Phi_2(t) &= \frac{h_2(t)}{\|h_2(t)\|} \\
h_2(t) &= x_2(t) - \langle x_2(t), \Phi_1(t)\rangle\, \Phi_1(t) = x_2(t) \\
\Phi_2(t) &= \frac{x_2(t)}{\|x_2(t)\|} = \frac{x_2(t)}{\sqrt{\pi}} \\
\Phi_3(t) &= \frac{h_3(t)}{\|h_3(t)\|} \\
h_3(t) &= x_3(t) - \langle x_3(t), \Phi_1(t)\rangle\, \Phi_1(t) - \langle x_3(t), \Phi_2(t)\rangle\, \Phi_2(t) \\
&= x_3(t) \\
\Phi_3(t) &= \frac{x_3(t)}{\|x_3(t)\|} = \frac{x_3(t)}{\sqrt{\pi}}\,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **7 Punkte**)*

d) Orthogonale Funktionensysteme kann man verwenden, um Funktionen zu approximieren. Der Vorteil orthonormaler System besteht darin, dass für Sie die Gram'sche Matrix zur Einheitsmatrix wird und sich somit die Koeffizienten a_i mit

$$y = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$$

direkt aus $\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{a}$ ablesen lassen, wobei $\mathbf{G}$ die Gram'sche Matrix und $\mathbf{z}$ die Innenprodukte von y mit den Basisvektoren x_i darstellt. ***(Σ: 1 Punkt)***

e) Das Gibbs'sche Phänomen tritt in realen Systemen an Sprungstellen auf. ***(Σ: 1 Punkt)***

f) Abbildung L1 zeigt die Impulsantwort für $t_0 = 0$. ***(Σ: 1 Punkt)***

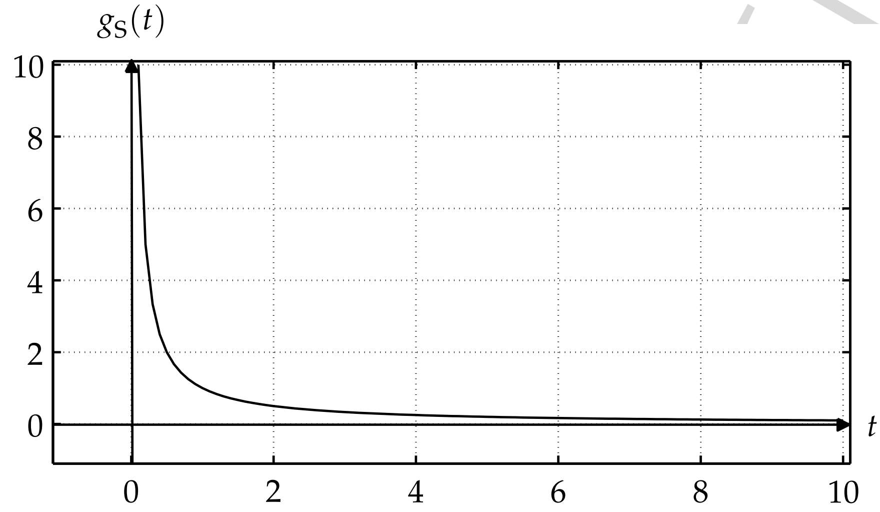


Abbildung L1: Impulsantwort $g_S(t)$.

g) Für $t_0 = 0$ ist das System wie in Abbildung L1 ersichtlich nicht stabil. Die Bedingung für absolute Integrierbarkeit (Stabilitätskriterium) ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_S(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \left|\frac{1}{t}\right| \, \mathrm{d}t = [\ln(t)]_0^{10} = \ln(10) - \ln(0) = \infty .$$

Für $t_0 = -1$ ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_S(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \left|\frac{1}{t+1}\right| \, \mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^{10} = \ln(11) - \ln(1) = \ln(11) < \infty .$$

Außerdem gilt für $t_0 < -1$ sowie $t_{0,1} > t_{0,2}$ (nicht verlangt):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|g_{S,t_{0,1}}(t)\right| \, \mathrm{d}t > \int_{-\infty}^{\infty} \left|g_{S,t_{0,2}}(t)\right| \, \mathrm{d}t .$$

Für $t_0 \leq -1$ ist das System also stabil. Die Lösung $t_0 > 10$ wird ebenfalls gewertet.

(Σ: 2 Punkte)

h) Es gilt:

$$\frac{1}{(\mathrm{a} + 2\pi \mathrm{j} f)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{a}t}\,\sigma(t) .$$

Skalierungseigenschaft:

$$\frac{1}{|2\pi|}\frac{1}{(\mathrm{a} + \mathrm{j} f)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2\pi t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{a}t2\pi}\,\sigma(t2\pi) .$$

Symmetrieeigenschaft sowie $a = 2\pi$:

$$\frac{1}{(2\pi + \mathrm{j}\,t)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -4\pi^2 f\, \mathrm{e}^{-4\pi^2(-f)}\, \sigma(-f2\pi)$$
$$\frac{1}{(2\pi + \mathrm{j}\,t)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -4\pi^2 f\, \mathrm{e}^{4\pi^2 f}\, \sigma(-f)\,.$$

Man erkennt sofort, dass $Y(0) = 0$ und somit Mittelwertfreiheit gilt. ***(Σ: 3 Punkte)***

i) Fourier-Transformation ergibt:

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{y(t)\}\} = g(t) * g(t) * y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(f)G(f)G(f)\,.$$

Mit der Übertragungsfunktion

$$G(f) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sign}\,(f)$$

ergibt sich:

$$G(f)G(f) = \begin{cases} 0\,, & f = 0 \\ -1\,, & \text{sonst}\;. \end{cases} \tag{L2}$$

Mit $Y(0) = 0$ und L2 gilt also:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{y(t)\}\}\} = Y(f)G(f)G(f) = -Y(f)$$

und durch Rücktransformation

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{y(t)\}\} = -y(t)\,.$$

Ohne Mittelwertfreiheit gilt für $f = 0$:

$$Y(0)G(0)G(0) = 0 \neq -Y(0)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{y(t)\}\}\} \neq \mathcal{F}\{-y(t)\}\,.$$

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (11 Punkte)

Gegeben ist das in Abbildung 2 gezeigte LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$.

