**Institut für**
**Industrielle Informationstechnik**
**Karlsruher Institut für Technologie**
**Prof. Dr.-Ing. F. Puente León**

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

# Klausur im Fach
# Signale und Systeme
# 22. März 2016

# Musterlösung

Aufgabe 1: 14
Aufgabe 2: 18
Aufgabe 3: 19
Aufgabe 4: 20

Gesamtpunkte: 71

## Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (14 Punkte)

Gegeben seien das Signal $f_1(t)$, welches aus einem rechteckförmigen Signalanteil und einem Dirac-Impuls besteht

$$f_1(t) = 2\, r_1\left(t - \frac{1}{2}\right) + \delta(t-2)$$

sowie das dreieckförmige Signal $f_2(t)$ aus Abbildung 1.

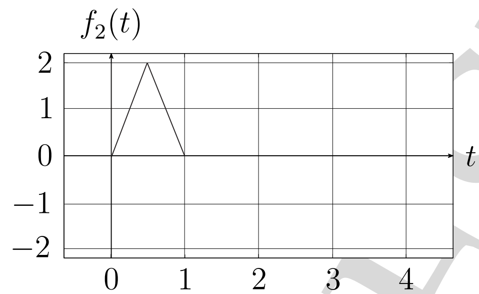


Abbildung 1: Funktion $f_2(t)$.

**a)** Bestimmen Sie **graphisch** die Faltung $f_1(t) * f_2(t)$ im Zeitbereich. *(4 Punkte)*

**Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.**
Gegeben seien die Funktion $g(t)$ und die reelle und gerade Funktion $x(t)$ mit

$$g(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_1 t} \ .$$

**b)** Zeigen Sie durch Rechnung im Frequenzbereich, dass gilt

$$g(t) \cdot x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(X(f-(f_0-f_1)) + X(f-(-f_0-f_1))\right) ,$$

indem Sie die Definition des Dirac-Impulses verwenden. *(4 Punkte)*

**Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.**
Gegeben ist die Funktion $y(t) = |\sin(t)|\ , t \in \mathbb{R}$.

**c)** Welche Symmetrieverhältnisse liegen vor und was bedeutet dies für die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe? *(1 Punkt)*

**d)** Berechnen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe in geschlossener Form. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *(5 Punkte)*
**Hinweis:**

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right) .$$

## Lösung

**a)** Die Lösung ist in Abbildung L1 zu sehen. *($\Sigma$: **4 Punkte**)*

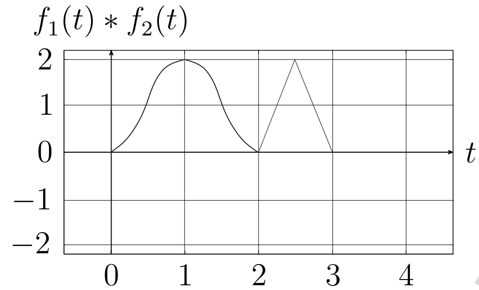


Abbildung L1: Faltung $f_1(t) * f_2(t)$.

**b)** Es gilt für die Fourier-Transformierte von $g(t)$

$$g(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_1 t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0 - f_1) + \delta(f - f_0 - f_1)\right)$$

und somit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g(t) \cdot x(t)\} &= \frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0 - f_1) + \delta(f - f_0 - f_1)\right) * X(f) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + f_0 - f_1 - \tau) X(\tau)\ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0 - f_1 - \tau) X(\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.
\end{aligned}$$

Mit der Definition des Dirac-Impulses

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t - t_0)\ \mathrm{d}t$$

und durch Ausnutzen der Achsensymmetrie des Dirac-Impulses ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g(t) \cdot f(t)\} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - (f + f_0 - f_1)) X(\tau)\ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - (f - f_1 - f_0)) X(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2} X(f - (f_1 - f_0)) + \frac{1}{2} X(f - (f_1 + f_0)) \\
&\neq \frac{1}{2}\left(X(f - (f_0 - f_1)) + X(f - (-f_0 - f_1))\right)\,.
\end{aligned}$$

*($\Sigma$: **4 Punkte**)*

**c)** Der Ansatz der Fourier-Reihe lautet:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi t k / T_0},$$

wobei $T_0$ die Periodendauer des Signals bezeichnet. Man erkennt $T_0 = \pi$. Wegen

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, 2\pi t k/T_0} \, \mathrm{d}t$$

und da $y(t)$ eine gerade Funktion ist, sind die Fourier-Koeffizienten rein reell und gerade. ***($\Sigma$: 1 Punkt)***

