

Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

**Klausur im Fach
Signale und Systeme
26. März 2015**

Musterlösung

Aufgabe 1: 19

Aufgabe 2: 22

Aufgabe 3: 15

Aufgabe 4: 13

Gesamtpunkte: 69

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale

Durch die Funktionen $\Phi_i(t)$ mit

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \Phi_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$\Phi_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ -\sqrt{2} & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \Phi_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ -\sqrt{2} & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sei ein Funktionensystem gegeben.

- a) Eignet sich das System $\Phi_i(t)$, um Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ zu approximieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben sei außerdem das Signal $p(t)$ aus Abbildung 1.

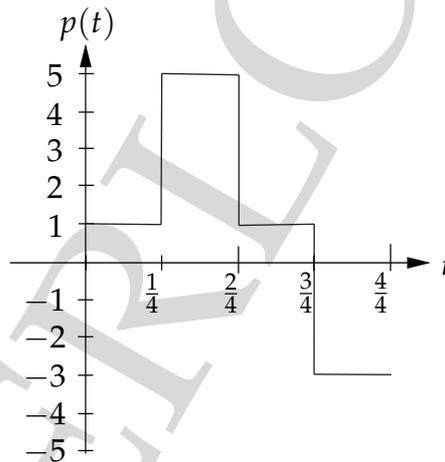


Abbildung 1: Signal $p(t)$.

Sie wollen $p(t)$ nun mit Hilfe des Systems $\Phi_i(t)$ approximieren:

$$\hat{p}(t) = a_1\Phi_1(t) + a_2\Phi_2(t) + a_3\Phi_3(t) + a_4\Phi_4(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i .
- c) Bestimmen Sie das Ergebnis der Faltung $g(t) = p(t) * \Phi_1(t)$ an der Stelle $t = 1$:

$$g(1) = p(t) * \Phi_1(t)|_{t=1}.$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das in Abbildung 2 dargestellte periodische Signal $x(t)$ mit der Periodendauer T_0 , welches Sie mit Hilfe einer endlichen Fourier-Reihe approximieren wollen:

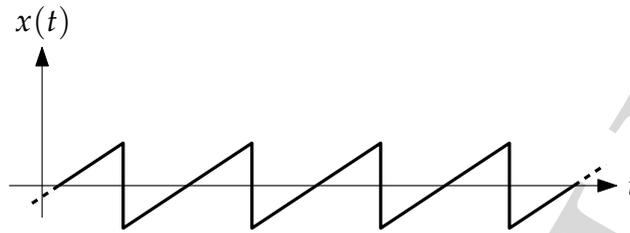


Abbildung 2: Sägezahnsignal $x(t)$.

- d) Kann das Signal nach Berechnung der Fourier-Reihe fehlerfrei rücktransformiert werden? Was lässt sich beobachten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

- e) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{\pi t} \right\} = j \operatorname{sign}(f_0 - f).$$

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das positive, reelle Signal $x(t)$:

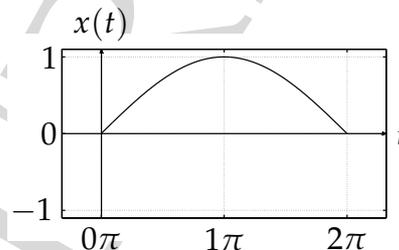


Abbildung 3: Signal $x(t)$.

Außerhalb des Intervalls $[0, 2\pi]$ sei $x(t) = 0$.

- f) Bestimmen Sie $X(f)$.
- g) Geben Sie einen oberen Grenzwert M an, sodass gilt:

$$|X(f)| \leq M, \quad M \in \mathbb{R}^+.$$

Lösung

- a) Orthonormale Funktionensysteme ermöglichen eine Analyse von Funktionen:

$$\langle \Phi_i(t), \Phi_j(t) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Man erkennt sofort, dass die Innenprodukte für $i \neq j$ verschwinden. Anschaulich sind die positiven und negativen Flächen unter dem Integral gleich groß. Daher bilden die Funktionen $\Phi_i(t)$ ein Orthogonalsystem. Rechnung zeigt weiterhin:

$$\langle \Phi_1(t), \Phi_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t) \Phi_1^*(t) dt = \int_0^1 1 dt = 1,$$

$$\langle \Phi_2(t), \Phi_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(t) \Phi_2^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dt = 1,$$

$$\langle \Phi_3(t), \Phi_3(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_3(t) \Phi_3^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 2 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2 dt = 1,$$

$$\langle \Phi_4(t), \Phi_4(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_4(t) \Phi_4^*(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2 dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 2 dt = 1.$$