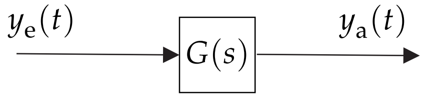


Abbildung 2: LTI-System.

Außerdem sei die Sprungantwort $h(t)$ mit

$$h(t) = -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right), \quad t \geq 0\,,$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie aus der Impulsanwort mittels der Korrespondenztabelle die Übertragungsfunktion $G(s)$. *(1 Punkt)*

c) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm. Ist das System stabil? *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.
Es sei nun die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ des Systems S_1 mit

$$G_1(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + s + \frac{1}{2}}$$

gegeben. Gesucht ist das stabile System S_2, sodass das Gesamtsystem S Allpasscharakter aufweist. Abbildung 3 stellt den Zusammenhang zwischen den Systemen graphisch dar.

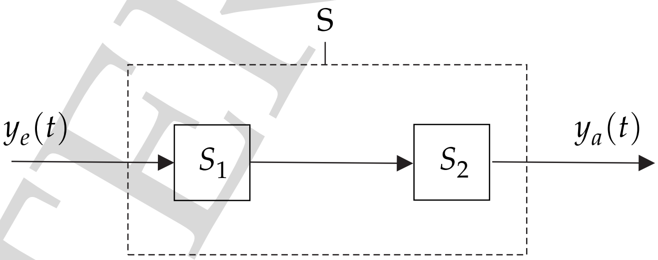


Abbildung 3: System S.

d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion G_2 des Systems S_2. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

e) Geben Sie mit Hilfe des Verfahrens der Pol-/Nullstellenübertragung eine zeitdiskrete Darstellung des Systems S_1 für $t_\mathrm{A} = \pi$ an. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich, indem Sie

$$z' = z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t_\mathrm{A}}$$

substituieren. Der Proportionalitätsfaktor muss nicht berechnet werden. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Die Impulsantwort ergibt sich aus der Ableitung der Sprungantwort:

$$\begin{aligned} g(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h(t)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\right) \\ =& \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\,\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right) \\ =& \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\,. \end{aligned}$$

(Σ: 1 Punkt)

b) Für die Übertragungsfunktion ergibt sich mit Hilfe der Korrespondenztabelle

$$\begin{aligned} g(t) =& \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ & \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \\ G(s) =& \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 1 Punkt)

c) Die Pol- und Nullstellen von $G_1(s)$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} s_{0,1} &= -\frac{1}{2}, \\ s_{\infty,1} &= -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}, \\ s_{\infty,2} &= -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das zugehörige Pol- und Nullstellendiagramm ist in Abbildung L2 zu sehen.
Das System ist stabil, da die Realteile der Polstellen negativ sind. ***(Σ: 2 Punkte)***

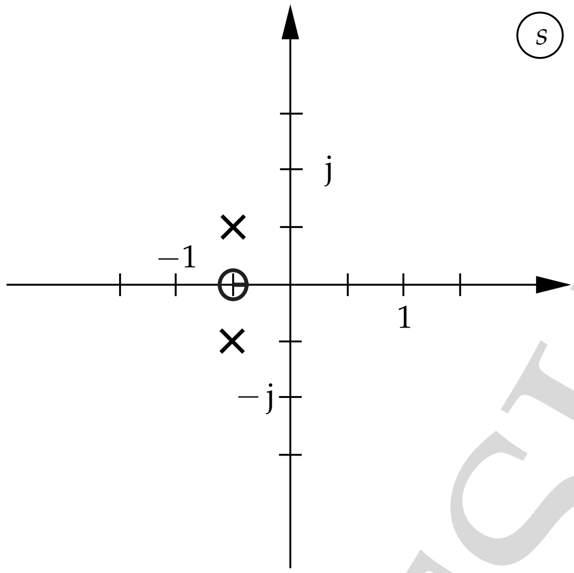


Abbildung L2: Pol-/Nullstellendiagramm von $G(s)$.

Alternativlösung

Die Impulsantwort ergibt sich aus der Ableitung der Sprungantwort:

$$
\begin{aligned}
g(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\right)\sigma(t)\right)\\
=& \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\,\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\sigma(t) - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\sigma(t)\\
&- \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\delta(t)\\
=& \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\sigma(t) - 1\,.
\end{aligned}
$$

(Σ: 1 Punkt)

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich mit Hilfe der Korrespondenztabelle

$$
g(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\sigma(t) - 1
$$

$$
\bullet\!\!-\!\!\circ
$$

$$
\begin{aligned}
G(s) =& \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{1}{2}} - 1\\
=& \frac{-s^2}{s^2+s+\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Auf diese Lösung kommt man auch mit dem Ansatz $G(s) = sH(s)$.

(Σ: 1 Punkt)

Die Pol- und Nullstellen von $G_1(s)$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
s_{0,1,2} &= 0\,,\\
s_{\infty,1} &= -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,,\\
s_{\infty,2} &= -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(Diagramm) ***(Σ: 2 Punkte)***

d) Der Amplitudengang $G(s = 2\pi\,\mathrm{j}\,f)$ des Systems S muss für alle Frequenzen gleich eins sein:

$$|G(f)| = 1\,.$$

Mit den Pol- und Nullstellen von $G_1(s)$:

$$\begin{aligned}
s_{0,11} &= -\frac{1}{2}\\
s_{\infty,11} &= -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\\
s_{\infty,12} &= -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

wählt man $G_2(s)$:

$$G_2(s) = \frac{s^2 - s + \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} = \frac{(s - (\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}))(s - (\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}))}{(s - (-\frac{1}{2}))}\,.$$

mit

$$\begin{aligned}
s_{0,21} &= \frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,,\\
s_{0,22} &= \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,,\\
s_{\infty,21} &= -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Laut Skript S.179 muss für ein Allpasssystem die Bedingung

$$\begin{aligned}
s_{0,\mu} &= -s^*_{\infty,\nu}\,, \qquad \text{(L3)}\\
s_{0,21} &= \frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2} = -\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)^* = -s^*_{\infty,11}\\
s_{0,22} &= \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2} = -\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)^* = -s^*_{\infty,12}
\end{aligned}$$

gelten. Dies ist mit der oben gewählten Übertragungsfunktion für $G_2(s)$ erfüllt. Bei Wahl von $s_{\infty,21}$ unter Berücksichtigung von (L3) würde sich ein instabiler Pol ergeben. Daher wählt man $s_{\infty,21} = s_{0,11}$ und kürzt die entsprechenden Terme.