**d)** Die Koeffizienten berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(t)| \cos(2\pi t k/\pi) \, \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} |\sin(t)| \cos(2tk) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin(t) \cos(2tk) \, \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \left(\sin(t - 2kt) + \sin(t + 2kt)\right) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\cos(t(1-2k))}{1-2k} + \frac{-\cos(t(1+2k))}{1+2k} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\cos(\frac{\pi}{2}(1-2k)) + 1}{1-2k} + \frac{-\cos(\frac{\pi}{2}(1+2k)) + 1}{1+2k} \right] \\
&= \frac{4}{\pi(1-4k^2)}.
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Cosinusfunktion an ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ $(\ldots, 1\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2}, \ldots)$ ausgewertet wird. An diesen Stellen ergibt die Cosinusfunktion den Wert null. ***($\Sigma$: 5 Punkte)***

## Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (18 Punkte)

**a)** Wie lauten die beiden Bedingungen, die ein System erfüllen muss, damit es sich um ein lineares System handelt? *(1 Punkt)*

Im Folgenden sei mit $y_\mathrm{a}(t)$ das Ausgangssignal und $y_\mathrm{e}(t)$ das Eingangssignal bezeichnet. Gegeben sei ein System $\mathcal{S}_1$ durch die Gleichung

$$y_\mathrm{a}(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_\mathrm{e}(t)\, y_\mathrm{e}(t-T)\ \mathrm{d}t\,, \quad T > 0\,.$$

**b)** Handelt es sich beim System $\mathcal{S}_1$ um ein lineares System? (Rechnung!) *(2 Punkte)*

Gegeben sei ein System $\mathcal{S}_2$ durch die Gleichung

$$y_\mathrm{a}(t-3) + y_\mathrm{a}(t-2) + y_\mathrm{a}(t-1) = y_\mathrm{e}(t)\,.$$

**c)** Handelt es sich beim System $\mathcal{S}_2$ um ein kausales System? (Begründung!) *(2 Punkte)*

**Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.**

Die **Sprung**antwort eines linearen zeitinvarianten Systems wurde zu

$$h(t) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{3t}{T}}\right)\sigma(t)$$

mit einem Zeitparameter $T > 0$ bestimmt.

**d)** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. *(2 Punkte)*

**e)** Berechnen Sie die Pole und die Nullstellen der Übertragungsfunktion und skizzieren Sie diese. *(2 Punkte)*

**f)** Für welche Werte des Zeitparameters $T$ ist dieses System stabil? *(1 Punkt)*

**g)** Zeichnen Sie den Signalflussplan für dieses System. Stellen Sie das System zunächst als Integralgleichung dar. **Hinweis:** Keine exakte mathematische Notation erforderlich! *(4 Punkte)*

**Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.**

**h)** Berechnen Sie die kausale Laplace-Rücktransformierte von

$$X(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 - 5s^2 + 8s - 4}$$

durch Anwendung des Residuensatzes. *(4 Punkte)*

## Lösung

**a)** Homogenität und Additivität müssen erfüllt sein. ***(Σ: 1 Punkt)***

**b)** Es muss gelten:

$$\mathcal{S}_1\{m\, y_{\mathrm{e},1}(t) + n\, y_{\mathrm{e},2}(t)\} = m\mathcal{S}_1\{y_{\mathrm{e},1}(t)\} + n\mathcal{S}_1\{y_{\mathrm{e},2}(t)\}\,.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1\{m\, y_{\mathrm{e},1}(t) + n\, y_{\mathrm{e},2}(t)\} &= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \big(m\, y_{\mathrm{e},1}(t) + n\, y_{\mathrm{e},2}(t)\big)\big(m\, y_{\mathrm{e},1}(t-T)\, n\, y_{\mathrm{e},2}(t-T)\big)\ \mathrm{d}t \\
&= m^2 \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(y_{\mathrm{e},1}(t)\, y_{\mathrm{e},1}(t-T)\big)\ \mathrm{d}t + n^2 \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(y_{\mathrm{e},2}(t)\, y_{\mathrm{e},2}(t-T)\big)\ \mathrm{d}t \\
&+ n\, m \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(y_{\mathrm{e},1}(t)\, y_{\mathrm{e},2}(t-T)\big)\ \mathrm{d}t + n\, m \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(y_{\mathrm{e},2}(t)\, y_{\mathrm{e},1}(t-T)\big)\ \mathrm{d}t \\
&\neq m\mathcal{S}_1\{y_{\mathrm{e},1}(t)\} + n\mathcal{S}_1\{y_{\mathrm{e},2}(t)\}\,.
\end{aligned}$$

