Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
05. April 2018

Musterlösung

Aufgabe 1: 16
Aufgabe 2: 17
Aufgabe 3: 18
Aufgabe 4: 16

Gesamtpunkte: 67

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (16 Punkte)

Gegeben sei das periodische Rechtecksignal $y_1(t)$, das in Abb. 1 dargestellt ist. Es handelt sich hierbei um Rechteckfunktionen der Höhe A und Breite αT im Abstand T.

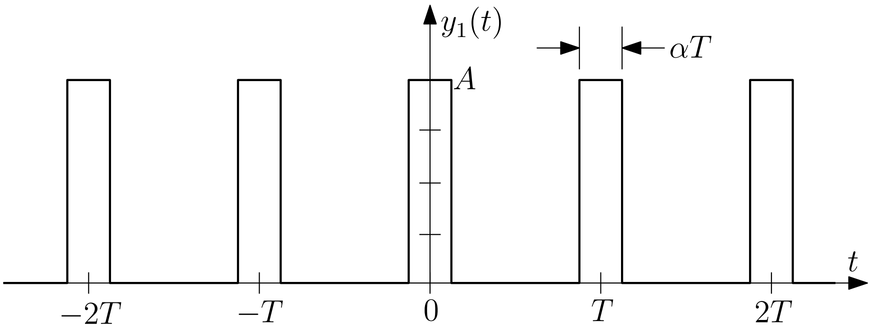

Abbildung 1: Rechtecksignal $y_1(t)$.

a) Nach einer Tiefpassfilterung bleibt nur der Gleichanteil des Signals $y_1(t)$ vorhanden. Welchen Wert nimmt die Ausgangsspannung $y_{\mathrm{A}}(t)$ des Tiefpasses in Abhängigkeit von α an? *(2 Punkte)*

b) Der Tiefpass filtert die Grundfrequenz und alle Oberschwingungen aus dem Signal heraus. Wie groß ist die Amplitude der Grundfrequenz des Signals $y_1(t)$ in Abhängigkeit von α? *(3 Punkte)*

c) Bei welchem Wert von α nimmt die Amplitude der Grundfrequenz den höchsten Wert an? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das in Abb. 2 dargestellte, nicht-periodische Signal $y_2(t)$.

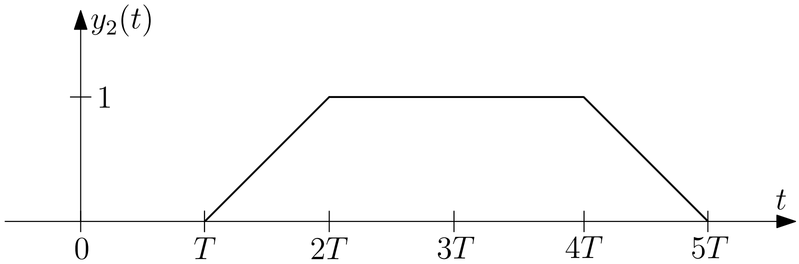

Abbildung 2: Signal $y_2(t)$.

d) Das Signal $y_2(t)$ soll im ersten Schritt derart verschoben werden, dass für das verschobene Signal $y_3(t)$ gilt: $y_3(t) = y_3(-t)$. Hierfür soll ein Signal $x(t)$ genutzt werden, sodass gilt: $y_2(t) * x(t) = y_3(t)$.
Geben Sie $x(t)$ an und skizzieren Sie das Signal $y_3(t)$. *(2 Punkte)*

e) Zeichnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}$. Geben Sie zudem eine mathematische Beschreibung von $\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}$ an. *(2 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

f) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Signals $y_3(t)$ **ohne Verwendung des Fourier-Integrals.** Nutzen Sie hierfür den Zusammenhang für $\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}$ aus der vorhergehenden Teilaufgabe und greifen Sie auf bekannte Zusammenhänge und Transformationen zurück. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. *(5 Punkte)*

g) Berechnen Sie den Gleichanteil von $y_3(t)$. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Die Ausgangsspannung $y_\mathrm{A}(t)$ entspricht dem Gleichanteil der Rechteckspannung:

$$y_\mathrm{A}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} A\ \mathrm{d}t = \alpha A\ .$$

b) Die Amplitude der Grundschwingung setzt sich aus den ersten positiven und negativen Koeffizienten der entsprechenden komplexen Fourier-Reihe zusammen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\frac{1}{T}t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\frac{1}{T}t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\frac{-T}{\mathrm{j}\,2\pi}A\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\frac{1}{T}t}\right]_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} \\ &= -\frac{A}{\pi}\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\alpha\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\alpha\pi}\right) = \frac{A}{\pi}\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\alpha\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\alpha\pi}\right) \\ &= \frac{A}{\pi}\sin(\alpha\pi) = c_{-1}\,. \end{aligned}$$