b) Die Koeffizienten a_i berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}
 a_1 = \langle p(t), \Phi_1(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \Phi_1^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \cdot 1 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 5 \cdot 1 dt \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 1 \cdot 1 dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 -3 \cdot 1 dt = 1, \\
 a_2 = \langle p(t), \Phi_2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \Phi_2^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \cdot 1 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 5 \cdot 1 dt \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 1 \cdot (-1) dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 -3 \cdot (-1) dt = 2, \\
 a_3 = \langle p(t), \Phi_3(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \Phi_3^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \cdot \sqrt{2} dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 5 \cdot (-\sqrt{2}) dt \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 0 dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 0 dt = -\sqrt{2}, \\
 a_4 = \langle p(t), \Phi_4(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \Phi_4^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 0 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 0 dt \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 1 \cdot \sqrt{2} dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 (-3) \cdot (-\sqrt{2}) dt = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$p(t) = \Phi_1(t) + 2\Phi_2(t) - \sqrt{2}\Phi_3(t) + \sqrt{2}\Phi_4(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Für die alleinige Angabe des Ergebnisses werden keine Punkte vergeben.

c) Es gilt:

$$g(t) = p(t) * \Phi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) \Phi_1(t - \tau) d\tau.$$

Somit:

$$g(1) = \int_0^1 p(\tau) \Phi_1(1 - \tau) d\tau = \int_0^1 p(\tau) \Phi_1(\tau) d\tau = a_1 = 1.$$

- d) Nein, das Signal kann nicht fehlerfrei rücktransformiert werden. Da bei endlich vielen Gliedern der Reihe die Darstellung des Signals nur eine Approximation darstellt, geht somit Information verloren.

Das Signal $x(t)$ ist eine stückweise stetige Funktion mit Sprungstellen. Die Sprungstellen führen auch bei unendlich vielen Reihengliedern bei der Rücktransformation zu Überschwingern.

- e) Es gilt:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{\pi t} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-j}{\pi t} e^{j2\pi(f_0 - f)t} dt.$$

Mit der Eigenschaft der Symmetrie der Fourier-Transformation und der Eigenschaft der Modulation der Fourier-Transformation sowie der Korrespondenz

$$\text{sign}(t) \quad \circ \bullet \quad \frac{-j}{\pi f}$$

ergibt sich

$$\text{sign}(-f) \quad \bullet \circ \quad \frac{-j}{\pi t}.$$

Es gilt:

$$\text{sign}(-(f - f_0)) \quad \bullet \circ \quad \frac{-j}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t}.$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{\pi t} \right\} = j \text{sign}(f_0 - f).$$

- f) Es ergibt sich:

$$x(t) = \text{rect}_{2\pi}(t - \pi) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} X(f) &= e^{-j2\pi f \pi} 2\pi \text{si}(\pi f 2\pi) * \frac{j}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{4\pi}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{4\pi}\right) \right) \\ &= \frac{j}{2} e^{-j2\pi^2(f + \frac{1}{4\pi})} 2\pi \text{si}\left(2\pi^2\left(f + \frac{1}{4\pi}\right)\right) - \frac{j}{2} e^{-j2\pi^2(f - \frac{1}{4\pi})} 2\pi \text{si}\left(2\pi^2\left(f - \frac{1}{4\pi}\right)\right) \\ &= \frac{j}{2} (-j) e^{-j2\pi^2 f} 2\pi \text{si}\left(2\pi^2\left(f + \frac{1}{4\pi}\right)\right) - \frac{j}{2} (j) e^{-j2\pi^2 f} 2\pi \text{si}\left(2\pi^2\left(f - \frac{1}{4\pi}\right)\right) \\ &= \pi e^{-j2\pi^2 f} \left[\text{si}\left(2\pi^2\left(f + \frac{1}{4\pi}\right)\right) + \text{si}\left(2\pi^2\left(f - \frac{1}{4\pi}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

- g) Für positive, reelle Signale gilt:

$$|X(f)| \leq X(0).$$

Somit findet man einen Schwellwert durch Berechnung des Spektrums an der Stelle $f = 0$:

$$X(f) = \pi e^{-j2\pi^2 f} \left[\frac{\sin\left(2\pi^2\left(f + \frac{1}{4\pi}\right)\right)}{2\pi^2\left(f + \frac{1}{4\pi}\right)} + \frac{\sin\left(2\pi^2\left(f - \frac{1}{4\pi}\right)\right)}{2\pi^2\left(f - \frac{1}{4\pi}\right)} \right]$$

$$\begin{aligned} X(f=0) &= \pi \left[\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right] \\ &= 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme

Ein System S_1 lässt sich durch additive Überlagerung eines Nutzsignals $y_e(t)$ mit dem Stör-signal $s(t)$ beschreiben:

$$y_{a,1}(t) = y_e(t) + s(t).$$

Hierbei stellt $y_{a,1}(t)$ den Ausgang und $y_e(t)$ den Eingang des Systems S_1 dar. Das Stör-signal $s(t)$ kann als konstant angenommen werden: $s(t) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

- Handelt es sich bei dem System S_1 um ein lineares System? (Begründung)
- Handelt es sich bei dem System S_1 um ein zeitinvariantes System? (Begründung)

Durch Überlagerung mit einem weiteren Stör-signal $w(t)$, welches durch

$$w(t) = \int_{t-T}^{t+T} \cos(y_e(\tau + \tau_0)) \, d\tau, \quad T > 0, \quad (1)$$

gegeben ist, sei ein neues System S_2 gegeben:

$$y_{a,2}(t) = y_e(t) + s(t) + w(t).$$

Hierbei bezeichnet $y_{a,2}(t)$ nun den Ausgang des neuen Systems S_2 .

- Ist das System S_2 zeitinvariant? (Begründung)
- Ist das System S_2 kausal? (Begründung)

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei die folgende Anordnung, in der $y_e(t) = u(t)$ das Eingangs- und $y_a(t) = u_L(t)$ das Ausgangssignal des Systems S darstellen.

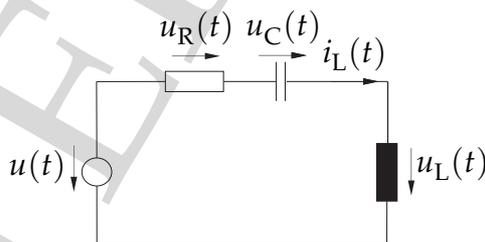


Abbildung 4: System S .

- Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des Systems S an, wobei die Zustandsgrößen zu $z_1(t) = i_L(t)$ und $z_2(t) = u_C(t)$ zu wählen sind.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems und berechnen Sie die das System charakterisierende Differentialgleichung. Das System habe zu Beginn verschwindende Anfangswerte.

Hinweis: Es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- g) Für welche Werte der Parameter $R, L, C > 0$ ist das System stabil? Für welche Werte der Parameter $R, L, C > 0$ ist das System instabil?
- h) Stellen Sie das System S graphisch in der Struktur eines ARMA-Filters dar.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Ein System S sei durch die Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} y_a^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^n b_{\mu} y_e^{(\mu)}(t) \quad , \quad a_0 \neq 0,$$

beschrieben.

- i) Geben Sie den Grenzwert der **Sprungantwort** $h(t) = S\{\sigma(t)\}$ für $t \rightarrow \infty$ an.

Lösung

- a) Überprüfen auf Linearität:

$$mS\{x(t)\} = m(b(t) + c) \neq mb(t) + c = S\{mx(t)\}.$$

Hierbei bezeichnet $x(t)$ allgemein den Eingang, $y(t)$ allgemein den Ausgang und $S\{\cdot\}$ den Systemoperator und es gilt $m \in \mathbb{R}$. Somit ist S_1 nicht linear.

- b) Für Zeitinvarianz muss gelten:

$$y(t - t_0) = S\{x(t - t_0)\}.$$

Somit:

$$y_{a,1}(t - t_0) = y_e(t - t_0) + c = y_e(t - t_0) + c = S\{x(t - t_0)\}.$$

Damit ist S_1 zeitinvariant.

- c) Da es sich bei S_1 um ein zeitinvariantes System handelt und $w(t)$ additiv überlagert wird, kann man die Terme unabhängig voneinander betrachten und es ist ausreichend, den Term (1) näher zu untersuchen:

$$\begin{aligned} w(t - t_0) &= \int_{t-t_0-T}^{t-t_0+T} \cos(y_e(\tau + \tau_0)) \, d\tau \\ &\stackrel{\tau' = \tau + t_0}{=} \int_{t-T}^{t+T} \cos(y_e(\tau' - t_0 + \tau_0)) \, d\tau'. \end{aligned}$$

Das System S_2 ist zeitinvariant.

- d) Der Term $y_e(t)$ hängt nur vom aktuellen Zeitpunkt ab. Das Störsignal $s(t)$ ist konstant. Bei Betrachtung des Terms $w(t)$

$$w(t) = \int_{t-T}^{t+T} \cos(y_e(\tau + \tau_0)) \, d\tau, \quad T > 0, \quad (\text{L1})$$

fällt auf, dass die obere Integrationsgrenze Werte, die um T in der Zukunft liegen, berücksichtigt. Entscheidend ist das Argument des Eingangssignals im Integrationskern. Um Kausalität sicherzustellen, muss also gelten:

$$\tau + \tau_0 \Big|_{\tau=t+T} \leq t.$$

Daraus folgt, dass durch $\tau_0 \leq -T$ Kausalität sichergestellt ist.