Also ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
G(s) = G_1(s)G_2(s) &= \frac{\left(s - (\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)\left(s - (\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)}{\left(s - (-\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)\left(s - (-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)}\frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(s - (\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)\left(s - (\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)}{\left(s - (-\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)\left(s - (-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2})\right)}\,.
\end{aligned}$$

ein stabiles Allpaßsystem. Die Triviallösung $s_{0,\mu} = s_{\infty,\nu}$ wird nicht als Lösung gewertet. *(Σ: **3 Punkte**)*

e) Die Pole und Nullstellen werden entsprechend der nichtlinearen Abbildung

$$z = \mathrm{e}^{st_\mathrm{A}}$$

übertragen. Bei der Übetragung ist darauf zu achten, dass der Zählergrad von $G(s)$ kleiner als der Nennergrad ist und man eine Nullstell für $s = \infty$ erhält. Es ergibt sich für die zeitdiskrete Darstellung

$$\begin{aligned} G(z) =& \mathrm{k}\frac{\left(z - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t_\mathrm{A}}\right)\left(z+1\right)}{\left(z - \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)t_\mathrm{A}}\right)\left(z - \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)t_\mathrm{A}}\right)} \\ =& \mathrm{k}\frac{\left(z\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t_\mathrm{A}} - 1\right)\left(z\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t_\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t_\mathrm{A}}\right)}{\left(z\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}t_\mathrm{A}}\right)\left(z\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t_\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}t_\mathrm{A}}\right)}. \end{aligned}$$

Mit der in der Aufgabenbeschreibung genannten Substitution $z' = z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t_\mathrm{A}}$ sowie $t_\mathrm{A} = \pi$ ergibt sich:

$$G(z') = \mathrm{k}\frac{\left(z'-1\right)\left(z' + \frac{z'}{z}\right)}{\left(z'+\mathrm{j}\right)\left(z'-\mathrm{j}\right)}.$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (26 Punkte)

Gegeben sind die drei in Abbildung 4 gezeigten diskreten Fourier-Transformierten $Y_{1,k}$, $Y_{2,k}$ und $Y_{3,k}$ überlagerter harmonischer Schwingungen der Länge $N = 16$. Die Abtastfrequenz beträgt $f_\mathrm{A} = 16$.

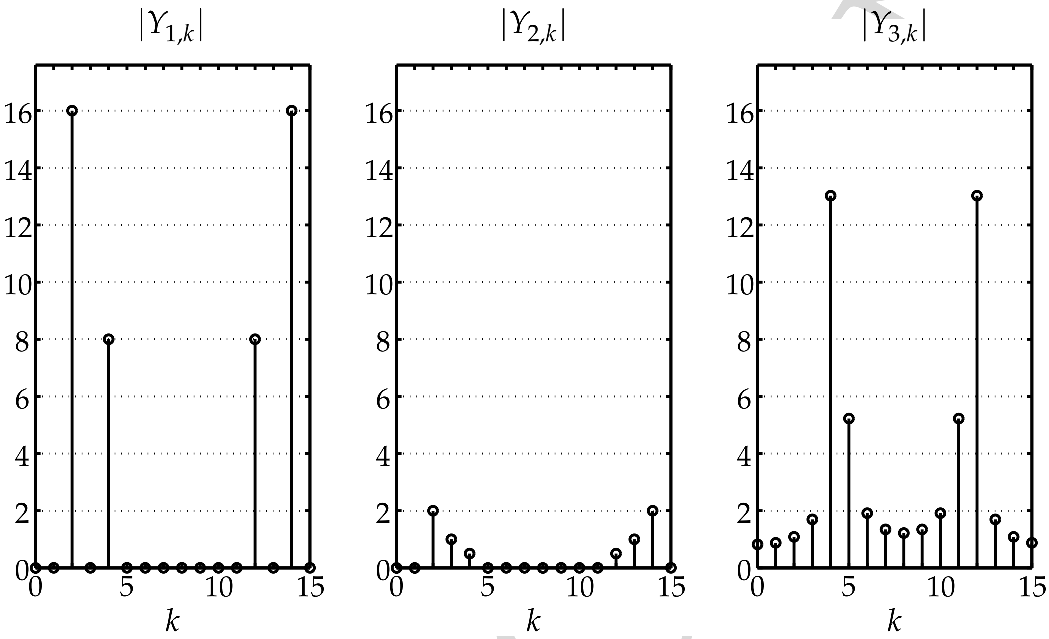


Abbildung 4: Diskrete Betragsspektren $|Y_{1,k}|$, $|Y_{2,k}|$ und $|Y_{3,k}|$.

a) Bei welchen der Spektren tritt der Leckeffekt auf? Begründung! *(3 Punkte)*

b) Welcher Zusammenhang muss bei Betrachtung einer harmonischen Schwingung zwischen Schwingfrequenz und Frequenzauflösung gegeben sein, damit bei der DFT kein Leckeffekt auftritt? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

Weiterhin seien nun die Abbildung 5 zu entnehmenden drei zeitdiskreten Signale $y_{\mathrm{A},n}$, $y_{\mathrm{B},n}$ und $y_{\mathrm{C},n}$ gegeben.

