Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
13. Februar 2019

Musterlösung

Aufgabe 1: 16
Aufgabe 2: 17
Aufgabe 3: 18
Aufgabe 4: 16

Gesamtpunkte: 67

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (16 Punkte)

Gegeben sei das in Abbildung 1 dargestellte Signal $y_1(t)$. Für alle $|t| > 1$ sei $y_1(t) = 0$. Im Bereich $|t| \leq \frac{T_\mathrm{C}}{4}$ folgt das Signal einem cosinusförmigen Verlauf mit der Periodendauer T_C mit $\frac{T_\mathrm{C}}{4} < 1$.

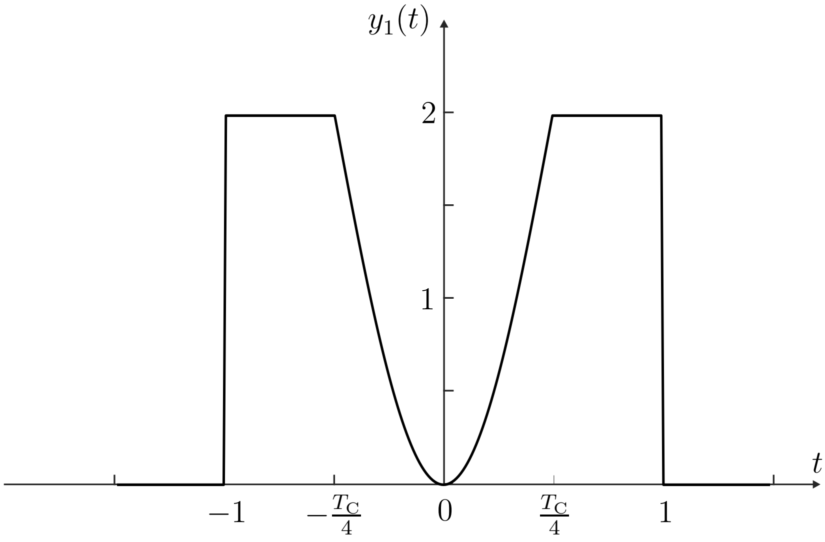

Abbildung 1: Signal $y_1(t)$.

a) Welche Aussagen können Sie über die Fourier-Transformierte $Y_1(f)$ des Signals $y_1(t)$ anhand des Signalverlaufs treffen? **(Kurze Antwort, keine Rechnung)** *(3 Punkte)*

b) Geben Sie eine mathematische Beschreibung des in Abbildung 1 dargestellten Verlaufs von $y_1(t)$ an. Verwenden Sie hierbei Hilfsfunktionen, die eine nachfolgende Anwendung der Transformationstabelle erlauben. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $Y_1(f)$ des Signals $y_1(t)$ **ohne Verwendung des Fourier-Integrals.** *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Gleichanteil des Signals $y_1(t)$ aus $Y_1(f)$. *(2 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Sie haben das Signal

$$y_2(t) = \begin{cases} t+1 & ,-1 \leq t < 0 \\ \mathrm{e}^{-\alpha t} & ,0 \leq t < \infty \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Der Verlauf ist in Abbildung 2 für $\alpha = 1$ exemplarisch angegeben.

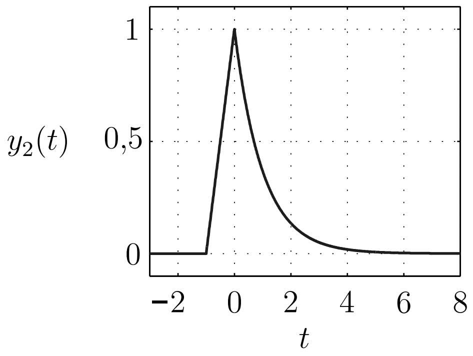

Abbildung 2: Verlauf von $y_2(t)$ für $\alpha = 1$.

e) Wenn $y_2(t)$ absolut integrierbar ist, konvergiert auch das Fourier-Integral. Was muss für die Variable α allgemein gelten, damit $y_2(t)$ absolut integrierbar ist? Weisen Sie durch Rechnung nach. *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $Y_2(f)$ des Signals $y_2(t)$ und verwenden Sie hierbei das **Fourier-Integral.** *(4 Punkte)*

Hinweis: $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{ax}\;\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax-1)\,.$

Lösung

a) Es lassen sich folgende Aussagen über $Y_1(f)$ treffen:

- $y_1(t)$ ist reellwertig und gerade $\quad\rightarrow\quad$ $Y_1(f)$ ist reellwertig und gerade,
- $y_1(t) \geq 0 \quad\rightarrow\quad |Y_1(f)| \leq Y_1(0)$,
- $\lim\limits_{f\to\infty} |Y_1(f)| = 0$ (Lemma von Riemann-Lebesgue).

b) Das Signal $y_1(t)$ lässt sich mit Hilfe einer Rechteckfunktion beschreiben, von der eine Cosinus-Halbwelle subtrahiert wird:

$$y_1(t) = 2r_2(t) - 2\cos(2\pi\frac{t}{T_\mathrm{C}}) \cdot r_{\frac{T_\mathrm{C}}{2}}(t)\,.$$

c) Die Fourier-Transformierte berechnet sich mit Hilfe der Korrespondenztabelle wie folgt:

$$y_1(t) = 2r_2(t) - 2\cos(2\pi\frac{t}{T_\mathrm{C}}) \cdot r_{\frac{T_\mathrm{C}}{2}}(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
Y_1(f) &= 4\,\mathrm{sinc}(2f) - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\delta\left(f+\frac{1}{T_\mathrm{C}}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{T_\mathrm{C}}\right)\right) * \frac{T_\mathrm{C}}{2}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_\mathrm{C}}{2}\right)\\
&= 4\,\mathrm{sinc}(2f) - \frac{T_\mathrm{C}}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\left(f+\frac{1}{T_\mathrm{C}}\right)\frac{T_\mathrm{C}}{2}\right) - \frac{T_\mathrm{C}}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\left(f-\frac{1}{T_\mathrm{C}}\right)\frac{T_\mathrm{C}}{2}\right)\\
&= 4\,\mathrm{sinc}(2f) - \frac{T_\mathrm{C}}{2}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{fT_\mathrm{C}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{sinc}\left(\frac{fT_\mathrm{C}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

d) Der Gleichanteil berechnet sich aus $Y_1(f)$ an der Stelle $f=0$:

$$\begin{aligned}
Y_1(0) &= 4\,\mathrm{sinc}(0) - \frac{T_\mathrm{C}}{2}\left(\mathrm{sinc}\left(0+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{sinc}\left(0-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= 4 - \frac{T_\mathrm{C}}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= 4 - \frac{2T_\mathrm{C}}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

e) Das Fourier-Integral konvergiert auf jeden Fall, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_2(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Die abschnittsweise definierte Funktion $y_2(t)$ muss jedoch nur für den Bereich $t>0$ untersucht werden, da die Funktion im anderen Intervall begrenzt ist. Hier gilt:

$$\int_0^{\infty} |\mathrm{e}^{-\alpha t}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]_0^{\infty}\,.$$

Dieses Integral hat somit nur einen endlichen Wert, wenn $\alpha > 0$.

f) Die Fourier-Transformierte lautet:

$$\begin{aligned}
Y_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(t+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}}{(-\mathrm{j}2\pi f)^2}(-\mathrm{j}2\pi f t - 1)\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{-\mathrm{j}2\pi f}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{-(\mathrm{j}2\pi f + \alpha)}\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}2\pi f + \alpha)\,t}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}(-\mathrm{j}2\pi f + 1)\right) + \mathrm{j}\frac{1}{2\pi f}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}\right) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f + \alpha} \\
&= \frac{1}{(2\pi f)^2}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}\right) + \mathrm{j}\frac{1}{2\pi f} + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f + \alpha}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches LTI-System $\mathcal{S}_1$ mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s^2+s+c}\,.$$

a) Berechnen Sie die Differentialgleichung des Systems $\mathcal{S}_1$. Nehmen Sie hierbei verschwindende Anfangswerte an. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie den Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_1$ in ARMA-Form. *(3 Punkte)*

c) Geben Sie den Wertebereich für c an, für den das System $\mathcal{S}_1$ stabil und nicht schwingfähig ist. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei der in Abbildung 3 dargestellte Pol-Nullstellen-Plan des Systems $\mathcal{S}_2$.