- e) Aus $z_1(t) = i_L(t)$ folgt wegen $u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$:

$$\dot{z}_1(t) = \frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{1}{L} u_L(t).$$

Mit der Maschenregel, $u(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$, ergibt sich schließlich:

$$\dot{z}_1(t) = -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}u(t) = -\frac{R}{L}z_1(t) - \frac{1}{L}z_2(t) + \frac{1}{L}y_e(t).$$

Die zweite Zustandsgleichung ergibt sich zu

$$\dot{z}_2(t) = \dot{u}_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t) = \frac{1}{C}z_1(t).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die Ausgangsgleichung:

$$y_a(t) = u_L(t) = -u_C(t) - u_R(t) + u(t) = -Rz_1(t) - z_2(t) + y_e(t).$$

Somit lautet die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} y_e(t)$$
$$y_a(t) = (-R - 1) \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + (1) y_e(t).$$

f) Durch Laplace-Transformation folgt aus der Zustandsraumdarstellung:

$$s\mathbf{Z}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(s) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} y_e(s)$$
$$y_a(s) = (-R - 1)\mathbf{Z}(s) + y_e(s).$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt:

$$y_a(s) = \left[(-R - 1) \left(s\mathbf{I} - \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \right] y_e(s).$$

Vereinfachen:

$$G(s) = (-R - 1) \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} + 1$$
$$= \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Dies entspricht der Differentialgleichung

$$\ddot{y}_a(t) + \frac{R}{L}\dot{y}_a(t) + \frac{1}{LC}y_a(t) = \ddot{y}_e(t).$$

g) Die Übertragungsfunktion hat die Polstellen

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}.$$

Stabilität des Systems liegt vor, falls alle Polstellen in der linken Halbebene liegen.
Fallunterscheidung:

(a) $R^2C > 4L$: In diesem Fall ist

$$\operatorname{Re}\{s_{\infty 1,2}\} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C - 4L}}{2L\sqrt{C}}.$$

Stabilität liegt also in diesem Fall genau dann vor, wenn

$$-R\sqrt{C} + \sqrt{R^2C - 4L} < 0 \iff \sqrt{R^2C - 4L} < R\sqrt{C}$$

Dies ist der Fall für $R^2C - 4L < R^2C$, also $-4L < 0$ also immer, falls $R^2C > 4L$.

(b) $R^2C \leq 4L$: Hier gilt $\operatorname{Re}\{s_{\infty 1,2}\} = -\frac{R}{2L} < 0$. Somit liegt hier wegen $R > 0$ und $L > 0$ Stabilität vor!

Das System ist also immer stabil.

h) Darstellung in ARMA-Form:

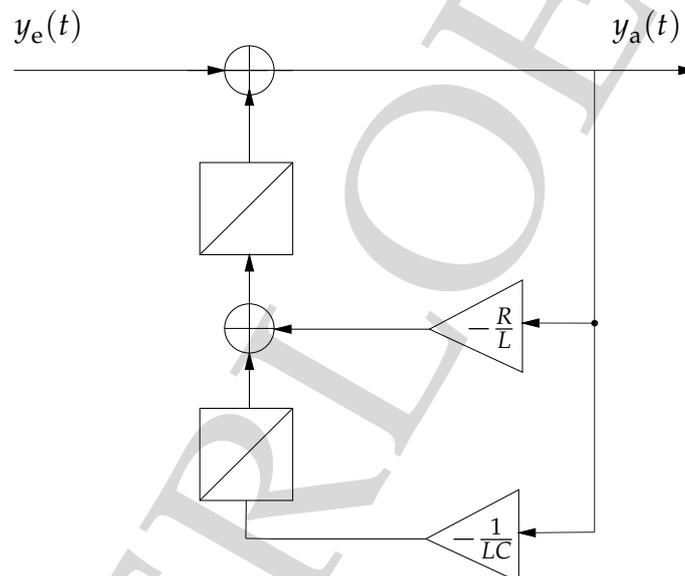


Abbildung L1: Struktur des Systems S.

i) Man erhält die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^n b_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} s^{\nu}}.$$

Die Laplace-Transformierte der Sprungantwort ist $H(s) = G(s)/s$, woraus mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \frac{b_0}{a_0}.$$

Der Grenzwert existiert, da nach Voraussetzung $a_0 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale

Sie wollen die unbekannte Schwingfrequenz eines Signals ermitteln von dem Sie wissen, dass es aus einer einzelnen harmonischen Schwingung besteht.

Nach der Abastung mit einem Analog-Digital-Umsetzer stehen Ihnen die in Tabelle 1 gezeigten Messdaten zur Verfügung, wobei die Abtastpunkte t_n in der Einheit Sekunden angegeben sind.