c) Ordnen Sie den Spektren in Abbildung 4 ihre entsprechenden zeitdiskreten Signale zu. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Energie des Signals $y_{\mathrm{C},n}$. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

e) Bestimmen Sie das zum Spektrum $Y_{1,k}$ gehörende zeitdiskrete Signal $y_{1,n}$, indem Sie $y_{1,n}$ als eine Linearkombination von zeitdiskreten Signalen der Form

$$y_{1,n} = \sum_i a_i \sin(2\pi n f_i)$$

darstellen. Bestimmen Sie die Faktoren a_i, indem Sie $a_1 = 2A$ wählen und alle weiteren a_i in Abhängigkeit von A ausdrücken. *(3 Punkte)*

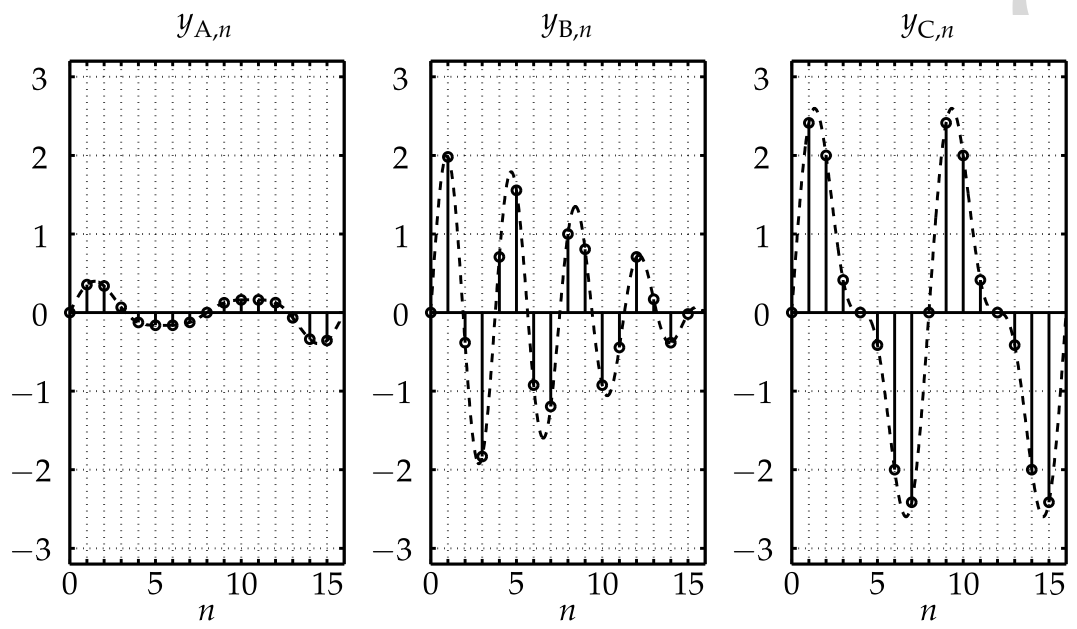


Abbildung 5: Zeitdiskrete Signale $y_{A,n}$, $y_{B,n}$ und $y_{C,n}$.

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y(t)$ mit dem in Abbildung 6 gezeigten Spektrum. Der Nutzbereich des Signals beschränkt sich auf das Frequenzband $[-f_N\ , f_N\ ]$, wobei $f_N = \frac{f_A}{2}$ die Nyquist-Frequenz ist.

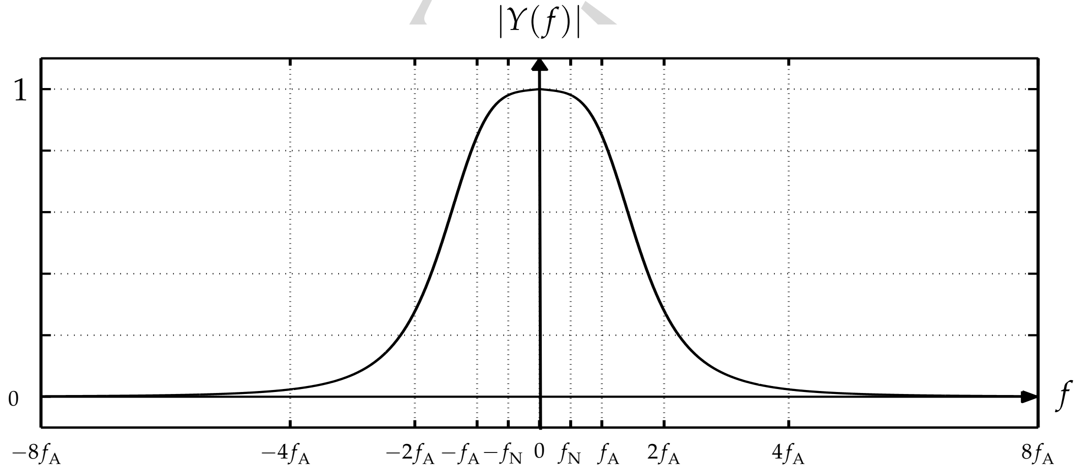


Abbildung 6: Betragsspektrum $|Y(f)|$.

Das Signal $y(t)$ soll in einem Digitalrechner verarbeitet werden. Um das Frequenzband des Spektrums zu begrenzen, soll das Signal in einem Vorverarbeitungsschritt **zunächst** analog gefiltert werden. Gegegeben seien hierfür die in Abbildung 7 dargestellten analogen Anti-Aliasing-Filter $G_1(f)$ und $G_2(f)$.

f) Welches Filter soll zur analogen Filterung genutzt werden, damit keine relevanten Signalanteile unterdrückt werden? Begründung! *(1 Punkt)*

Nach der analogen Filterung erhalten Sie nun das Signal $y_2(t)$, dessen Spektrum $Y_2(f)$ Sie in Abbildung 8 sehen.

