Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
16. März 2017

Musterlösung

Aufgabe 1: 14
Aufgabe 2: 18
Aufgabe 3: 19
Aufgabe 4: 16

Gesamtpunkte: 67

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (14 Punkte)

Gegeben sei das in Abbildung 1 dargestellte Signal $x_1(t)$.

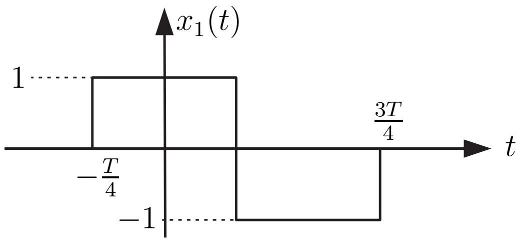

Abbildung 1: Signal $x_1(t)$.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(f)$ des Signals $x_1(t)$. Nutzen Sie bekannte Transformationen und die Eigenschaften der Fourier-Transformation! *(2 Punkte)*

Das Signal $x_2(t)$ entstehe durch periodische Fortsetzung der Funktion $x_1(t)$ mit der Periode T:

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT) \,.$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $X_2(f)$ des Signals $x_2(t)$. *(4 Punkte)*

c) Skizzieren Sie das Betragsspektrum $|X_2(f)|$ im Intervall $-\frac{3}{T} \leq f \leq \frac{3}{T}$. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

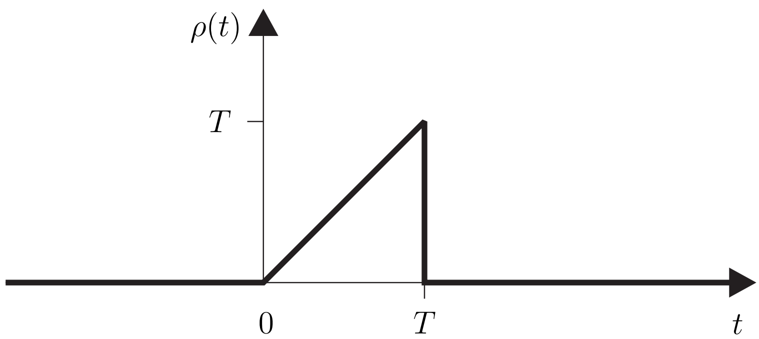

Abbildung 2: Signal $\rho(t)$.

Gegeben sei das in Abbildung 2 gezeigte Signal $\rho(t)$.

d) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $P(f)$ von $\rho(t)$ mit Hilfe des Fourier-Integrals.

Hinweis: $\int x\, \mathrm{e}^{ax}\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}\,(ax-1)$. *(2 Punkte)*

e) Enthält $\rho(t)$ einen Gleichanteil? Falls ja, berechnen Sie diesen aus $P(f)$. *(2 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

f) Schätzen Sie das Betragsspektrum $|P(f)|$ ab. Verwenden Sie hierzu eine geeignete Abschätzung für den Betrag einer Summe komplexer Zahlen. *(2 Punkte)*

Das Signal soll nun mit einem idealen Tiefpass mit der Grenzfrequenz $f_\mathrm{g} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Hz}$ gefiltert werden.

g) Beurteilen Sie qualitativ, inwiefern sich die Energie des gefilterten Signals $\rho_\mathrm{TP}(t)$ von der Energie des ursprünglichen Signals $\rho(t)$ unterscheidet. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= r_{\frac{T}{2}}(t) - r_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{2}\right) \\
X_1(f) &= \mathcal{F}\{x_1(t)\} = \mathcal{F}\left\{r_{\frac{T}{2}}(t)\right\} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f \frac{T}{2}}\, \mathcal{F}\left\{r_{\frac{T}{2}}(t)\right\} \\
&= \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi f T}\right) \cdot \frac{T}{2} \cdot \operatorname{sinc}\left(f \frac{T}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Die periodische Fortsetzung eines Zeitsignals mit der Periodendauer T korrespondiert mit einer Abtastung des Spektrums mit Periode $1/T$ und einer Skalierung um $1/T$:

$$
X_2(f) = \frac{1}{T} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi f T}\right) \cdot \frac{T}{2} \cdot \operatorname{sinc}\left(f \frac{T}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) .
$$