Tabelle 1: Aufgenommene Messwerte $y_{1,n}$.

| | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------|-------|----------------------|-----|-----------------------|-------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| t_n | 0 | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,5 | 0,625 | 0,750 |
| $y_{1,n}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 |

Nach dem Bilden der DFT des Signals $y_{1,n}$ erhalten Sie das in Abbildung 5 gezeigte Betragsspektrum $|Y_{1,k}|$.

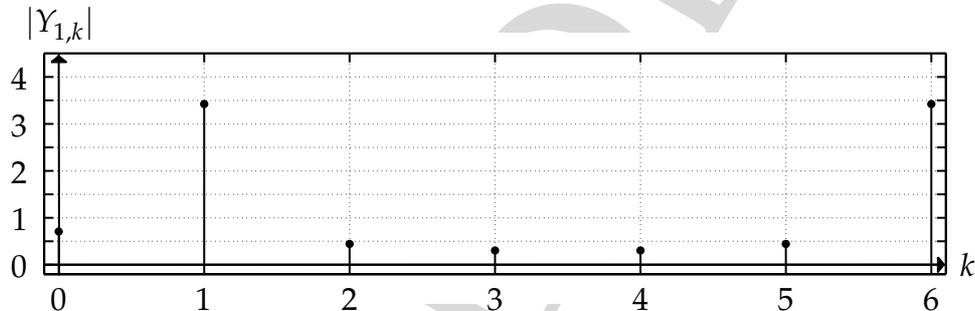


Abbildung 5: Betragsspektrum $|Y_{1,k}|$.

- a) Welches Phänomen lässt sich in Abbildung 5 beobachten?

Sie wollen nun aus den vorhandenen Daten die Schwingfrequenz $f_{0,1}$ des Signals $y_{1,n}$ bestimmen.

- b) Welche Schwingfrequenz $f_{0,1}$ ergibt sich aus Abbildung 5, wenn Sie für die Berechnung die betragsmäßig dominanten Spektrallinien heranziehen?

Sie führen nun eine weitere Messung durch und wollen das Betragsspektrum erneut bestimmen. Hierzu stehen Ihnen die in Tabelle 2 gezeigten Messdaten sowie einige bereits berechnete Spektralwerte zur Verfügung.

Tabelle 2: Neue Messwerte $y_{2,n}$.

| | | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------|-------|----------------------|-----|-----------------------|-------|-----------------------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| t_n | 0 | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,5 | 0,625 | 0,750 | 0,875 |
| $y_{2,n}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $Y_{2,k}$ | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 4j |

- c) Vervollständigen Sie Tabelle 2 mit den Spektralwerten $Y_{2,k}$ für $k = \{0, 1, 2\}$, indem Sie die fehlenden Punkte der 8-Punkte-Spektralfolge berechnen.
- d) Welche Schwingfrequenz $f_{0,2}$ ergibt sich aus den Messdaten aus Tabelle 2? Wie groß ist der in Aufgabenteil **b)** gemachte Fehler Δf_0 bei der Bestimmung der Schwingfrequenz?
- e) Stellen Sie eine Bedingung für eine fehlerfreie Bestimmung der Schwingfrequenz in Abhängigkeit von N , f_A und f_0 auf. Unterscheiden Sie die beiden Fälle, die sich aus Tabelle 1 und Tabelle 2 ergeben. Welcher Zusammenhang zum Frequenzfehler lässt sich herstellen?
- f) Wie lässt sich die Genauigkeit bei der Bestimmung der Schwingfrequenz unter Verwendung der in Aufgabenteil **b)** ermittelten Messdaten verbessern, ohne eine neue Messung durchzuführen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- g) Wie lautet die kleinste ganzzahlige Abtastfrequenz $f_{A,\min}$ mit $f_{A,\min} / [f_{A,\min}] \in \mathbb{N}$, die es ermöglicht, das Signal aus Aufgabenteil **b)** nach Abtastung wieder fehlerfrei rekonstruieren zu können?