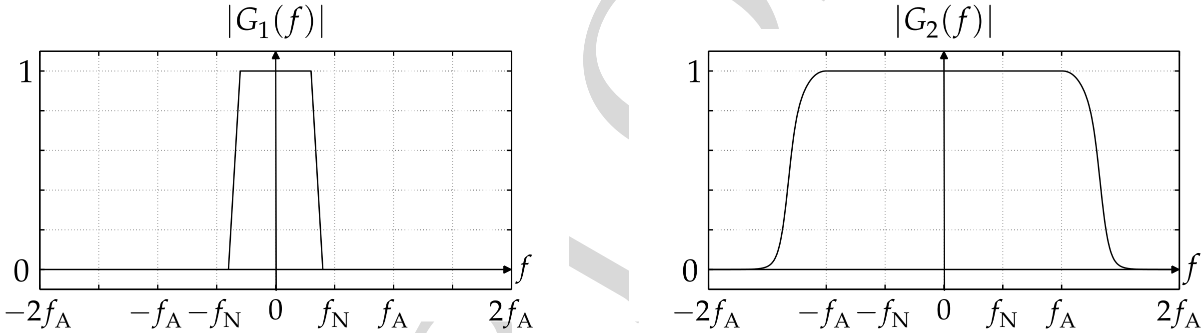


Abbildung 7: Analoge Anti-Aliasing-Filter $G_1(f)$ und $G_2(f)$.

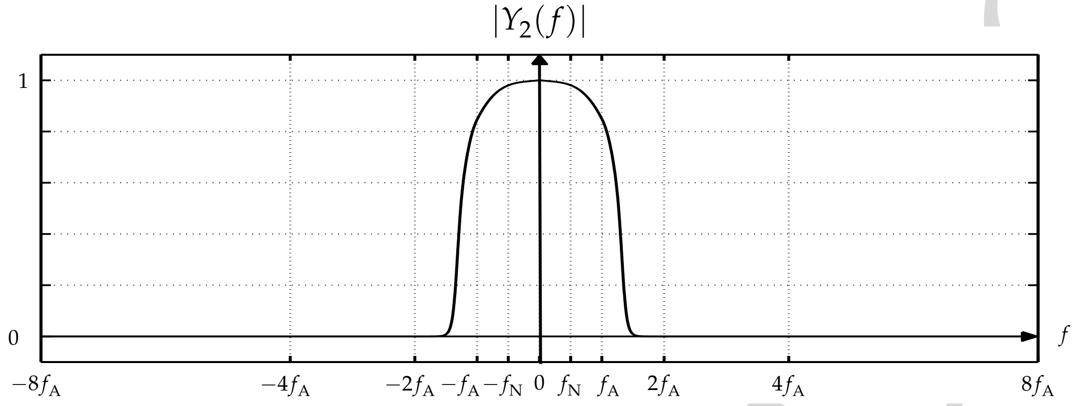


Abbildung 8: Betragsspektrum $|Y_2(f)|$.

g) Um das Signal $y_2(t)$ digital zu verarbeiten, soll es nun abgestastet werden. Wählen Sie eine geeignete minimale Abtastfrequenz $f'_A = r f_A$ mit $r \in \mathbb{N}$ so, dass kein Bandüberlappungsfehler auftritt und skizzieren Sie das Betragsspektrum $|Y'_{2*}(f)|$ des abgetasteten Signals $y'_{2,n}$ im Bereich $[-8f_A\,, 8f_A\,]$. *(3 Punkte)*

Das abgetastete Signal soll nun anschließend mit einem zeitdiskreten Filter hoher Flankensteilheit auf das Nutzband begrenzt werden. Hierzu steht ihnen ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz f_g und der kontinuierlichen Übertragungsfunktion $G_{TP}(f)$ zur Verfügung.

h) Um das Tiefpassfilter zu nutzen, soll dieses nun durch Abtastung seiner Impulsantwort $g_{TP}(t)$ mit der in Aufgabenteil **g)** gewählten Abtastrate diskretisiert werden. Skizzieren Sie das Spektrum $G'_{TP}(f)$ des abgetasteten Filters $g'_{TP,n}$ mit einer sinnvoll gewählten Grenzfrequenz (Tipp: Interessierenden Frequenzbereich berücksichtigen!). *(3 Punkte)*

Das Signal $y'_{2,n}$ wird nun mit dem Tiefpass $g_{TP}(t)$ gefiltert:

$$z'_n = y'_{2,n} * g'_{TP,n}\,.$$

i) Skizzieren Sie das Betragsspekrum $|Z'_*(f)|$ des gefilterten Signals. *(3 Punkte)*

Das Signal z'_n wird nun durch Downsampling auf die einfache Abtastfrequenz zurückgebracht, damit Speicherplatz gespart werden kann:

$$z_m = z'_{rn}\,.$$

j) Skizzieren Sie das Betragsspektrum $|Z_*(f)|$ des Signals nach dem Downsampling. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Im Spektrum des Signals $Y_{3,k}$ ist der Leckeffekt deutlich an der Verschmierung des Spektrums erkennbar. Bei den Spektren $Y_{2,k}$ und $Y_{1,k}$ tritt kein Leckeffekt auf.

(Σ: 3 Punkte)

b) Das Verhältnis von Schwingfrequenz f_0 und Frequenzauflösung Δf,

$$\frac{f_0}{\Delta f} = f_0 N t_\mathrm{A} \,,$$

muss ganzzahlig sein. *(Σ: 1 Punkt)*

c) Es git:

$$\begin{aligned} Y_{1,k}\,(f) \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y_{\mathrm{C},n} \\ Y_{2,k}\,(f) \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y_{\mathrm{A},n} \\ Y_{3,k}\,(f) \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y_{\mathrm{B},n} \,. \end{aligned}$$