***(Σ: 2 Punkte)***

**c)** Der Ausgang des Systems $\mathcal{S}_2$ darf nur von gegenwärtigen und vergangenen Werten des Eingangssignals abhängen, damit es sich um ein kausales System handelt. Mit der Substitution $t' = t - 3$ ergibt sich

$$y_\mathrm{a}(t') + y_\mathrm{a}(t'+1) + y_\mathrm{a}(t'+2) = y_\mathrm{e}(t'+3)$$

und es ist offensichtlich, dass das Ausgangssignal von zukünftigen Werten des Eingangssignals abhängt. Es handelt sich bei $\mathcal{S}_2$ also nicht um ein kausales System. ***(Σ: 2 Punkte)***

**d)** Es ist

$$G(s) = \frac{H(s)}{\frac{1}{s}} = s\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2T}} - \frac{1}{s+\frac{3}{T}}\right) = \frac{5}{2T}\frac{s}{\left(s+\frac{3}{T}\right)\left(s+\frac{1}{2T}\right)}.$$

***(Σ: 2 Punkte)***

**e)** Die Übertragungsfunktion hat eine Nullstelle bei $s_0 = 0$ und Pole bei $s_{\infty,1} = -\frac{3}{T}$, $s_{\infty,2} = -\frac{1}{2T}$. Das Pol-Nullstellendiagramm ist in Abbildung L2 zu sehen. ***(Σ: 2 Punkte)***

**f)** Das System ist stets stabil, da die Konstante $T$ nach Voraussetzung positiv ist und damit die Pole immer links der imaginären Achse liegen. ***(Σ: 1 Punkt)***

**g)** Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{\frac{5s}{2T}}{s^2 + \frac{7}{2T}s + \frac{3}{2T^2}} = \frac{Y_\mathrm{a}(s)}{Y_\mathrm{e}(s)}\,.$$

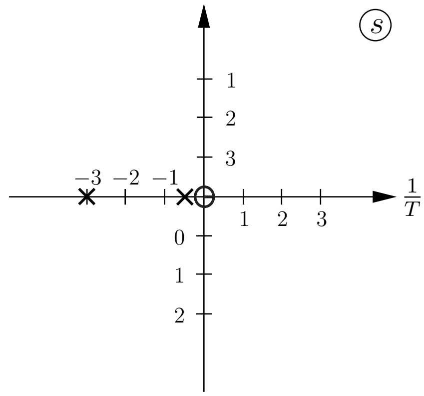


Abbildung L2: Pol-Nullstellendiagramm.

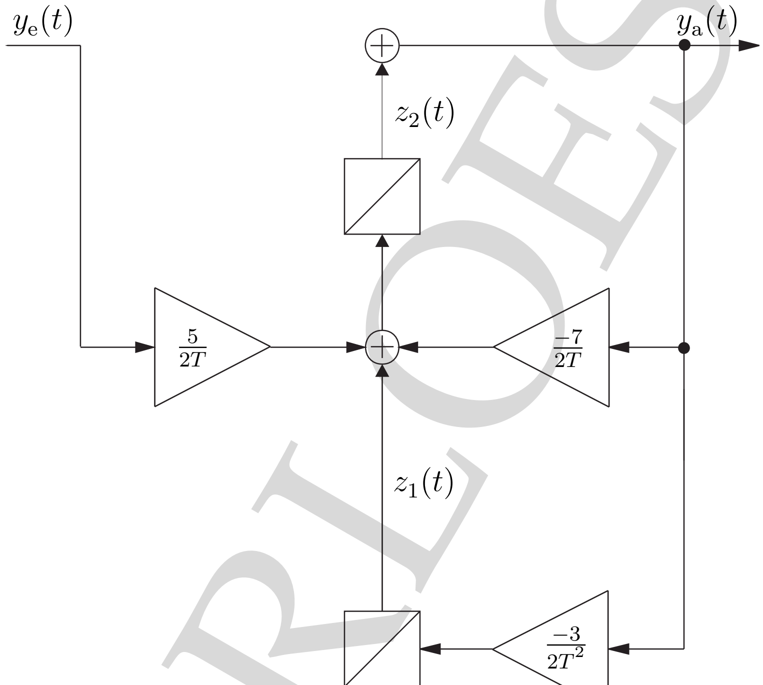


Abbildung L3: Signalflussplan des Systems.