Lösung

- a) Der Leckeffekt ist deutlich zu erkennen.
- b) Der erste in Abbildung 5 auftretende Peak liegt bei $k' = 1$. Mit $t_A = 0,125$ und $N = 7$ (siehe Tabelle 1) ergibt sich für $f_{0,1}$:

$$f_{0,1} = k' \cdot \Delta f = 1 \cdot \frac{1}{t_A \cdot N} = \frac{8}{7} \text{ Hz.}$$

- c) Generell gilt:

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi \frac{n}{N} k}.$$

Es handelt sich nun um eine 8-Punkte-DFT. Rechnung für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ ergibt für $Y_{2,k}$:

$$\begin{aligned} Y_{2,0} &= \sum_{n=0}^7 y_{2,n} e^{-j2\pi \frac{n}{8} 0} \\ &= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ Y_{2,1} &= \sum_{n=0}^7 y_{2,n} e^{-j2\pi \frac{n}{8} 1} \\ &= 0 \cdot e^{-j2\pi \frac{0}{8} 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j2\pi \frac{1}{8} 1} + 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{2}{8} 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j2\pi \frac{3}{8} 1} \\ &\quad + 0 \cdot e^{-j2\pi \frac{4}{8} 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j2\pi \frac{5}{8} 1} - 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{6}{8} 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j2\pi \frac{7}{8} 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{1}{4}} + e^{-j\pi \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{3}{4}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{1}{4}} \cdot e^{-j\pi} - e^{-j\pi \frac{1}{2}} \cdot e^{-j\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{3}{4}} \cdot e^{-j\pi} \\ &= 2e^{-j\pi \frac{1}{2}} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{-j\pi \frac{1}{4}} - e^{j\pi \frac{1}{4}}) = -2j - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} 2j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4j, \\ Y_{2,2} &= \sum_{n=0}^7 y_{2,n} e^{-j2\pi \frac{n}{8} 2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{1}{2}} + e^{-j\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{1}{2}} \cdot e^{-j\pi} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{1}{2}} \cdot e^{-j2\pi} - e^{-j3\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\pi \frac{1}{2}} \cdot e^{-j3\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alternativ lassen sich die Punkte $Y_{2,1}$ und $Y_{2,2}$ auch direkt durch Überlegen aus Tabelle 2 ableiten (Die Fourier-Transformierte eines reellen Signals hat einen symmetrischen Betrag und eine schiefsymmetrische Phase).

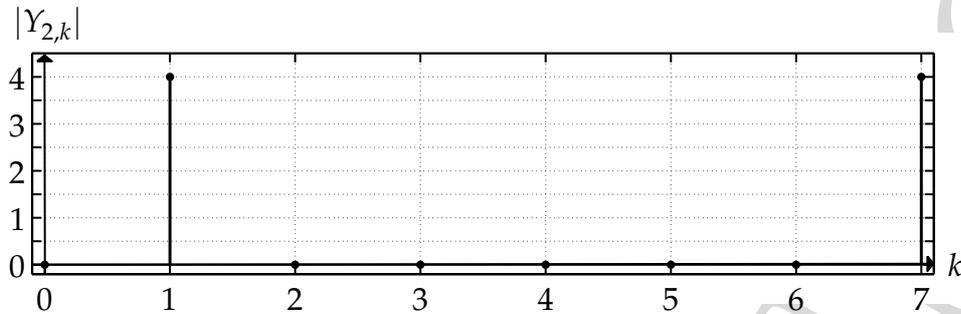


Abbildung L2: Betragsspektrum $|Y_{2,k}|$.

(Skizze nicht verlangt.)

- d) Aus Aufgabenteil c) ist $f_{0,2} = 1$ Hz ersichtlich. Für den Fehler Δf_0 ergibt sich:

$$\Delta f_0 = f_{0,1} - f_{0,2} = \frac{1}{7} \text{ Hz.}$$

- e) Für eine fehlerfreie Bestimmung der Schwingfrequenz darf kein Leckeffekt auftreten. Dies ist der Fall, falls das Verhältnis von Schwingfrequenz zu Frequenzauflösung ganzzahlig ist:

$$\frac{f_0}{\Delta f} = f_0 t_A N = l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Für die 8-Punkte-DFT ergibt sich:

$$\frac{f_0}{\Delta f_2} = f_0 t_A 8 = \frac{8}{8} = 1.$$

Für die 7-Punkte-DFT ergibt sich kein ganzzahliges Vielfaches:

$$\frac{f_0}{\Delta f_1} = f_0 t_A 7 = \frac{7}{8} = l + a, \quad -0,5 < a \leq 0,5.$$

Mit $l = 1$ und $|a| = \frac{1}{8}$ erhält man für den Frequenzfehler Δf_0 :

$$\Delta f_0 = |a| \cdot \Delta f_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{7}.$$

Dies deckt sich mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil d).

- f) Mit Hilfe von Zeropadding lässt sich die Wertefolge künstlich verlängern, ohne dass neue Abtastwerte gemessen werden müssen. Hierdurch erhält man eine feinere Frequenzauflösung. Dadurch lässt sich die Lage lokaler Maxima genauer bestimmen.
- g) Mit einer Schwingfrequenz von $f_0 = 1$ Hz ergibt sich mit dem Abtasttheorem und $f_A \in \mathbb{N}$:

$$f_A > 2 f_0 \quad \Rightarrow \quad f_{A,\min} = 3 \text{ Hz.}$$

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme

Gegeben sei die folgende z-Transformierte $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z}{2} \frac{2z + 9}{z^2 + \frac{9}{2}z + 2}.$$

- Berechnen Sie die zu $Y(z)$ gehörenden Zeitfolgen.
- Skizzieren Sie die zu den in Aufgabenteil a) berechneten Zeitfolgen gehörenden Konvergenzgebiete.