Für $f \neq \frac{k}{T}$ gilt:

$$
X_2(f) = 0 .
$$

Für $f = \frac{k}{T}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
X_2(f) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - (-1)^k\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) .
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
1 - (-1)^k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \\ 2, & k \text{ ungerade}, \end{cases}
$$

sowie

$$
\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0\,, \\ 0, & \text{sonstige gerade } k\,, \\ \pm\frac{2}{k\pi}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}
$$

(Σ: 4 Punkte)

c) Mit den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe ergibt sich das in Abb. L1 gezeigte Betragsspektrum. ***(Σ: 1 Punkt)***

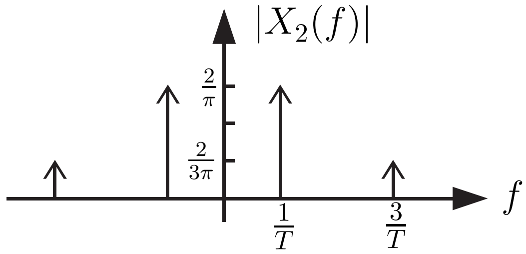

Abbildung L1: Betragsspektrum $|X_2(f)|$.

d)

$$\begin{aligned}
P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{T} t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}}{-(2\pi f)^2}\,(-\mathrm{j}\,2\pi f t - 1)\right]_0^T \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}(\mathrm{j}\,2\pi f T + 1) - 1}{(2\pi f)^2} \,.
\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

e) Durch mehrmaliges Anwenden der Regel von l'Hospital und Auswertung an der Stelle $f = 0$ erhält man den Gleichanteil:

$$\begin{aligned}
P(f) &= \frac{-\mathrm{j}\,8\pi^3 T^3 f\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T} + 4\pi^2 T^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}}{8\pi^2} \\
P(0) &= \frac{T^2}{2} \,.
\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

f)

$$\begin{aligned}
|P(f)| &= \left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}(\mathrm{j}\,2\pi f T + 1) - 1}{(2\pi f)^2}\right| \\
&= \left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T} + \mathrm{j}\,2\pi f T\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T} - 1}{(2\pi f)^2}\right| \\
&\leq \frac{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}\right| + \left|\mathrm{j}\,2\pi f T\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f T}\right| + 1}{4\pi^2 f^2} \\
&= \frac{1 + 2\pi T|f| + 1}{4\pi^2 f^2} \\
&= \frac{1 + \pi T|f|}{2\pi^2 f^2} \,.
\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Durch die Filterung fallen Frequenzanteile aus dem Signal heraus, denn bei $f = \frac{1}{\pi}$ liegt die Amplitude laut Abschätzung in der vorherigen Teilaufgabe noch bei $\frac{1+T}{2}$. Daher sinkt die Signalenergie. Der Amplitudengang ist in Abb. L2 zu sehen (nicht verlangt).

(Σ: 1 Punkt)