Ohne Beachtung mathematisch exakter Notation ergibt sich somit:

$$\frac{5s}{2T} Y_\mathrm{e}(s) = \left( s^2 + \frac{7}{2T} s + \frac{3}{2T^2} \right) Y_\mathrm{a}(s)$$

$$\frac{5}{2T} \dot{y}_\mathrm{e}(t) = \ddot{y}_\mathrm{a}(t) + \frac{7}{2T} \dot{y}_\mathrm{a}(t) + \frac{3}{2T^2} y_\mathrm{a}(t)$$

$$\frac{5}{2T} \int y_\mathrm{e}(t) = y_\mathrm{a}(t) + \frac{7}{2T} \int y_\mathrm{a}(t) + \frac{3}{2T^2} \int \int y_\mathrm{a}(t) \, .$$

Der Signalflussplan findet sich in Abbildung L3. ***($\Sigma$: 4 Punkte)***

**h)** Die Rücktransformation mit dem Residuensatz lautet:

$$x(t) = \sum_k \mathrm{Res}\{X(s)\,\mathrm{e}^{st}, s_{\infty\,k}\} \, .$$

Die Pole von $X(s)$ liegen bei $s_{\infty\,1} = 1$ und $s_{\infty\,2,3} = 2$ (doppelt). Die Residuen berechnen sich für einen Pol $n$-ter Ordnung zu

$$\operatorname{Res}\{f(s), s_\infty\} = \lim_{s \to s_\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}} \left[(s - s_\infty)^n f(s)\right].$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\{X(s)\,\mathrm{e}^{st}, 2\} &= \lim_{s \to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[(s-2)^2 \frac{s^2 - s + 1}{(s-1)(s-2)^2}\ \mathrm{e}^{st}\right] \\
&= \lim_{s \to 2} \frac{(2s-1)(s-1) - (s^2 - s + 1)}{(s-1)^2}\ \mathrm{e}^{st} + t\,\mathrm{e}^{st}\ \frac{s^2 - s + 1}{s - 1} \\
&= 0\,\mathrm{e}^{2t} + 3t\,\mathrm{e}^{2t}\ . \\
\operatorname{Res}\{X(s)\,\mathrm{e}^{st}, 1\} &= \mathrm{e}^{t}\ .
\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$x(t) = \left(\mathrm{e}^{t} + 3t\,\mathrm{e}^{2t}\right)\sigma(t)\,.$$

***(Σ: 4 Punkte)***

## Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (19 Punkte)

Das kontinuierliche Zeitsignal

$$y(t) = a\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}\,, \qquad a > 0,$$

wird mit der Abtastfrequenz

$$f_\mathrm{A} = 1/t_\mathrm{A}\,, \qquad \frac{f_0}{2} < f_\mathrm{A} < f_0\,,$$

abgetastet und dann mit einem idealen Tiefpass, der mit dem Faktor $\frac{1}{f_\mathrm{A}}$ skaliert wird, wieder rekonstruiert. Dabei werden im Folgenden zwei Fälle für die Rekonstruktion untersucht:

1. Die Grenzfrequenz des Tiefpasses liegt bei $f_\mathrm{TP1} = f_0/2$.
2. Die Grenzfrequenz des Tiefpasses liegt bei $f_\mathrm{TP2} = f_\mathrm{A} - f_0/2$.

**a)** Skizzieren Sie die Fourier-Transformierte $Y(f)$ des kontinuierlichen Signals $y(t)$ sowie die Fourier-Transformierte $Y_*(f)$ des abgetasteten Signals

$$y_*(t) = y(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kt_\mathrm{A})\,.$$

*(4 Punkte)*

**b)** Auf welcher Breite $u$ überlappen sich jeweils zwei Teilspektren? *(1 Punkt)*

**c)** Skizzieren Sie die Fourier-Spektren $Y_1(f)$ und $Y_2(f)$ der beiden durch die Tiefpässe TP1 und TP2 rekonstruierten Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$. *(2 Punkte)*

**d)** Berechnen Sie $y_1(t)$ und $y_2(t)$. *(4 Punkte)*

**e)** Berechnen Sie die absoluten Fehler

$$|e_1(t)| = |y_1(t) - y(t)| \qquad \text{sowie} \qquad |e_2(t)| = |y_2(t) - y(t)|.$$

Wie groß sind diese Fehler zum Zeitpunkt $t = 0$ ? *(3 Punkte)*

**Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.**

Gegegen sei ein Signal $x_n$ mit $n = 1, \ldots, N$, welches durch Abtastung des kontinuierlichen Signals $x(t)$ mit $t_\mathrm{A} = 1\,\mathrm{ms}$ gewonnen wurde. Im Folgenden wollen Sie in Ihrer Signalverarbeitungskette stets die schnelle Fourier-Transformation anwenden, um Zeitsignale in den Spektralbereich zu überführen. Die Anzahl der Abtastwerte sei zunächst $N = 64$.