Man erkennt in den Spektren $|Y_{1,k}|$ und $|Y_{2,k}|$ mit $\Delta_\mathrm{f} = \frac{f_\mathrm{A}}{N} = 1$ die Frequenz $f = 2$ als die charakteristische Frequenz. Dadurch lassen Sie sich den zeitdiskreten Signalen $y_{\mathrm{A},n}$ und $y_{\mathrm{C},n}$ zuordnen. $y_{\mathrm{A},n}$ hat eine deutlich geringe Signalenergie und ist daher $|Y_{2,k}|$ zuzuordnen. Bei der diskreten Fourier-Transformierten $|Y_{3,k}|$ ist der Leckeffekt deutlich erkennbar. Bei $y_{\mathrm{B},n}$ handelt es sich nicht um ein ganzzahliges Vielfaches einer Periode. (Alternativ: Ausschlußverfahren). *(Σ: 3 Punkte)*

d) Mit Hilfe des Satzes von Parseval gilt für die Energie eines Signals

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |Y_k|^2.$$

Aus Abbildung 4 liest man $|Y_{1,k=2}| = 16$ und $|Y_{1,k=4}| = 8$ ab. Es ergibt sich für die Energie des Signals mit $N = 16$:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |Y_k|^2 = \frac{1}{N} \left(2 \cdot 16^2 + 2 \cdot 8^2\right) = 40\,.$$

(Σ: 3 Punkte)

e) Das Signal setzt sich aus zwei harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude zusammen. Das Signal hat Signalanteile bei den Frequenzen $f_1 = 2$ und $f_2 = 4$. Mit der Wahl $a_1 = 2A$ ergibt sich $a_2 = A$ und somit:

$$y_{1,n} = 2A\sin(2\pi\frac{n}{16}2) + A\sin(2\pi\frac{n}{16}4)\,.$$

Alternativ kann auch $f_1 = 4$ und $f_2 = 2$ sowie $a_1 = A$ und $a_2 = 2A$ gewählt werden. Die Frequenzanteile bei $k = 12$ und $k = 14$ resultieren lediglich aus der periodischen Fortsetzung des diskreten Betragsspektrums. *(Σ: 3 Punkte)*

f) Da der Nutzbereich des Signals im Frequenzbereich $[-f_\mathrm{N}\,,\, f_\mathrm{N}]$ liegt und das Filter $G_1(f)$ spektrale Anteile im Nyquist-Band filtert, ist das Filter $G_2(f)$ zu wählen.

(Σ: 1 Punkt)

.

g) Man wählt $f'_\mathrm{A} = 4f_\mathrm{A}$, so dass es nicht zu Aliasing kommt (Bandüberlappungsfehler). Das verwendete Verfahren nennt man Überabtastung. Das Ergebnis der Abtastung im Spektralbereich ist in Abbildung L3 zu sehen.

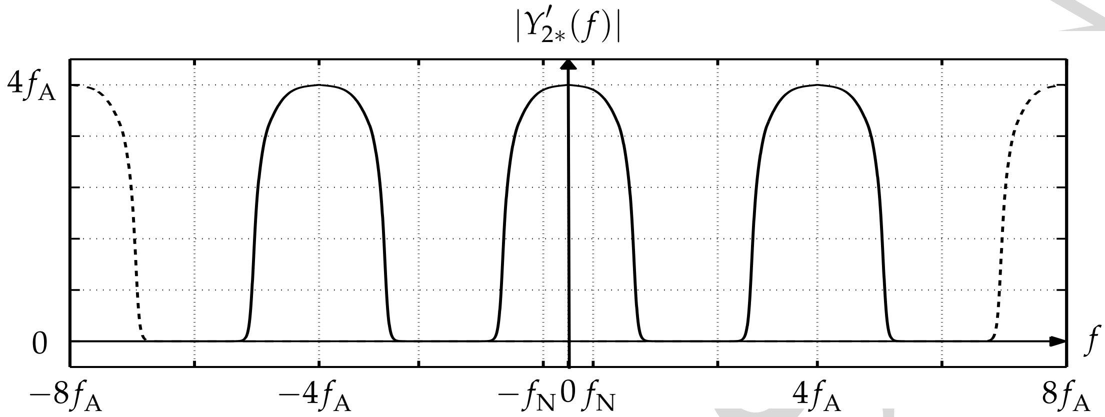


Abbildung L3: Betragsspektrum $|Y'_{1*}(f)|$ des abgetasteten Signals $y'_{1,n}$.

(Σ: 3 Punkte)

h) Die Lösung ist in Abbildung L4 zu sehen.

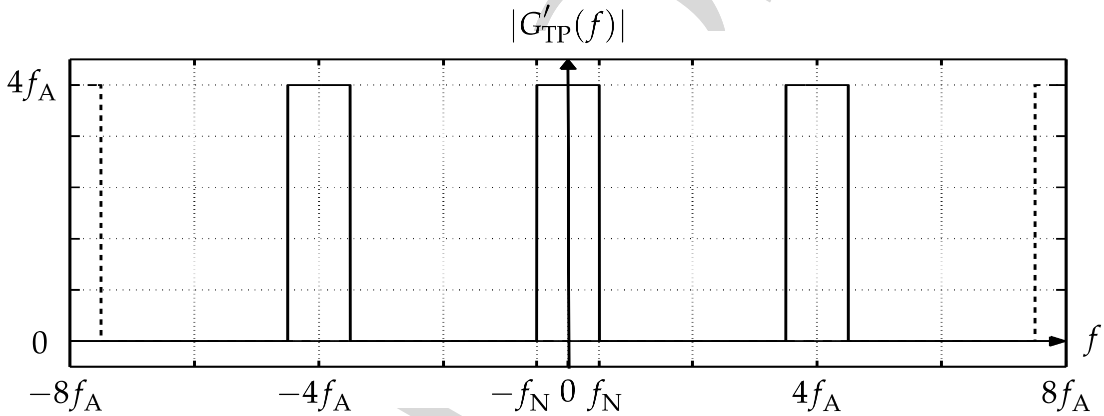


Abbildung L4: Betragsspektrum $|G'_\mathrm{TP}(f)|$ des abgetasteten Filters $g'_{\mathrm{TP},n}$.

(Σ: 3 Punkte)

i) Abbildung L5 zeigt das mit dem idealen Tiefpass gefilterte Signal $|Z'_*(f)|$.