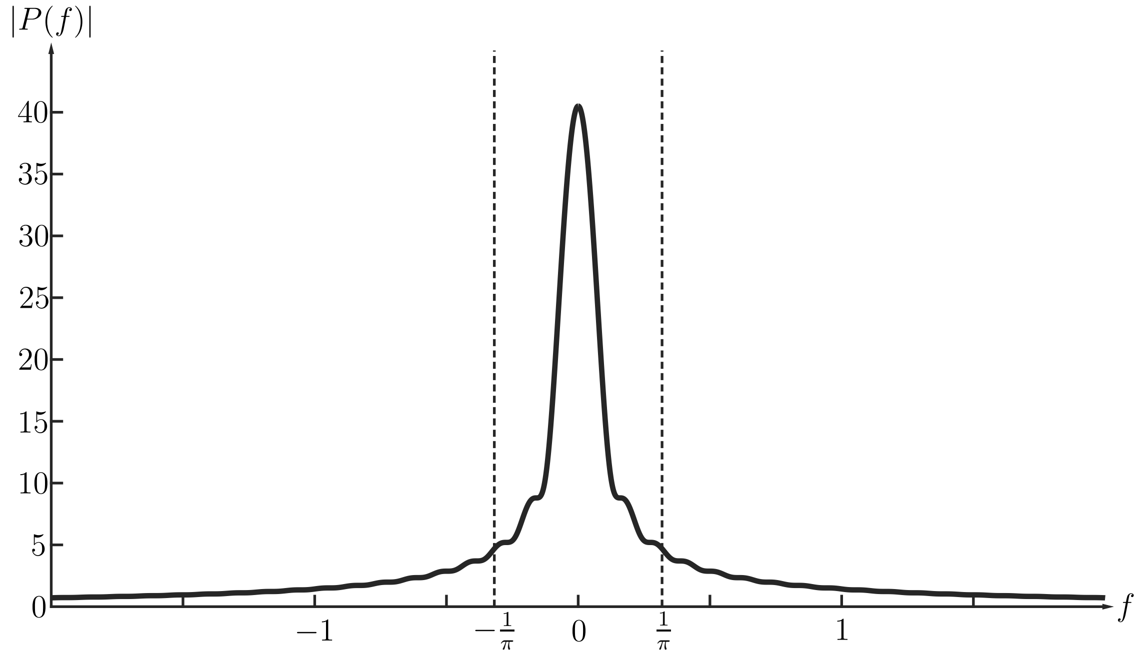

Abbildung L2: Amplitudengang $|P(f)|$ für $T = 9$.

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (18 Punkte)

Ein zeitkontinuierliches System sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{y}_\mathrm{a}(t) + b\dot{y}_\mathrm{a}(t) + 4y_\mathrm{a}(t) = \dot{y}_\mathrm{e}(t) + 2y_\mathrm{e}(t)\,.$$

a) Zeichnen Sie den Signalflussplan des Systems in ARMA-Form. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von der vorhergehenden unabhängig.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. *(2 Punkte)*

c) Wie lauten die Polstellen und Nullstellen des Systems? *(2 Punkte)*

d) Für welche Werte von b ist das System stabil? *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Nun sei die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+5s+4}$ gegeben.

e) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems unter Verwendung des Residuensatzes. *(3 Punkte)*

f) Nun wird das Eingangssignal $y_\mathrm{e}(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \sigma(t)$ verwendet. Berechnen Sie das Ausgangssignal durch Rechnung im Zeitbereich. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Abbildung L3 zeigt die geforderte Signalflussdarstellung. *(Σ: 3 Punkte)*