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei ein kontinuierliches System S , welches durch das Pol-Nullstellen-Diagramm in Abbildung 6 beschrieben ist. Hier werden Polstellen des Systems durch Kreuze und Nullstellen des Systems als Kreise dargestellt.

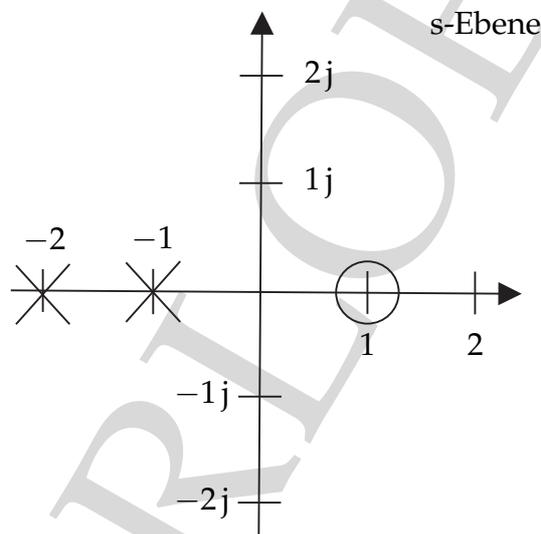


Abbildung 6: Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems S .

Sie wollen nun ein zeitdiskretes Filter mit dem Übertragungsverhalten des Systems S entwerfen, welches Signale bis zu einer maximalen Frequenz $f_{\max} < f_g$ mit $f_g = 1$ Hz verarbeiten kann, ohne dass bei der Rekonstruktion in den kontinuierlichen Bereich ein Informationsverlust auftritt. Außerdem wird statische Genauigkeit von dem Filter verlangt.

- Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des gesuchten zeitdiskreten Filters an.
Hinweis: Verwenden Sie folgende Näherungen:

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6, \quad e^{\frac{1}{2}} \approx 1,6.$$

Lösung

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{2} \frac{(2z+9)}{z^2 + \frac{9}{2}z + 2} = \frac{z}{2} \frac{(2z+9)}{(z+4)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{z}{2} \left[\frac{A}{z+4} + \frac{B}{z+\frac{1}{2}} \right] = \frac{z}{2} \left[-\frac{2}{7} \frac{1}{z+4} + \frac{16}{7} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right] = z \left[-\frac{1}{7} \frac{1}{z+4} + \frac{8}{7} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Kausale Lösung ($|z| > 4$):

$$\begin{aligned} Y(z) &= z \left[-\frac{1}{7} \frac{1}{z+4} + \frac{8}{7} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right] = -\frac{1}{7} \frac{1}{1+\frac{4}{z}} + \frac{8}{7} \frac{1}{1+\frac{1}{2z}} \\ &= -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n z^{-n} + \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \quad \bullet \circ \quad \left(-\frac{1}{7}(-4)^n + \frac{8}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \sigma_n. \end{aligned}$$

Akausale Lösung ($\frac{1}{2} < |z| < 4$):

$$\begin{aligned} Y(z) &= z \left[-\frac{1}{7} \frac{1}{z+4} + \frac{8}{7} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right] = -\frac{z}{4} \frac{1}{1+\frac{z}{4}} + \frac{8}{7} \frac{1}{1+\frac{1}{2z}} \\ &= -\frac{z}{4} \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n z^n + \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \\ &= -\frac{z}{4} \frac{1}{7} \sum_{n=-\infty}^0 \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n} z^{-n} + \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{7} \sum_{n=-\infty}^0 \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n+1} z^{-n+1} + \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{7} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n} z^{-n} + \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \end{aligned}$$

$$y_n = \frac{1}{7} (-4)^n \sigma_{-n-1} + \frac{8}{7} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sigma_n.$$

Antikausale Lösung ($|z| < \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= z \left[-\frac{1}{7} \frac{1}{z+4} + \frac{8}{7} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right] = -\frac{z}{4} \frac{1}{7} \frac{1}{1+\frac{z}{4}} + 2z \frac{8}{7} \frac{1}{2z+1} \\
 &= -\frac{z}{4} \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n z^n - (-2)z \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^n \\
 &= \frac{1}{7} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} z^{-n} - \frac{8}{7} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-2)^{-n} z^{-n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\bullet \\
 &\circ \\
 y_n &= \frac{1}{7} (-4)^n \sigma_{-n-1} - \frac{8}{7} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sigma_{-n-1}.
 \end{aligned}$$

b) Abbildung L3 zeigt die Skizze der Konvergenzgebiete.