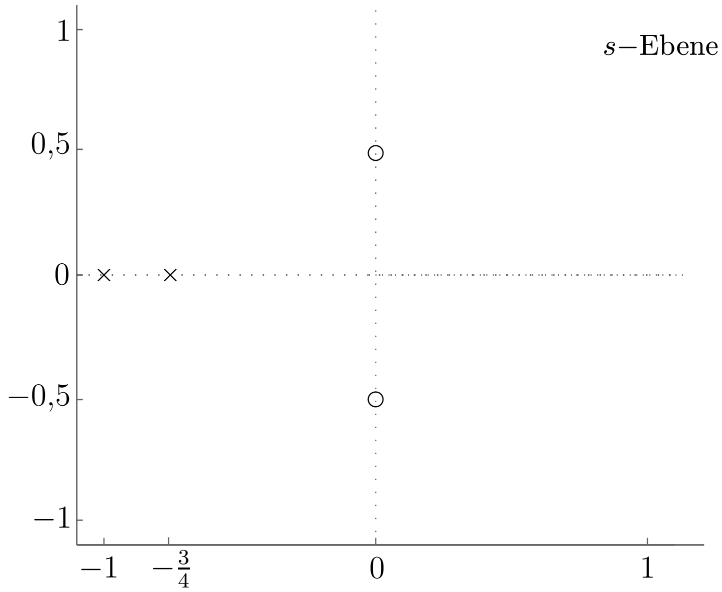

Abbildung 3: Pol-Nullstellen-Plan des Systems $\mathcal{S}_2$.

d) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ des Systems $\mathcal{S}_2$ an. Die stationäre Verstärkung soll -1 betragen. *(2 Punkte)*

e) Es seien nun die Systeme $\mathcal{S}_3$ und $\mathcal{S}_4$ mit ihren jeweiligen Übertragungsfunktionen gegeben:

$$G_3(s) = \frac{\frac{3}{2}s + \frac{3}{4}}{s+\frac{3}{4}}\,,$$

$$G_4(s) = \frac{\frac{3}{2}s}{s+1}\,.$$

Das System $\mathcal{S}_5$ entsteht durch die Parallelschaltung der drei Systeme $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ und $\mathcal{S}_4$. Wie lautet die Übertragungsfunktion $G_5(s)$ des Systems $\mathcal{S}_5$? Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. *(2 Punkte)*

f) Dem System $\mathcal{S}_5$ werde nun das Eingangssignal $y_\mathrm{e}(t) = (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}) \cdot \sigma(t)$ zugeführt. Berechnen Sie das Ausgangssignal $y_\mathrm{a}(t)$. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ gibt das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal an:

$$G_1(s) = \frac{Y_\mathrm{a}(s)}{Y_\mathrm{e}(s)}\,.$$

Nach Umstellung der Gleichung folgt:

$$Y_\mathrm{a}(s)(s^2 + s + c) = Y_\mathrm{e}(s)(s - 1)\,.$$

Mit Hilfe des Differentiationssatzes lässt sich die Gleichung in den Zeitbereich überführen, was direkt die gesuchte Differentialgleichung liefert:

$$\ddot{y}_\mathrm{a}(t) + \dot{y}_\mathrm{a}(t) + cy_\mathrm{a}(t) = \dot{y}_\mathrm{e}(t) - y_\mathrm{e}(t)\,.$$

b) Zur Darstellung des Signalflussplans wird die Differentialgleichung zweimal integriert, sodass sich die folgende Gleichung für $y_\mathrm{a}(t)$ ergibt:

$$y_\mathrm{a}(t) = \int y_\mathrm{e}(t) - \int\int y_\mathrm{e}(t) - \int y_\mathrm{a}(t) - c\int\int y_\mathrm{a}(t)\,.$$

Der Signalflussplan ist in Abbildung L1 dargestellt. Ein Weglassen des Zweigs mit Verstärkungsfaktor 0 und des Verstärkersymbols bei Verstärkungsfaktor 1 ist möglich.

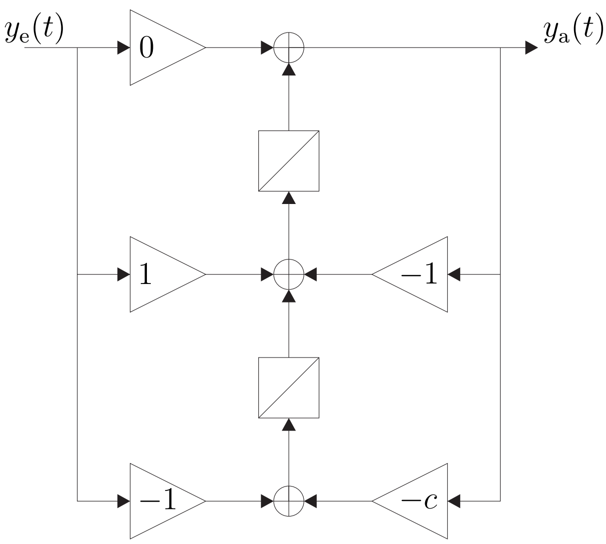

Abbildung L1: ARMA-Darstellung des Systems $\mathcal{S}_1$.