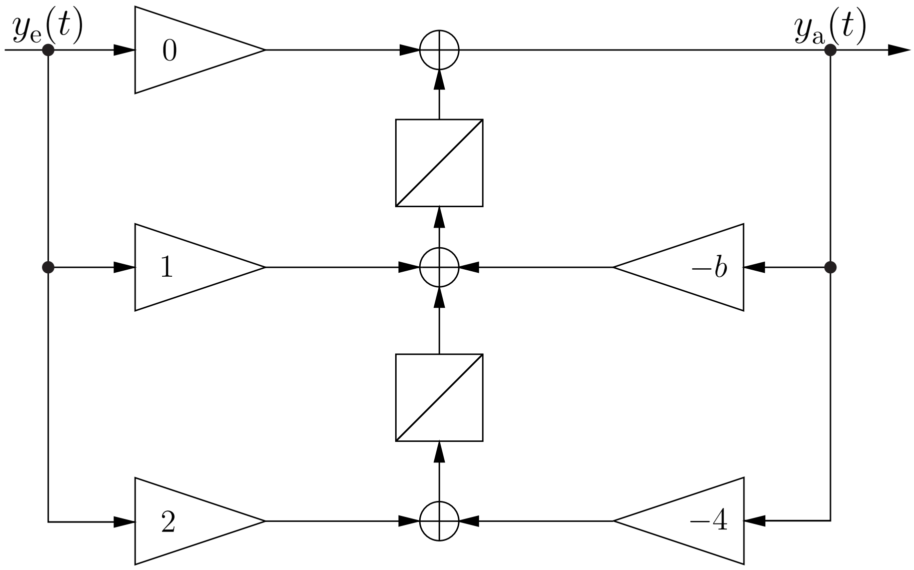

Abbildung L3: Signalflussplan in ARMA-Form.

b) Laplace-Transformation der DGL liefert:

$$Y_a(s)(s^2 + bs + 4) = Y_e(s)(s + 2)\,.$$

Es folgt für die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{Y_a(s)}{Y_e(s)} = \frac{s+2}{s^2 + bs + 4}\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Nullstelle bei $s_0 = -2$, Polstellen ergeben sich zu:

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 4}\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

d) Das System ist stabil, wenn alle Polstellen in der offenen linken Halbebene liegen. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden:

- $|b| \geq 4$: reelle Polstelle

  $$-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - 4} < 0\,.$$

  Für negative b ist die Ungleichung nie erfüllt, da zwei positive Summanden vorliegen. Im Falle positiver b gilt:

  $$\frac{b^2}{4} - 4 < \frac{b^2}{4}\,.$$

  Dies ist immer erfüllt, daher ist das System für $|b| \geq 4$ immer stabil.

- $|b| < 4$: konjugiert komplexe Polstellen

  $$\mathrm{Re}\left(-\frac{b}{2} \pm j\sqrt{4 - \frac{b^2}{4}}\right) = -\frac{b}{2} < 0\,.$$

  Daraus folgt: $b > 0$.

Das System ist folglich stabil, wenn gilt: $b > 0$. *(Σ: **3 Punkte**)*

e) Die Übertragungsfunktion lässt sich schreiben als:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+4)(s+1)}\,.$$

Mit dem Residuensatz folgt die Impulsantwort:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \sum_i \mathrm{Res}\left\{G(s)\mathrm{e}^{st}; s_{\infty,i}\right\} \\
&= \left(\lim_{s\to-1}(s+1)\cdot\frac{s+2}{(s+4)(s+1)}\cdot\mathrm{e}^{st} + \lim_{s\to-4}(s+4)\cdot\frac{s+2}{(s+4)(s+1)}\cdot\mathrm{e}^{st}\right)\sigma(t) \\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{3}\cdot\mathrm{e}^{-4t}\right)\sigma(t)\,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

f) Die Systemantwort ergibt sich im Zeitbereich aus dem Faltungsprodukt von Eingangsgröße und Impulsantwort:

$$y_\mathrm{a}(t) = g(t) * y_\mathrm{e}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot y_\mathrm{e}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

Für $t < 0$ liegt keine Überschneidung der beiden Funktionen vor. Das Faltungsprodukt ist in diesem Bereich $y_\mathrm{a}(t) = 0$. Für $t \geq 0$ liegt eine Überschneidung vor, die in die Integrationsgrenzen eingeht. Dies wird auch anhand der Faltung der Sprungfunktionen ersichtlich: $\sigma(\tau) * \sigma(t-\tau)$ ist nur im Bereich $0 \leq \tau \leq t$ ungleich Null. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{a}(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau-t+\tau} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau-t+\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}\right]_{\tau=0}^{t} + \left[-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4\tau}\right]_{\tau=0}^{t} - \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\cdot\tau\right]_{\tau=0}^{t} + \left[\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3\tau-t}\right]_{\tau=0}^{t} \\
&= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t} + 0 + \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t} \\
&= -\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Die Systemantwort lässt sich für alle t angeben als:

$$y_\mathrm{a}(t) = \left(-\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\right)\sigma(t)\,.$$