Die Amplitude ist die Summe der beiden Koeffizienten:

$$\hat{y} = c_1 + c_{-1} = 2\frac{A}{\pi}\sin(\alpha\pi)\,.$$

c) Den maximalen Wert nimmt $\hat{y}$ für $\alpha = 0{,}5$ an.

d) Eine Verschiebung kann mittels Faltung mit einem Dirac-Stoß realisiert werden. Hier ist gefordert, dass $y_3(t)$ eine gerade Funktion ist, sodass eine Verschiebung von $y_2(t)$ um $3T$ nach links erfolgen muss, was mit $x(t) = \delta(t + 3T)$ der Fall ist.

Das Signal $y_3(t)$ ist in Abb. L1 dargestellt.

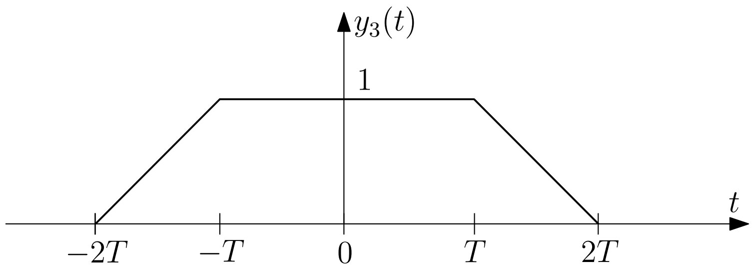

Abbildung L1: Signal $y_3(t)$.

*(Σ: **2 Punkte**)*

e) Die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}$ ist in Abb. L2 zu sehen. Sie lässt sich angeben als:

$$\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\left(r_T\left(t + \frac{3T}{2}\right) - r_T\left(t - \frac{3T}{2}\right)\right)\ .$$

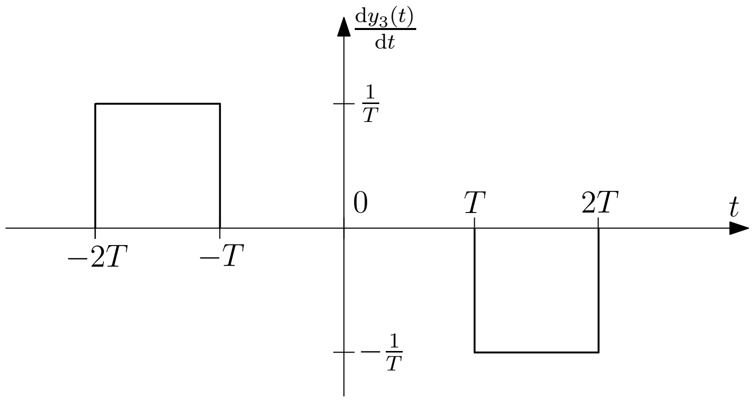

Abbildung L2: Ableitung des Signals $y_3(t)$.

(Σ: 2 Punkte)

f) Der Differentiationssatz liefert:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathrm{j}2\pi f \cdot \mathcal{F}\left\{y_3(t)\right\} \; .$$

Für die Fourier-Transformierte des Signals $y_3(t)$ folgt somit:

$$\mathcal{F}\left\{y_3(t)\right\} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}\right\} \; .$$

Die Fourier-Transformierte der Ableitung $\frac{\mathrm{d}y_3(t)}{\mathrm{d}t}$ kann mit Hilfe der Transformationstabelle und des Verschiebungssatzes angegeben und eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} Y_3(f) &= \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \cdot \frac{1}{T} \cdot \left(T\mathrm{sinc}(fT) \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{3T}{2}f} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{3T}{2}f}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \cdot \mathrm{sinc}(fT) \cdot 2\mathrm{j}\sin(3\pi fT) \\ &= 3T \cdot \mathrm{sinc}(fT) \cdot \mathrm{sinc}(3fT)\, . \end{aligned}$$