**f)** Wie lautet der größtmögliche Frequenzfehler, der bei der Analyse der gewonnenen Fourier-Transformierten $X_k$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $x_n$ auftreten kann? *(1 Punkt)*

Sie wollen nun die Frequenzauflösung verbessern, in dem Sie das Signal

$$z_n = \Big[x_n, \underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{M}\Big] \quad , M \in \mathbb{N}\,,$$

bilden.

**g)** Wie müssen Sie $M$ wählen, um einen Frequenzfehler kleiner als $1\,\mathrm{Hz}$ mit der verwendeten Signalverarbeitungskette zu erhalten? *(2 Punkte)*

**h)** Bestimmen Sie das Verhältnis

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2}{\sum_{k=0}^{N+M-1} |Z_k|^2}.$$

*(1 Punkt)*

**i)** Wie lautet das Nyquist-Band des Signals $x_n$? Wie lautet das Nyquist-Band des Signals $z_n$? *(1 Punkt)*

## Lösung

**a)** Die Fourier-Transformierte $Y(f)$ des Zeitsignals $y(t)$ beträgt:

$$y(t) = a \cdot \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a\frac{1}{f_0} r_{f_0}(f) = Y(f) = \begin{cases} \frac{a}{f_0} & , |f| \leq \frac{f_0}{2} \\ 0 & , |f| > \frac{f_0}{2} . \end{cases}$$

Das Spektrum $Y(f)$ ist in Abbildung L4 zu sehen.

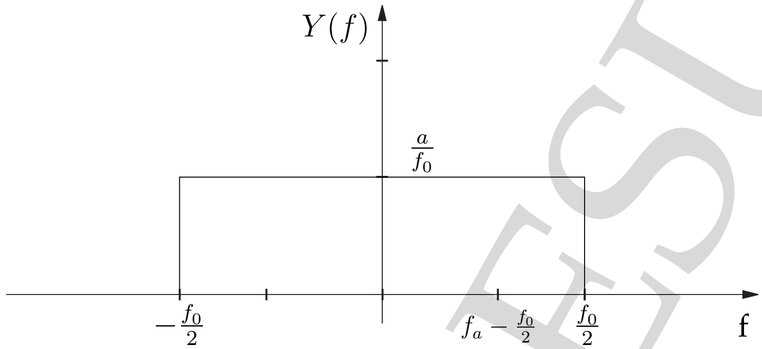


Abbildung L4: Spektrum $Y(f)$.

Das abgetastete Signal $y_*(t)$ besitzt folgendes Spektrum:

$$y_*(t) = y(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_\mathrm{A})$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y_*(f) = Y(f) * f_\mathrm{A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_\mathrm{A}) = f_\mathrm{A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(f - kf_\mathrm{A}) .$$

Das Spektrum $Y_*(f)$ ist in Abbildung L5 zu sehen. ***($\Sigma$: 4 Punkte)***

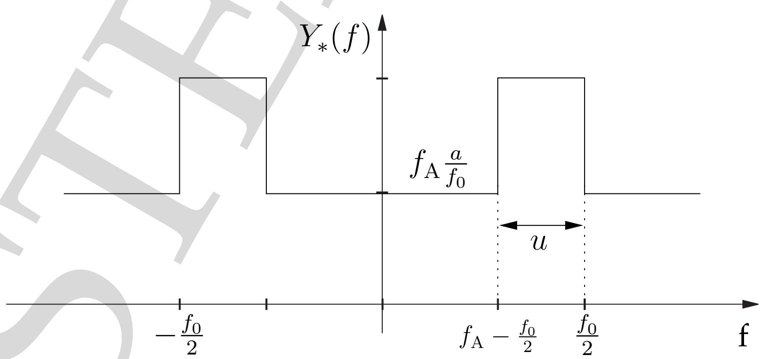


Abbildung L5: Spektrum $Y_*(f)$.

**b)** Die beiden Teilspektren überlappen sich, falls $f_0/2 > f_\mathrm{A} - f_0/2$. Das ist genau für $f_\mathrm{A} < f_0$ der Fall. Sie überlappen sich dann auf der Breite

$$u = \frac{f_0}{2} - \left(f_\mathrm{A} - \frac{f_0}{2}\right) = f_0 - f_\mathrm{A}.$$