*(Σ: **5 Punkte**)*

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (19 Punkte)

Gegeben sei das Signal $y(t)$, welches sich durch Multiplikation der Signale $s(t)$ und $x(t)$ ergibt. Anschließend erfolgt eine Abtastung von $y(t)$, was zum abgetasteten Signal y_n führt. Für die Signale gilt im Folgenden:

$$x(t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t)$$

und

$$s(t) = 1 \,.$$

a) Geben Sie die Fourier-Transformierte $Y(f)$ des Signals $y(t)$ an. *(2 Punkte)*

b) Was muss laut Abtasttheorem für die Abtastfrequenz f_A gelten, wenn Sie das abgetastete Signal y_n fehlerfrei rekonstruieren möchten? *(1 Punkt)*

Für die nächsten Teilaufgaben betrage die Frequenz der Schwingung $f_0 = 80\,\mathrm{Hz}$.

c) Die Abtastfrequenz wird zu $f_\mathrm{A} = 200\,\mathrm{Hz}$ gewählt. Zeichnen Sie das Betragsspektrum $\left|Y_*^{200}(f)\right|$ des Abtastsignals im Bereich von $-400\,\mathrm{Hz}$ bis $400\,\mathrm{Hz}$. *(3 Punkte)*

Das Signal $s(t)$ hat jetzt die Form:

$$s(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{f_\mathrm{B}}{2}\, t\right) .$$

d) Welche Bedingung muss $s(t)$ (genauer: f_B) erfüllen, damit kein Aliasing auftritt? *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den Teilaufgaben b) bis d) unabhängig.

Es gelte nun wieder: $s(t) = 1$.

e) Zeichnen Sie das Betragsspektrum $\left|Y_*^{100}(f)\right|$ im Bereich von $-250\,\mathrm{Hz}$ bis $250\,\mathrm{Hz}$, wenn Sie eine Abtastfrequenz von $100\,\mathrm{Hz}$ wählen. *(2 Punkte)*

f) Sie rekonstruieren das Signal aus Teilaufgabe **e)** mit einem idealen Tiefpass (Grenzfrequenz $f_\mathrm{g} = 90\,\mathrm{Hz}$). Wählen Sie dessen Verstärkung sinnvoll und skizzieren Sie den Amplitudengang des Filters in Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe **e)**. *(3 Punkte)*

g) Bestimmen Sie das rekonstruierte Zeitsignal $\hat{y}_{100}(t)$. *(1 Punkt)*

h) Unterscheiden sich das ursprüngliche Signal $y(t)$ und das rekonstruierte Signal $\hat{y}_{100}(t)$? (Begründung!) *(1 Punkt)*

i) Sie haben das Signal wie in Aufgabe **e)** beschrieben abgetastet. Wie können Sie in diesem Fall unerwünschte Signalanteile entfernen? Beschreiben Sie kurz eine mögliche Vorgehensweise. (Keine Rechnung notwendig!) *(2 Punkte)*

Lösung

a) Es gilt:

$$y(t) = s(t) \cdot x(t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y(f) = \delta(f) + \frac{1}{2}\,\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\,\delta(f + f_0)\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Die Einhaltung des Abtasttheorems ist gefordert: $f_\mathrm{A} > 2f_0\,.$ ***(Σ: 1 Punkt)***

c) Nach der Abtastung hat das Betragsspektrum die in Abb. L4 dargestellte Form.