(Σ: 5 Punkte)

g) Der Gleichanteil ergibt sich aus dem Spektrum $Y_3(f)$ an der Stelle $f = 0$:

$$Y_3(f = 0) = 3T\, .$$

(Σ: 1 Punkt)

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei das in Abb. 3 gezeigte kausale, zeitkontinuierliche System $\mathcal{S}_1$ mit dem Eingang $x(t)$ und dem Ausgang $y(t)$ sowie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

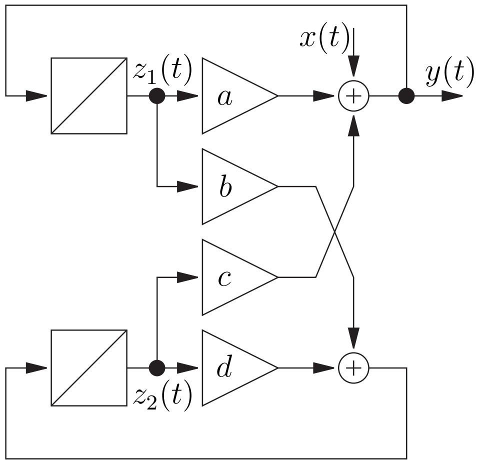

Abbildung 3: Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_1$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $\mathcal{S}_1$. Eine Zustandsraumdarstellung ist nicht verlangt. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems $\mathcal{S}_1$. *(2 Punkte)*

c) Welche Bedingungen gelten für die Parameter a, b, c und d, wenn das System $\mathcal{S}_1$ stabil und schwingfähig sein soll? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Von einem linearen System $\mathcal{S}_2$ wurde die Sprungantwort zu

$$h_2(t) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right) \sigma(t)$$

mit einem Parameter $T > 0$ bestimmt.

d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $\mathcal{S}_2$. *(2 Punkte)*

e) Für welche Parameter T ist dieses System stabil? *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems $\mathcal{S}_2$ aus der Übertragungsfunktion. *(2 Punkte)*

g) Überprüfen Sie die Korrektheit der berechneten Impulsantwort mit Hilfe der Sprungantwort durch Rechnung im Zeitbereich. *(2 Punkte)*

h) Zeichnen Sie einen Signalflussplan für das System $\mathcal{S}_2$. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Dem Signalflussplan können folgende Gleichungen entnommen werden. Für die weitere Rechnung werden sie direkt in den Laplace-Bereich überführt.

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= y(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & sZ_1(s) = Y(s) \\
\dot{z}_2(t) &= dz_2(t) + bz_1(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & sZ_2(s) = dZ_2(s) + bZ_1(s) \\
y(t) &= x(t) + az_1(t) + cz_2(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & Y(s) = X(s) + aZ_1(s) + cZ_2(s)\,.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
Z_1(s) &= \frac{Y(s)}{s} \\
Z_2(s) &= \frac{b}{s(s-d)}\,Y(s)\,.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in obige Gleichung für $Y(s)$ und Umstellen liefert:

$$
G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - ds}{s^2 - (a+d)s - bc + ad}\,.
$$

(Σ: 3 Punkte)

b) Die Nullstellen liegen bei:

$$
s_{0,1} = 0\,, \quad s_{0,2} = d\,.
$$

Die Pole des Systems liegen bei:

$$
s_{\infty 1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} + bc - ad}\,.
$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Ein System ist schwingfähig, wenn es konjugiert komplexe Polstellen besitzt und stabil, wenn alle Polstellen einen negativen Realteil besitzen.
Schwingfähigkeit liegt vor, wenn:

$$
\frac{(a+d)^2}{4} + bc < ad\,.
$$

Stabilität ist gewährleistet, wenn $a + d < 0$ erfüllt ist. ***(Σ: 2 Punkte)***

d) Die Übertragungsfunktion ergibt sich aus Differentiation (d.h. Multiplikation mit s) der Laplace-Transformierten $H_2(s)$ der Sprungantwort $h_2(t)$:

$$
G_2(s) = s \cdot H_2(s) = \frac{1}{2T}\frac{s}{\left(s+\frac{1}{T}\right)\left(s+\frac{1}{2T}\right)}\,.
$$