***($\Sigma$: 1 Punkt)***

**c)** Das Spektrum $Y_1(f)$ ergibt sich zu $Y_1(f) = Y_*(f) \cdot Y_{\text{TP1}}(f)$ und ist in Abbildung L6 zu sehen.

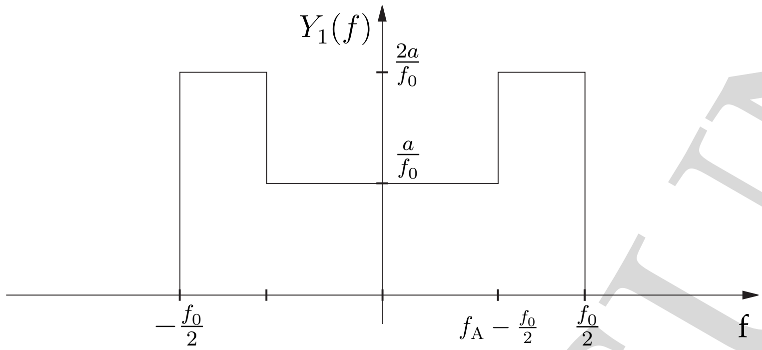


Abbildung L6: Spektrum $Y_1(f)$.

Das Spektrum $Y_2(f)$ ergibt sich zu $Y_2(f) = Y_*(f) \cdot Y_{\text{TP2}}(f)$ und ist in Abbildung L7 zu sehen.

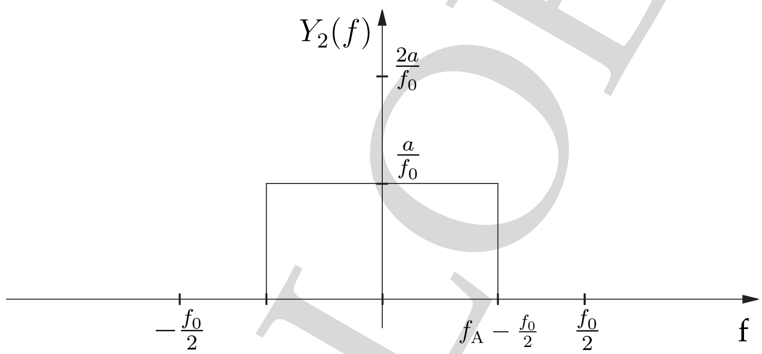


Abbildung L7: Spektrum $Y_2(f)$.

*($\Sigma$: 2 Punkte)*

**d)** Das Zeitsignal $y_1(t)$ folgt als inverse Fourier-Transformierte der Differenz zweier Rechteckfunktionen im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2a}{f_0} r_{f_0}(f) - \frac{a}{f_0} r_{2\left(f_A - \frac{f_0}{2}\right)}(f)\right\} \\ &= 2a \cdot \text{si}(\pi f_0 t) - \frac{a}{f_0} \cdot 2\left(f_A - \frac{f_0}{2}\right) \cdot \text{si}\left(2\pi\left(f_A - \frac{f_0}{2}\right)t\right) . \end{aligned}$$

Das Zeitsignal $y_2(t)$ folgt als inverse Fourier-Transformierte eines Rechteckfensters im Frequenzbereich:

$$y_2(t) = \frac{a}{f_0} \cdot 2\left(f_A - \frac{f_0}{2}\right) \cdot \text{si}\left(2\pi\left(f_A - \frac{f_0}{2}\right)t\right) .$$

*($\Sigma$: 4 Punkte)*

**e)** Die Fehler ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
|e_1(t)| &= |y_1(t) - y(t)| \\
&= \left| a \cdot \mathrm{si}(\pi f_0 t) - \frac{a}{f_0} \cdot 2 \left( f_{\mathrm{A}} - \frac{f_0}{2} \right) \cdot \mathrm{si} \left( 2\pi \left( f_{\mathrm{A}} - \frac{f_0}{2} \right) t \right) \right| \\
|e_2(t)| &= |y_2(t) - y(t)| \\
&= \left| \frac{a}{f_0} \cdot 2 \left( f_{\mathrm{A}} - \frac{f_0}{2} \right) \cdot \mathrm{si} \left( 2\pi \left( f_{\mathrm{A}} - \frac{f_0}{2} \right) t \right) - a \cdot \mathrm{si}\left( \pi f_0 t \right) \right| .
\end{aligned}
$$

D.h. die beiden Fehler sind gleich groß, $|e_1(t)| = |e_2(t)|$ . Dadurch wird der Fehler zum Zeitpunkt $t = 0$

$$
|e_1(t=0)| = |e_2(t=0)| = \left| \frac{a}{f_0} 2 \cdot \left( f_{\mathrm{A}} - \frac{f_0}{2} \right) - a \right| = 2a \cdot \left( 1 - \frac{f_{\mathrm{A}}}{f_0} \right) .
$$