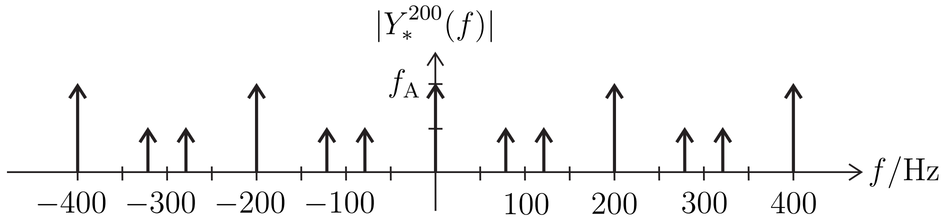

Abbildung L4: Betragsspektrum des Signals $y(t)$ nach der Abtastung mit $f_\mathrm{A} = 200\,\mathrm{Hz}$.

(Σ: 3 Punkte)

d) Aus der Transformationstabelle kann die Beziehung

$$d_T(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{T}{2}\mathrm{si}^2\left(\pi\,\frac{T}{2}\,f\right)$$

abgelesen werden. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Fourier-Transformation folgt direkt:

$$\mathrm{si}^2\left(\pi\,\frac{f_\mathrm{B}}{2}\,t\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{f_\mathrm{B}} d_{f_\mathrm{B}}(f)\;.$$

Wie aus Teilaufgabe **c)** abgelesen werden kann, beträgt der minimale Abstand zweier Dirac-Impulse $40\,\mathrm{Hz}$. Die Faltung dieses Spektrums mit der Dreieckfunktion ergibt das resultierende Spektrum. Die einzelnen Teilspektren dürfen sich jedoch nicht überlappen. Aus diesem Grund gilt für die maximale Breite des Dreiecks:

$$\frac{f_\mathrm{B}}{2} \cdot 2 < 40\,\mathrm{Hz} \quad \rightarrow \quad f_\mathrm{B} < 40\,\mathrm{Hz}\,.$$

(Σ: 4 Punkte)

e) Nach der Abtastung mit einer Abtastfrequenz von $100\,\mathrm{Hz}$ ergibt sich das in Abb. L5 ersichtliche Betragsspektrum. *(Σ: 2 Punkte)*

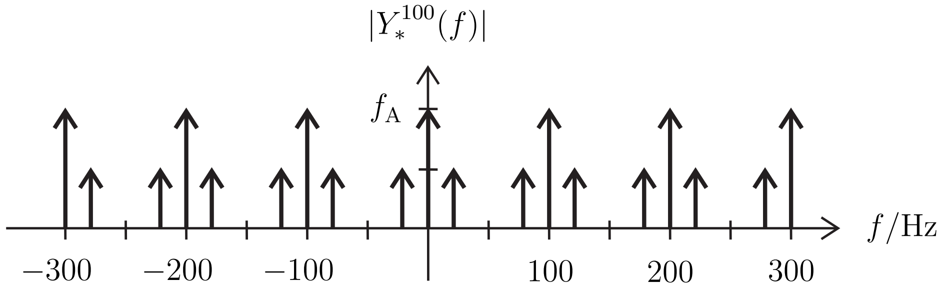

Abbildung L5: Betragsspektrum des Signals $y(t)$ nach der Abtastung mit $f_\mathrm{A} = 100\,\mathrm{Hz}$.

f) Die Amplitude des Rechteckfilters muss derart gewählt werden, dass die korrekte Amplitude des Zeitsignals rekonstruiert werden kann. Daher folgt eine Rechteckhöhe von $\frac{1}{f_\mathrm{A}}$. Abbildung L6 zeigt das Spektrum aus **d)** mit Rechteckfilter. *(Σ: 3 Punkte)*