(Σ: 2 Punkte)

e) Die Übertragungsfunktion hat Polstellen bei $s_{\infty,1} = -\frac{1}{T}, s_{\infty,2} = -\frac{1}{2T}$. Das System ist stets stabil, da die Konstante T laut Angabe positiv ist und damit die Pole immer links der imaginären Achse liegen. ***(Σ: 2 Punkte)***

f) Es kann entweder eine aus Teilaufgabe **d)** vorhandene, transformierbare Form von $G_2(s)$ genutzt werden oder es muss eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. In letzterem Fall entsteht die Impulsantwort aus:

$$g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_2(s)\} = \frac{1}{2T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\frac{1}{T}} + \frac{B}{s+\frac{1}{2T}}\right\}.$$

Die Parameter werden bestimmt zu $B = -1$ und $A = 2$. Durch Ablesen aus der Korrespondenztabelle ergibt sich bei beiden Lösungswegen die Impulsantwort:

$$g_2(t) = \left(\frac{1}{T}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{2T}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2T}}\right)\sigma(t)\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Durch Integration über die Impulsantwort muss sich die Sprungantwort ergeben, was durch Rechnung bestätigt wird. Für $t \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} g_2(\tau)\ \mathrm{d}\tau &= \int_{0}^{t}\left(\frac{1}{T}\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T}} - \frac{1}{2T}\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{2T}}\right)\ \mathrm{d}\tau = \left[-\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T}} + \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{2T}}\right]_0^t \\ &= -\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2T}} + 1 - 1 = h_2(t)\,.\end{aligned}$$

Für $t < 0$ ist $g_2(t) = 0$ und daher auch $h_2(t) = 0$. ***(Σ: 2 Punkte)***

h) Der Signalflussplan findet sich in Abb. L3:

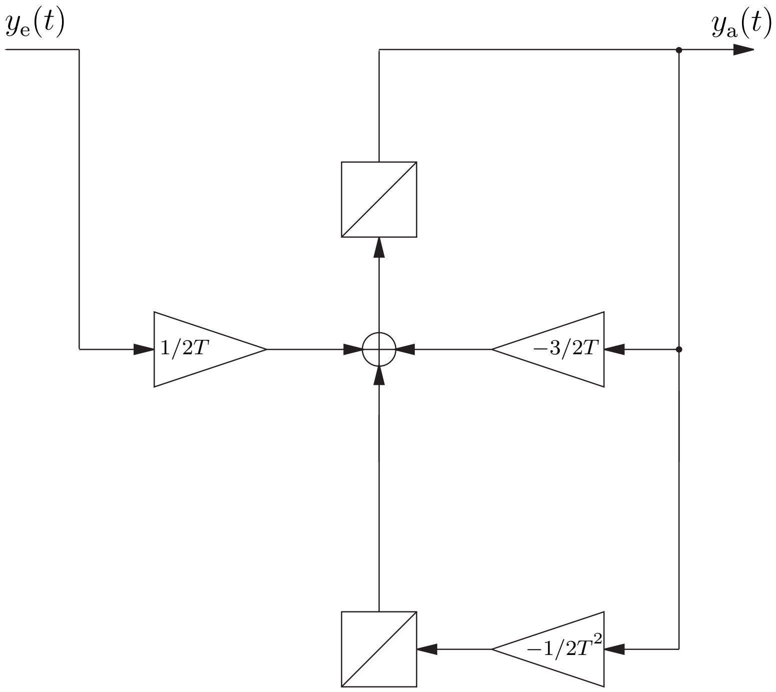

Abbildung L3: Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_2$.

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (18 Punkte)

Es sei das Betragsspektrum $|Y_1(f)|$ einer kontinuierlichen Funktion $y_1(t)$ gegeben:

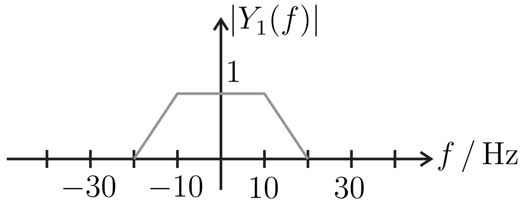

Abbildung 4: Betragsspektrum des Signals $y(t)$.