***($\Sigma$: 3 Punkte)***

**f)** Der maximal auftretende Fehler beträgt gerade die Hälfte der Frequenzauflösung:

$$
F_{\max}\{f\} = \frac{\Delta f}{2} = \frac{1}{2N t_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{128} \mathrm{kHz} \approx 0{,}008\,\mathrm{kHz} .
$$

***($\Sigma$: 1 Punkt)***

**g)** Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{2} &= \frac{1}{2\left(N+M\right) t_{\mathrm{A}}} < 1\mathrm{Hz} \\
M &> \frac{1}{2 \cdot 1\mathrm{Hz}\, t_{\mathrm{A}}} - N \\
&> \frac{1}{2} 10^3 - 64 = 436 .
\end{aligned}
$$

Aus

$$
M + N = 2^p \quad , p \in N \quad \wedge \quad M > 436
$$

ergibt sich

$$
M = 448 .
$$

***($\Sigma$: 2 Punkte)***

**h)** Nach dem Satz von Parseval und dem Energiesatz der DFT gilt:

$$
\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} |X_k|^2}{\sum\limits_{k=0}^{N+M-1} |Z_k|^2} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N-1} |x_n|^2}{\sum\limits_{n=0}^{N+M-1} |z_n|^2} = 1 .
$$

***($\Sigma$: 1 Punkt)***

**i)** Das Nyquist-Band ändert sich durch Hinzufügen von Nullen im Zeitbereich nicht. Das Nyquist-Band für beide Signale lautet daher $[-f_{\mathrm{N}}, f_{\mathrm{N}}] = \left[ -\frac{1}{t_{\mathrm{A}}\, 2}, \frac{1}{t_{\mathrm{A}}\, 2} \right]$. ***($\Sigma$: 1 Punkt)***

## Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (20 Punkte)

Gegeben ist ein zeitdiskretes LTI-System im Ruhezustand, welches auf die Eingangsfolge $y_{\mathrm{e},n} = 3\left[1 + (-1)^n\right]\sigma_n$ mit der Ausgangsfolge $y_{\mathrm{a},n} = \left[8(-1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right]\sigma_n$ reagiert.

**a)** Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems? Stellen Sie die Übertragungsfunktion in Linearfaktoren von Zähler- und Nennerpolynom dar. *(4 Punkte)*

**b)** Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems. *(3 Punkte)*

**c)** Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems.

**Hinweis:** Bestimmen Sie zunächst allgemein einen Zusammenhang zwischen der Impulsantwort $g_n$ und der Sprungantwort $h_n$. *(4 Punkte)*

**d)** Ist das System stabil? Ist es minimalphasig? *(2 Punkte)*

**e)** Wie lautet die Differenzengleichung? *(1 Punkt)*

**f)** Zeichnen Sie den Signalflussplan des Systems. *(3 Punkte)*

**g)** Leiten Sie aus dem Signalflussplan eine Zustandsraumdarstellung des Systems her. *(3 Punkte)*

## Lösung

**a)** Die z-Transformation ergibt für die Zeitfolgen

$$Y_\mathrm{e}(z) = 3\left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}\right] = \frac{6z^2}{(z-1)(z+1)} \quad , |z| > 1$$
$$Y_\mathrm{a}(z) = 8\frac{z}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{4}z^2 - \frac{17}{4}z}{(z+1)(z-\frac{1}{2})} \quad , |z| > 1\,.$$

Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{Y_\mathrm{a}(z)}{Y_\mathrm{e}(z)} &= \frac{(\frac{31}{4}z^2 - \frac{17}{4}z)(z-1)(z+1)}{6z^2(z+1)(z-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{(\frac{31}{4}z^2 - \frac{17}{4}z)(z-1)}{6z^2(z-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{(\frac{31}{4}z - \frac{17}{4})(z-1)}{6z(z-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{31}{24}\frac{(z-\frac{17}{31})(z-1)}{z(z-\frac{1}{2})}\,. \end{aligned}$$

***(Σ: 4 Punkte)***

**b)** Die z-Transformierte der Sprungantwort lautet

$$\begin{aligned} H(z) &= G(z)\frac{z}{z-1} \\ &= \frac{31}{24}\frac{(z-\frac{17}{31})(z-1)}{z(z-\frac{1}{2})}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{31}{24}\frac{(z-\frac{17}{31})}{(z-\frac{1}{2})} = \frac{31}{24}\left(\frac{z}{(z-\frac{1}{2})} - \frac{\frac{17}{31}}{(z-\frac{1}{2})}\right)\,. \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ist auf zwei Wegen möglich:

(a) Durch Abspalten des Konstantanteils:

$$H(z) = \frac{31}{24}\left[1 - \frac{3}{62}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right] \Rightarrow h_n = \frac{31}{24}\delta_n - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma_{n-1}\,.$$

(b) Umformen der z-Transformierten:

$$H(z) = \frac{31}{24}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{31}{24}\frac{17}{31}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow h_n = \frac{31}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sigma_n - \frac{17}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma_{n-1}\,.$$

Die beiden Darstellungen repräsentieren dieselbe Zeitfolge. ***(Σ: 3 Punkte)***

**c)** Wegen

$$G(z) = H(z)\frac{z-1}{z} = H(z)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

folgt

$$g_n = h_n - h_{n-1}\,.$$

Für $n \geq 2$ (alle vorkommenden Sprungfunktionen in $h_n$ haben Werte ungleich null) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{31}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{17}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{31}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{17}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{31}{24} - 2\frac{17}{24} - 2\frac{31}{24} + 4\frac{17}{24}\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Für $n = \{0, 1\}$ ergeben sich die Werte durch Einsetzen und man erhält die Impulsantwort:

$$g_n = \frac{31}{24}\delta_n - \frac{65}{48}\delta_{n-1} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma_{n-2} .$$

***($\Sigma$: 4 Punkte)***

**d)** Die Pole des Systems sind $z_{\infty,1} = 0, z_{\infty,2} = \frac{1}{2}$. Somit liegen die Pole innerhalb des Einheitskreises und das System ist stabil.

Die Nullstellen sind $z_{0,1} = \frac{17}{31}, z_{0,2} = 1$. Somit hat das System keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises und das System ist minimalphasig. ***($\Sigma$: 2 Punkte)***

**e)** Aus der Übertragungsfunktion folgt die Differenzengleichung

$$y_{\mathrm{a},n} - \frac{1}{2}y_{\mathrm{a},n-1} = \frac{31}{24}y_{\mathrm{e},n} - 2y_{\mathrm{e},n-1} + \frac{17}{24}y_{\mathrm{e},n-2} .$$

***($\Sigma$: 1 Punkt)***

**f)** Aus der Differenzengleichung ergibt sich der folgende Signalflussplan:

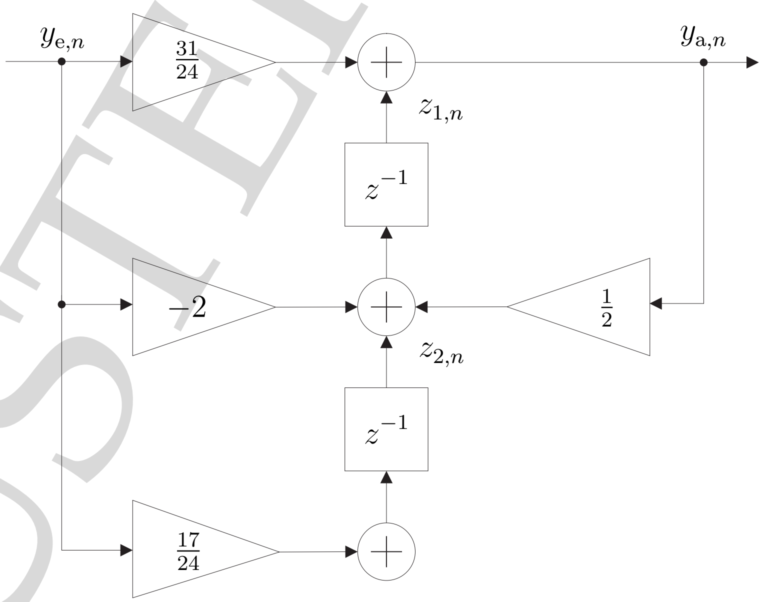


Abbildung L8: Signalflussplan.

***($\Sigma$: 3 Punkte)***

**g)** Dem Signalflussplan entnimmt man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
z_{2,n+1} &= \frac{17}{24} y_{\mathrm{e},n} \\
z_{1,n+1} &= -2 y_{\mathrm{e},n} + z_{2,n} + \frac{1}{2} y_{\mathrm{a},n} \\
y_{\mathrm{a},n} &= \frac{31}{24} y_{\mathrm{e},n} + z_{1,n} \,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen entsteht die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{n+1} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{65}{48} \\ \frac{17}{24} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} y_{\mathrm{e},n} \,. \\
y_{\mathrm{a},n} &= \underbrace{(1,0)}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\left(\frac{31}{24}\right)}_{\mathbf{D}} y_{\mathrm{e},n} \,.
\end{aligned}$$

***(Σ: 3 Punkte)***