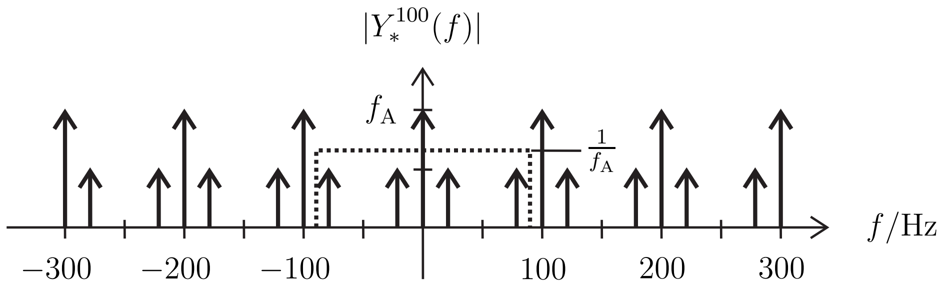

Abbildung L6: Betragsspektrum des Signals $y(t)$ nach der Abtastung mit $f_\mathrm{A} = 100\,\mathrm{Hz}$ und Rechteckfilter mit der Grenzfrequenz $f_\mathrm{g} = 90\,\mathrm{Hz}$. (Rechteckhöhe nicht maßstabsgetreu!)

g) Für das rekonstruierte Signal ergibt sich:

$$\hat{Y}_{100}(f) = \delta(f) + \frac{1}{2}\,\delta(f-80) + \frac{1}{2}\,\delta(f+80) + \frac{1}{2}\,\delta(f-20) + \frac{1}{2}\,\delta(f+20)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\hat{y}_{100}(t) = 1 + \cos(2\pi 80t) + \cos(2\pi 20t)\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

h) Aufgrund der Verletzung des Abtasttheorems kann das Signal $y(t)$ nicht korrekt aus $\hat{y}_{100}(t)$ rekonstruiert werden. *(Σ: 1 Punkt)*

i) Zur Unterdrückung des Anteils bei $20\,\mathrm{Hz}$ existieren mehrere Möglichkeiten:

- Verwendung eines Notchfilters bei $20\,\mathrm{Hz}$ nach der Rekonstruktion.
- Verwendung eines idealen Tiefpassfilters ($f_\mathrm{g} = 10\,\mathrm{Hz}$) und eines geeigneten Bandpassfilters, z. B. mit Mittenfrequenz $f_\mathrm{m} = 80\,\mathrm{Hz}$ und Bandbreite $B = 20\,\mathrm{Hz}$.

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (16 Punkte)

Ein zeitdiskretes System soll zum Zeitpunkt n am Ausgang den gewichteten Mittelwert aus dem vorangegangenen Ausgangswert, dem aktuellen Eingangswert und den beiden vorhergehenden Eingangswerten bilden. Der zugehörige Signalflussplan ist in Abbildung 3 zu sehen.

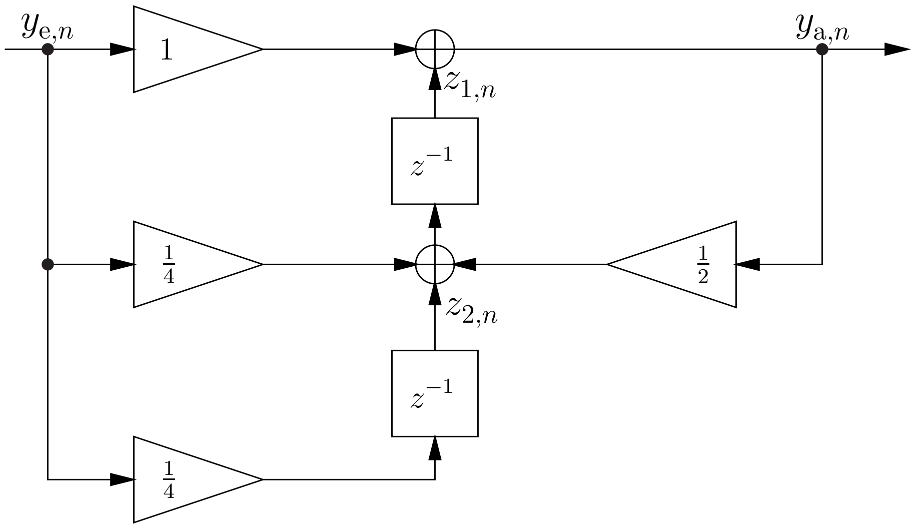

Abbildung 3: Signalflussplan.