Für Frequenzen, die betragsmäßig größer oder gleich $20\,\mathrm{Hz}$ sind, enthält das Spektrum keine Signalanteile.

a) Das Signal $y_1(t)$ soll abgetastet werden. Welche Bedingung gilt für die Abtastfrequenz f_A, wenn das Abtasttheorem eingehalten werden soll? *(1 Punkt)*

b) Das Signal wird nun mit $f_{\mathrm{A},1} = 30\,\mathrm{Hz}$ abgetastet. Zeichnen Sie das Betragsspektrum $|Y_{1*}(f)|$ des abgetasteten Signals im Bereich von $-70\,\mathrm{Hz}$ bis $70\,\mathrm{Hz}$. *(3 Punkte)*

c) Geben Sie das aus dem Spektrum $Y_{1*}(f)$ resultierende Zeitsignal $y_{1*}(t)$ an. Für die Phase gilt: $\psi(f) = \arg\{Y_{1*}(f)\} = 0$. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Das ursprüngliche Signal $y_1(t)$ gemäß Abb. 4 wird nun additiv von einer Störung $r(t)$ überlagert, was in Abb. 5 illustriert ist.

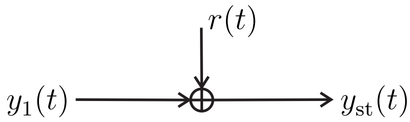

Abbildung 5: Additive Überlagerung von Nutzsignal $y_1(t)$ und Störsignal $r(t)$.

Dabei hat die Störung $r(t)$ im Frequenzbereich die in Abb. 6 ersichtliche Form.

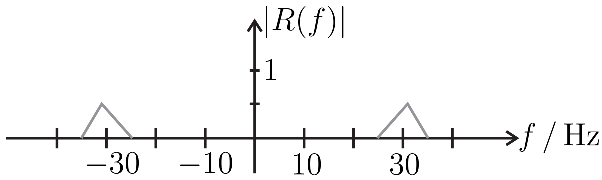

Abbildung 6: Betragsspektrum des Störsignals $r(t)$.

Das Störsignal $r(t)$ hat nur Spektralanteile im Bereich von einschließlich $25\,\mathrm{Hz}$ bis $35\,\mathrm{Hz}$ (bzw. $-25\,\mathrm{Hz}$ bis $-35\,\mathrm{Hz}$), und das Maximum des Betragsspektrums liegt bei $31\,\mathrm{Hz}$ (bzw. $-31\,\mathrm{Hz}$).

d) Skizzieren Sie das Betragsspektrum des Signals $y_\mathrm{st}(t)$. *(1 Punkt)*

Bitte Rückseite beachten!

e) Mit welcher minimalen Abtastfrequenz $f_{\mathrm{A},2}$ muss das Signal $y_{\mathrm{st}}(t)$ abgetastet werden, damit das Nutzsignal $y_1(t)$ fehlerfrei rekonstruiert werden kann? Begründen Sie Ihre Wahl! *(2 Punkte)*

f) Skizzieren Sie das Betragsspektrum der Funktion $y_{\mathrm{st}}(t)$ nach Abtastung mit $f_{\mathrm{A},2}$ im Bereich von $-60\,\mathrm{Hz}$ bis $60\,\mathrm{Hz}$. *(3 Punkte)*

Um genauere Aussagen über das Störsignal $r(t)$ treffen zu können, soll nun ausschließlich dieses Signal genauer analysiert werden. Obige Angaben zu $r(t)$ und $|R(f)|$ sind nach wie vor gültig. In einem ersten Verarbeitungsschritt soll das Störsignal unterabgetastet werden.

g) Bestimmen Sie die minimal mögliche Abtastfrequenz $f_{\mathrm{A},3}$ und skizzieren Sie das Betragsspektrum des abgetasteten Signals. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist von den vorhergehenden unabhängig.

h) Berechnen Sie die DFT für die Wertefolge $y_n = [4, 2, 1, 0, 1, 2]$. Konkrete Zahlenwerte müssen nicht berechnet werden, vereinfachen Sie Ihr Ergebnis jedoch so weit wie möglich. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Es gilt: $|Y_1(f)| = 0$ für $f \geq 20\,\text{Hz}$
Abtasttheorem: $f_\text{A} \geq 2\,B \;\rightarrow\; f_\text{A} \geq 40\,\text{Hz}$

b) Das Betragsspektrum $|Y_{1*}(f)|$ hat folgende Form:

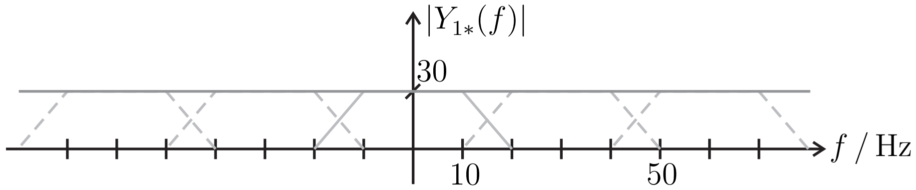

Abbildung L4: Betragsspektrum $|Y_{1*}(f)|$ des abgetasteten Signals.

c) Nach Bestimmung der Bildfunktion kann die resultierende Zeitfunktion berechnet werden.

$$Y_{1*}(f) = |Y_{1*}(f)| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\arg\{Y_{1*}(f)\}} = 30\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0} = 30 \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y_{1*}(t) = 30\,\delta(t)\,.$$

d) Das Betragsspektrum von $y_\text{st}(t)$ hat die folgende Form:

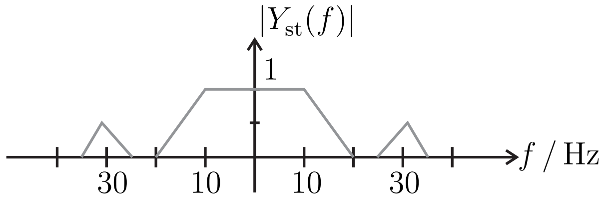

Abbildung L5: Betragsspektrum des Signals $y_\text{st}(t)$.

e) Der Nutzanteil darf nicht von der Störung überlagert werden. Es ist jedoch unproblematisch, wenn sich die Störanteile überlagern. Die Abtastfrequenz ist aus diesem Grund so zu wählen, dass der Nutzanteil um die Mittenfrequenz $f = 0$ direkt an das Störspektrum der ersten spektralen Wiederholung angrenzt.
Breite des Nutzsignals: $20\,\text{Hz}$
Breite des Gesamtspektrums: $35\,\text{Hz}$
Damit kann die minimale Abtastfrequenz zu $f_{\text{A},2} = 20\,\text{Hz} + 35\,\text{Hz} = 55\,\text{Hz}$ gewählt werden.

f) Nach Abtastung des Signals $y_\text{st}(t)$ ergibt sich das Spektrum gemäß Abbildung L6.

g) Für das unsymmetrische Spektrum der Störung gilt:
Mittenfrequenz: $f_0 = 30\,\text{Hz}$
Bandbreite: $B = 10\,\text{Hz}$
Für die Abtastfrequenz bei Unterabtastung eines unsymmetrischen Bandspektrums gilt allgemein:

$$f_\text{A} = \frac{4\,f_0}{4\,r + 1}\,.$$

Für die minimale Abtastfrequenz gilt zudem:

$$f_{\text{A,min}} > 2\,B = 20\,\text{Hz}\,.$$

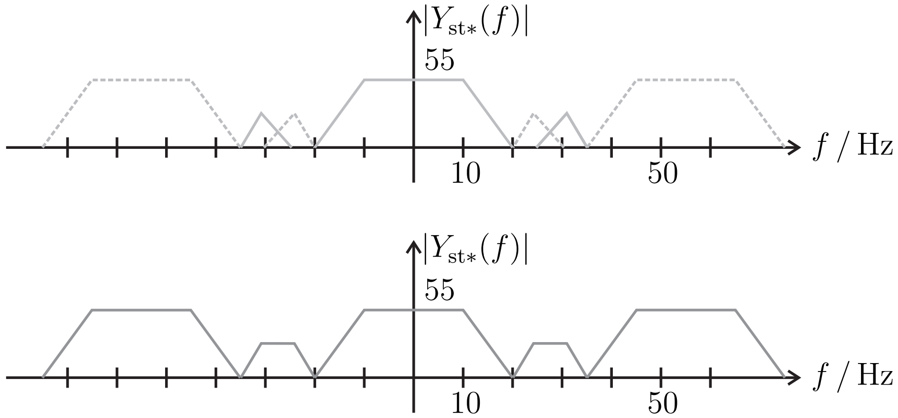

Abbildung L6: Betragsspektrum des überlagerten, abgetasteten Signals. Oben: Periodische Wiederholung der einzelnen Spektren, unten: Überlagerung der Spektren.