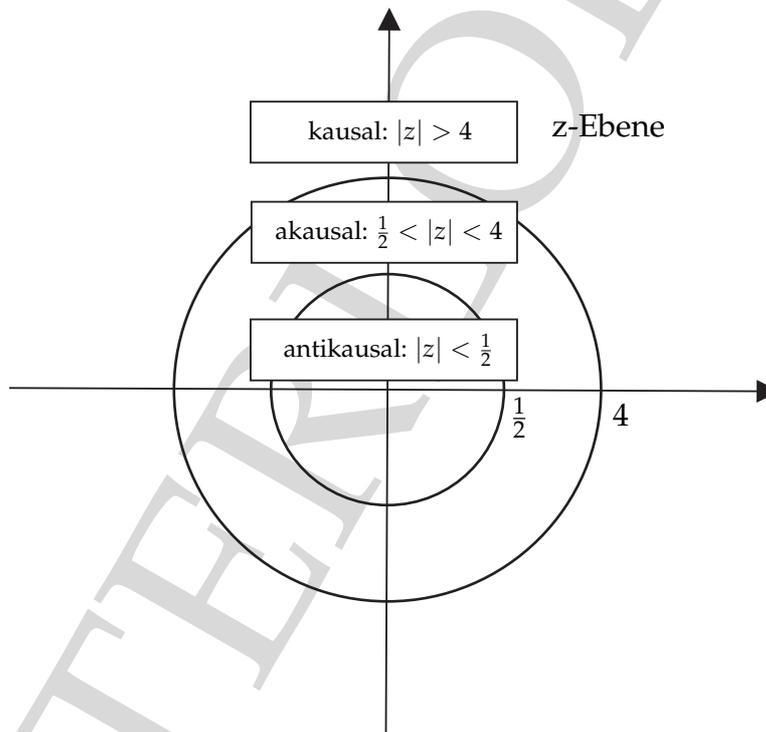


Abbildung L3: Skizze der Konvergenzgebiete.

c) Aus dem Pol-Nullstellen-Diagramm lässt sich die kontinuierliche Übertragungsfunktion schreiben als

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)}.$$

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich eine Abtastfrequenz von

$$f_A > 2f_{\max} \Rightarrow f_A > 2f_g = 2 \cdot 1 \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}.$$

Es ergibt sich für die Abtastzeit $t_A = 0,5$ s. Damit lässt sich durch Pol-Nullstellen-Übertragung $G(z)$ bestimmen. Für die erste Nullstelle bei $s_{0,1} = 1$ ergibt sich:

$$z_{0,1} = e^{s_{0,1} \cdot t_A} = e^{t_A} = 1,6487 \approx 1,6.$$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $s_{0,2} \rightarrow \infty$. Diese wird auf $z_{0,2} = -1$ übertragen.

Die Polstellen liegen bei $s_{\infty,1} = -2$ und $s_{\infty,2} = -1$. Damit ergibt sich:

$$z_{\infty,1} = e^{s_{\infty,1} \cdot t_A} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$z_{\infty,2} = e^{s_{\infty,2} \cdot t_A} = e^{-1 \cdot 0,5} = 0,6065 \approx 0,6.$$

Somit ergibt sich mit den Näherungen für $G(z)$:

$$G(z) = K \cdot \frac{(z - 1,6)(z + 1)}{\left(z - \frac{1}{e}\right)(z - 0,6)}.$$

Der Faktor K wird nun mit der Bedingung für statische Genauigkeit bestimmt:

$$G(s = 0) \stackrel{!}{=} G(z = 1).$$

Also:

$$G(s = 0) = -\frac{1}{2} \stackrel{!}{=} G(z = 1) = K \cdot \frac{-0,6 \cdot 2}{\left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot 0,4}.$$

Somit ist

$$K = \frac{\left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot 0,4}{-0,6 \cdot 4} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

und es ergibt sich für das diskrete Filter:

$$G(z) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{(z - 1,6)(z + 1)}{\left(z - \frac{1}{e}\right)(z - 0,6)}.$$

Ohne Näherungen ergibt sich:

$$G(z) = -\frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \left(z - e^{\frac{1}{2}}\right) \left(z + e^0\right)}{\left(1 - e^{\frac{1}{2}}\right) \left(1 + e^0\right) \left(z - \frac{1}{e}\right) \left(z - e^{-\frac{1}{2}}\right)}.$$