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des Systems. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$. *(2 Punkte)*

c) Ist das System stabil? *(1 Punkt)*

d) Leiten Sie aus Abbildung 3 die Zustandsraumdarstellung des Systems ab und geben Sie die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ an. Die Zustandsgrößen sind entsprechend Abbildung 3 zu wählen, d. h. $z_{1,n}$ als der Ausgang des oberen und $z_{2,n}$ als der Ausgang des unteren Verzögerungsgliedes.

Hinweis: Es gilt: Die Anfangswerte des Systems sind null. *(4 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung. *(2 Punkte)*

f) Bestimmen Sie die Impulsantwort g_n des Systems. *(4 Punkte)*

g) Handelt es sich beim durch g_n beschriebenen System um ein FIR- oder ein IIR-System? (Begründung!) *(1 Punkt)*

Lösung

a) Es gilt: $y_{\mathrm{a},n} = \frac{1}{2}y_{\mathrm{a},n-1} + y_{\mathrm{e},n} + \frac{1}{4}y_{\mathrm{e},n-1} + \frac{1}{4}y_{\mathrm{e},n-2}\,.$ ***(Σ: 2 Punkte)***

b) Man rechnet:

$$G(z) = \frac{Y_\mathrm{a}(z)}{Y_\mathrm{e}(z)} = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z} = \frac{4z^2 + z + 1}{4z^2 - 2z}\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Die Pole des Systems sind $z_{\infty,1} = 0$ und $z_{\infty,2} = 0{,}5$. Da beide innerhalb des Einheitskreises liegen, ist das System stabil. ***(Σ: 1 Punkt)***

d) Aus der Zeichnung ist abzulesen:

$$z_{2,n+1} = \frac{1}{4}y_{\mathrm{e},n}, \qquad y_{\mathrm{a},n} = z_{1,n} + y_{\mathrm{e},n}\,, \qquad z_{1,n+1} = \frac{1}{4}y_{\mathrm{e},n} + z_{2,n} + \frac{1}{2}y_{\mathrm{a},n}\,.$$

Einsetzen von $y_{\mathrm{a},n}$ führt zur Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ z_{2,n+1} \end{pmatrix} &= \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}^{\mathbf{B}} y_{\mathrm{e},n}, \\
y_{\mathrm{a},n} &= \underbrace{(1,0)}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{pmatrix} + \underbrace{(1)}_{\mathbf{D}}\, y_{\mathrm{e},n}\,.
\end{aligned}$$

(Σ: 4 Punkte)

e) Es gilt für die Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = (1,0)\begin{pmatrix} z - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + 1 \\
&= 1 + (1,0)\frac{1}{z(z-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z - \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{z(z-\frac{1}{2}) + \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}}{z(z-\frac{1}{2})} = \frac{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}}{z(z-\frac{1}{2})}\,.
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Lösung aus Teilaufgabe **b)**! ***(Σ: 2 Punkte)***

f) Bestimmen der Impulsantwort durch die inverse z-Transformation der Übertragungsfunktion:

$$G(z) = (4z^2 + z + 1) \div (4z^2 - 2z) = 1 + \frac{3z + 1}{4z^2 - 2z}\,.$$

Durch Partialbruchzerlegung von

$$G(z) = 1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 1/2}$$

erhält man

$$A = -1/2\,, \qquad B = 5/4$$

und somit

$$g_n = \delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-1} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma_{n-1}\,.$$

(Σ: 4 Punkte)

g) Das System ist ein IIR-Filter, da $y_{\mathrm{a},n}$ von $y_{\mathrm{a},n-1}$ abhängt. ***(Σ: 1 Punkt)***