Damit gilt in diesem Fall für die Abtastfrequenz:

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{120}{4\,r+1}\,.$$

Nur für $r = 0$ oder $r = 1$ wird auch die Bedingung für die minimale Abtastfrequenz eingehalten. Somit wird r zu 1 gewählt, und es gilt:

$$f_{\mathrm{A,3}} = 24\,\mathrm{Hz}\,.$$

Das unterabgetastete Spektrum hat folgende Form:

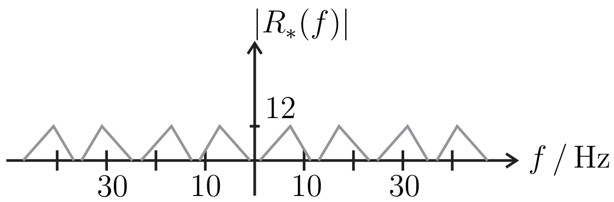

Abbildung L7: Betragsspektrum des unterabgetasteten Signals $r(t)$.

h) Mit der Definition der DFT ergibt sich für $N = 6$:

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,k\,n/N} = \sum_{n=0}^{5} y_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}\,k\,n} \\ &= 4 + 2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}\,k} + 1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{2\,\pi}{3}\,k} + 1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{4\,\pi}{3}\,k} + 2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{5\,\pi}{3}\,k} \\ &= 4 + 2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}\,k} + 1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{2\,\pi}{3}\,k} + 1\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\,\pi}{3}\,k} + 2\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}\,k} = 4 + 4\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\,k\right) + 2\ \cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\,k\right)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (16 Punkte)

Ein rekursives System 3. Ordnung sei durch die folgende Differenzengleichung beschrieben:

$$16y_{\mathrm{a},n} \quad = \quad 4y_{\mathrm{a},n-1} + 8y_{\mathrm{a},n-2} - 3y_{\mathrm{a},n-3} + 16y_{\mathrm{e},n} - 8y_{\mathrm{e},n-1} - 40y_{\mathrm{e},n-2} - 16y_{\mathrm{e},n-3}\,.$$

a) Ermitteln Sie aus der Differenzengleichung die Übertragungsfunktion $G(z)$. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen von $G(z)$. *(3 Punkte)*

Hinweis: Eine Polstelle ist durch $z_\infty = \frac{1}{2}$ gegeben, eine Nullstelle durch $z_0 = 2$.

c) Zeichen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems. *(2 Punkte)*

d) Ist dieses System stabil? **(Begründung!)** *(1 Punkt)*

e) Handelt es sich um ein Minimalphasensystem? **(Begründung!)** *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei nach wie vor obige Differenzengleichung.

f) Zeichnen Sie einen Signalflussplan in ARMA-Form für dieses System. *(3 Punkte)*

g) Wählen Sie geeignete Zustandsgrößen und stellen Sie die Zustandsraumdarstellung des Systems auf. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Nach Division durch 16, z-Transformation und Erweiterung mit z^3 folgt:

$$G(z) = \frac{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{5}{2}z - 1}{z^3 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{16}}\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion können mit Hilfe der gegebenen z_0 und z_∞ nach Polynomdivision berechnet werden. Sie ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \text{Nullstellen:} \quad & z_{0,1} = -\frac{1}{2}, \qquad z_{0,2} = -1, \qquad z_{0,3} = 2 \\ \text{Pole:} \quad & z_{\infty,1,2} = \frac{1}{2}, \qquad z_{\infty,3} = -\frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

c) Pol-Nullstellen-Diagramm:

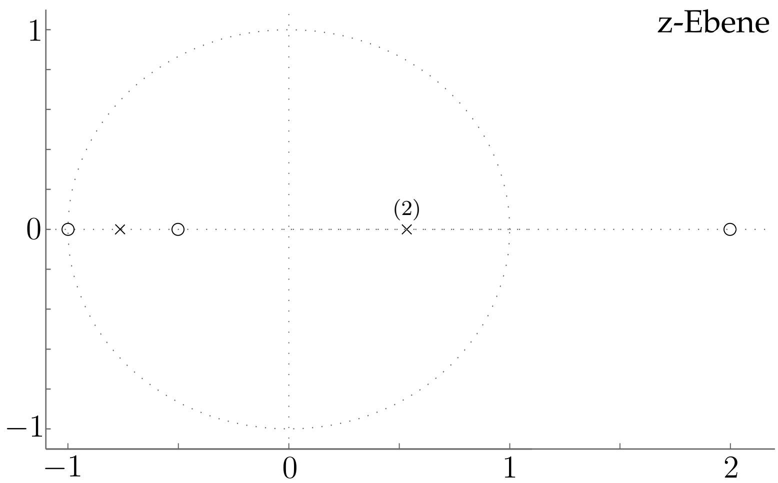

Abbildung L8: Pol-Nullstellen-Diagramm.

(Σ: 2 Punkte)

d) Das System ist stabil, da alle Polstellen im Einheitskreis liegen. ***(Σ: 1 Punkt)***

e) Das System ist nicht minimalphasig, da eine Nullstelle außerhalb des Einheitskreises liegt. ***(Σ: 1 Punkt)***

f) Signalflussplan:

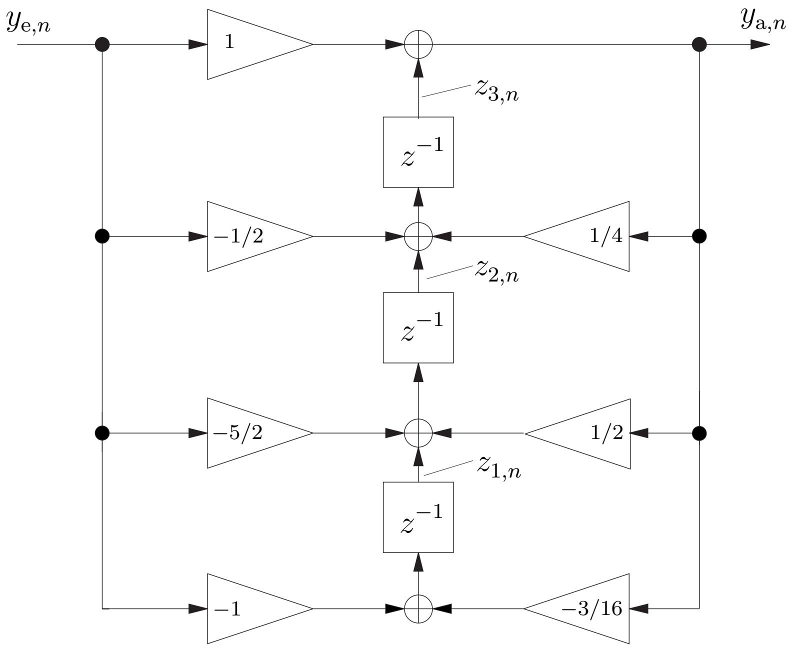

Abbildung L9: Signalflussplan.

*(Σ: **3 Punkte**)*

g) Mit der Wahl der Zustandsgrößen $z_{1,n},\ z_{2,n},\ z_{3,n}$ wie in Abb. L9 eingezeichnet, lassen sich folgende Zusammenhänge angeben:

$$\begin{aligned}
z_{1,n+1} &= -y_{e,n} - \frac{3}{16} y_{a,n} \\
z_{2,n+1} &= z_{1,n} - \frac{5}{2} y_{e,n} + \frac{1}{2} y_{a,n} \\
z_{3,n+1} &= z_{2,n} - \frac{1}{2} y_{e,n} + \frac{1}{4} y_{a,n} \\
y_{a,n} &= z_{3,n} + y_{e,n} \,.
\end{aligned}$$

Einsetzen und Zusammenfassen ergibt die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{n+1} &= \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{16} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{z}_n + \overbrace{\begin{pmatrix} -\frac{19}{16} \\ -2 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}^{\mathbf{B}} y_{e,n} \\
y_{a,n} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}_n + \underbrace{(1)}_{\mathbf{D}} y_{e,n} \,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **4 Punkte**)*