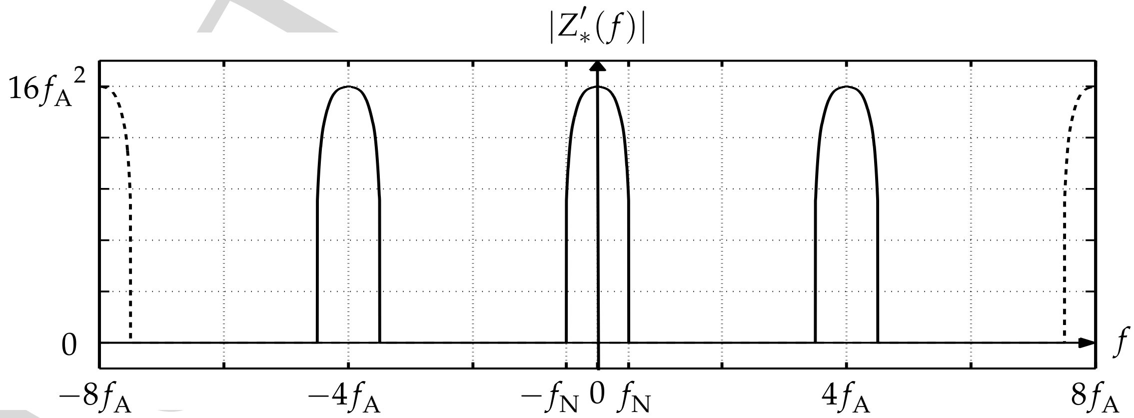


Abbildung L5: Betragsspektrum $|Z'_*(f)|$ des tiefpassgefilterten Signals.

(Σ: 3 Punkte)

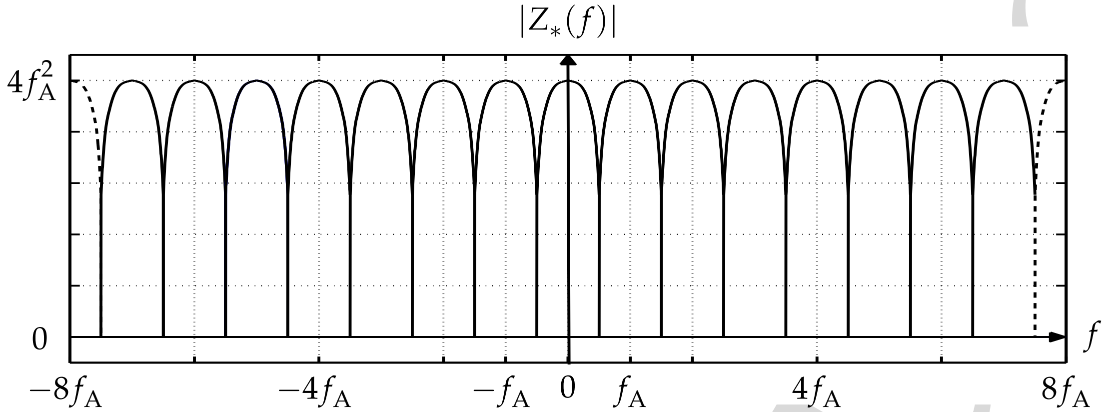


Abbildung L6: Betragsspektrum $|Z_*(f)|$ des Signals nach dem Downsampling.

j) Abbildung L6 zeigt das Signal $|Z_*(f)|$ nach dem Downsampling.

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (10 Punkte)

Gegeben ist ein FIR-Filter dritter Ordnung, das in Abbildung 9 gezeigt ist.

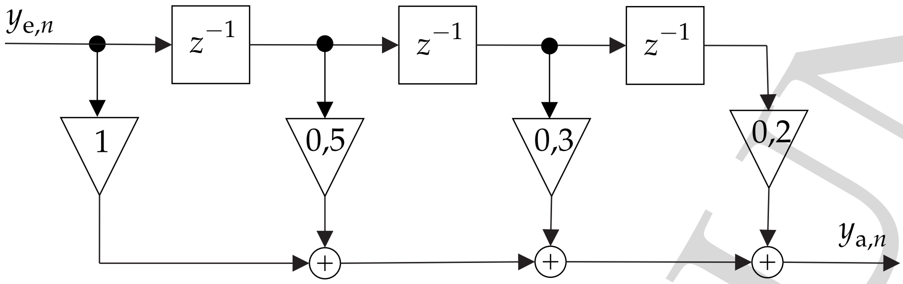


Abbildung 9: FIR-Filter.

a) Wofür steht die Abkürzung FIR? Wodurch charakterisiert sich die Impulsantwort eines FIR-Filters? *(1 Punkt)*

b) Skizzieren Sie für dem Eingang $y_{e,n} = \delta_n$ die Impulsantwort des Filters. Hinweis: Es ist keine Rechnung erforderlich! *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorhergehenden lösbar.

Das FIR-Filter wird nun wie in Abbildung 10 dargestellt verändert.

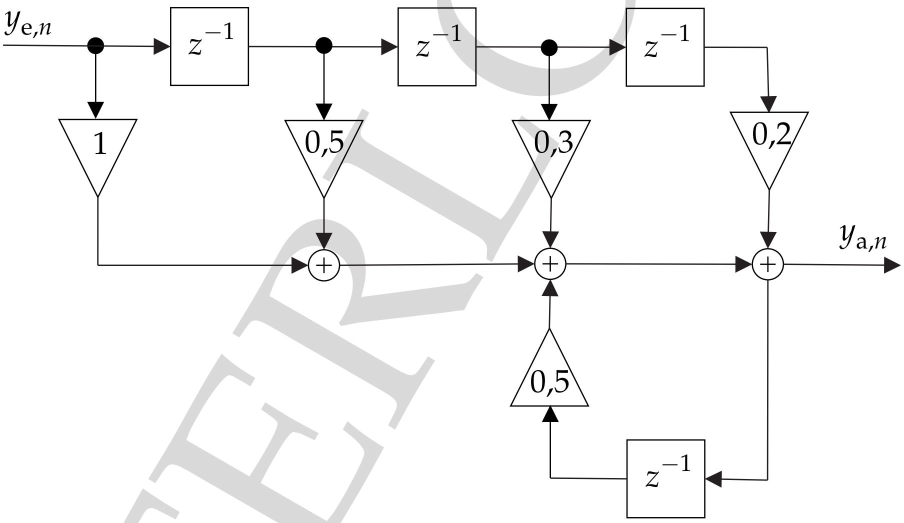


Abbildung 10: Zeitdiskretes Filter.

c) Wie nennt man ein solches Filter? *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie die Differenzengleichung, die das Filter beschreibt. *(1 Punkt)*

e) Wie lautet die Übertragungsfunktion? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorhergehenden lösbar.

Gegeben sei nun im Folgenden die z-Transformierte $G(z)$ mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1}{z^2(z - \frac{1}{2})}.$$

f) Bestimmen Sie die Impulsantwort g_n. *(3 Punkte)*
Hinweis: Verwenden Sie eine Korrespondenztabelle!

Lösung

a) FIR bedeutet *Finite Impulse Response*. Die Impulsantwort ist endlich, das heißt, dass das diskrete, gefilterte Signal eine Länge l mit $l < M,\ M \in \mathbb{N}$ hat. ***(Σ: 1 Punkt)***

b) Die Impulsantwort ist in Abbildung L7 gegeben. ***(Σ: 3 Punkte)***

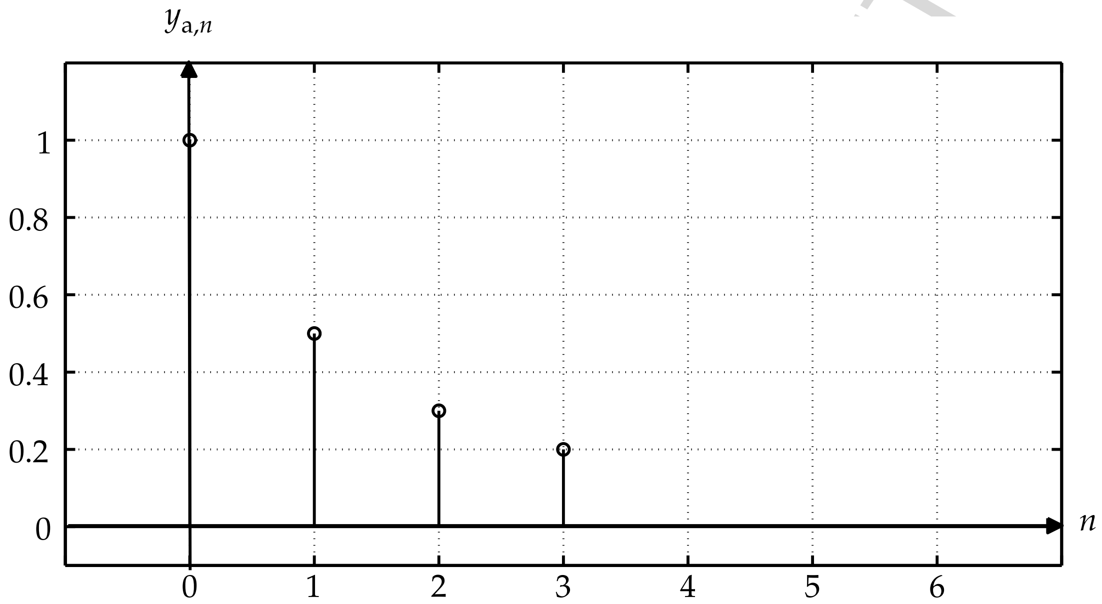


Abbildung L7: Impulsantwort auf FIR-Filter.

c) Man nennt ein solches Filter IIR-FIlter. ***(Σ: 1 Punkt)***

d) Die Differenzengleichung lautet

$$y_{a,n} = 0,5\,y_{a,n-1} + y_{e,n} + 0,5\,y_{e,n-1} + 0,3\,y_{e,n-2} + 0,2\,y_{e,n-3}\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

e) Durch z-Transformation der Differenzengleichung erhält man die Übertragungsfunktion:

$$Y_a(z) - 0,5\,Y_a(z) = Y_e(z) + 0,5\,Y_e(z)z^{-1} + 0,3\,Y_e(z)z^{-2} + 0,2\,Y_e(z)z^{-3}$$

$$G(z) = \frac{Y_a(z)}{Y_e(z)} = \frac{1 + 0,5z^{-1} + 0,3z^{-2} + 0,2z^{-3}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$= \frac{z^3 + 0,5z^2 + 0,3z^1 + 0,2}{z^3 - 0,5z^2}\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

f) Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{1}{z^2(z - \frac{1}{2})} = \frac{A_{11}}{z} + \frac{A_{12}}{z^2} + \frac{B_1}{(z - 0,5)}\,.$$

Es folgt für die Koeffizienten mit der höchsten Ordnung:

$$A_{12} = \lim_{z\to 0} Y(z)(z-0)^2 = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z - 0,5} = -2$$

$$B_1 = \lim_{z\to 0,5} Y(z)(z - 0,5) = \lim_{z\to 0,5} \frac{1}{z^2} = 4\,.$$

Den dritten Koeffizienten erhält man entweder durch Ausmultiplizieren oder Vergleich für eine geschickte Wahl von z. Mit $z = 1$ sowie

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{11} - 2 + 4\frac{1}{0,5} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{0,5} = 2 \\ \mathrm{A}_{11} &= -4 \end{aligned}$$

gilt somit:

$$\begin{aligned} G(z) &= -\frac{4}{z} - \frac{2}{z^2} + 4\frac{1}{z-0,5} \\ &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \\ g_n &= -4\,\delta_{n-1} - 2\,\delta_{n-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz sowie der Rechenregel für Multiplikation im Zeitbereich erhält man als **Alternativlösung**:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{2})} \\ &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \\ g_n &= \delta_{n-2} * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \sigma_{n-3}\,. \end{aligned}$$

Skizzieren beider Folgen zeigt, dass diese identisch sind. Bermerkung: Der Lösungsweg ist zu kennzeichnen. Die bloße Angabe des Ergebnisses ist nicht ausreichend für die volle Punktzahl. ***(Σ: 3 Punkte)***