c) Der Parameter c beeinflusst die Lage der Polstellen. Die Forderung nach Stabilität ist erfüllt, wenn alle Polstellen in der offenen linken Halbebene liegen. Ferner ist gefordert, dass das System nicht schwingfähig ist, was erfüllt ist, wenn die Polstellen reellwertig sind. Beide Bedingungen werden wie folgt ausgewertet:

$$s_{\infty 1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}\,.$$

Reellwertig sind die Polstellen folglich, wenn $1 - 4c \geq 0$ und folglich $c \leq \frac{1}{4}$ ist. Zur Überprüfung der Stabilität wird die rechte Polstelle untersucht. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_{\infty 2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-4c} &< 0 \\ \sqrt{1-4c} &< 1 \\ c &> 0. \end{aligned}$$

Beide Bedingungen für c sind nur im Intervall $0 < c \leq \frac{1}{4}$ erfüllt.

d) Dem Pol-Nullstellen-Plan lassen sich folgende Pole und Nullstellen ablesen:

$$\begin{aligned} s_{0,1} &= \frac{\mathrm{j}}{2}, \\ s_{0,2} &= -\frac{\mathrm{j}}{2}, \\ s_{\infty,1} &= -1, \\ s_{\infty,2} &= -\frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G_2(s) = k \cdot \frac{(s - \frac{\mathrm{j}}{2})(s + \frac{\mathrm{j}}{2})}{(s+1)(s+\frac{3}{4})} = k \cdot \frac{s^2 + \frac{1}{4}}{(s+1)(s+\frac{3}{4})}\,.$$

Der Verstärkungsfaktor k muss noch bestimmt werden. Es ist die stationäre Verstärkung von $G(0) = -1$ gefordert, sodass folgt:

$$G_2(0) = k \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = k \cdot \frac{1}{3} = -1 \quad \rightarrow \quad k = -3.$$

e) Die Übertragungsfunktion einer Parallelschaltung errechnet sich aus der Summe der einzelnen Übertragungsfunktionen. Somit ergibt sich für das System $\mathcal{S}_5$:

$$\begin{aligned} G_5(s) &= G_2(s) + G_3(s) + G_4(s) \\ &= -\frac{3s^2 + \frac{3}{4}}{(s+1)(s+\frac{3}{4})} + \frac{\frac{3}{2}s + \frac{3}{4}}{s + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{2}s}{s+1} \\ &= \frac{-3s^2 - \frac{3}{4} + (\frac{3}{2}s + \frac{3}{4})(s+1) + \frac{3}{2}s(s+\frac{3}{4})}{(s+1)(s+\frac{3}{4})} \\ &= \frac{\frac{27}{8}s}{(s+1)(s+\frac{3}{4})}\,. \end{aligned}$$

f) Das Ausgangssignal berechnet sich am einfachsten im Laplace-Bereich. Die Laplace-Transformierte des Signals $y_{\mathrm{e}}(t)$ kann der Korrespondenztabelle entnommen werden:

$$Y_{\mathrm{e}}(s) = \frac{1}{s(1+4s)}\,.$$

Die Laplace-Transformierte des Ausgangssignals ergibt sich aus Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $G_5(s)$:

$$\begin{aligned} Y_\mathrm{a}(s) &= G_5(s) \cdot Y_\mathrm{e}(s) \\ &= \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+\frac{3}{4})(1+4s)} \\ &= \frac{27}{32} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+\frac{3}{4})(s+\frac{1}{4})} \,. \end{aligned}$$

Zur Rücktransformation ist eine Partialbruchzerlegung notwendig. Der Ansatz

$$\frac{27}{32} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+\frac{3}{4})(s+\frac{1}{4})} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+\frac{3}{4}} + \frac{C}{s+\frac{1}{4}}$$

führt nach Koeffizientenvergleich zu:

$$\begin{aligned} A &= \frac{9}{2}, \\ B &= -\frac{27}{4}, \\ C &= \frac{9}{4} \,. \end{aligned}$$

Das Ausgangssignal $y_\mathrm{a}(t)$ ergibt sich durch Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenztabelle:

$$y_\mathrm{a}(t) = \left(\frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{27}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}t} + \frac{9}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \right) \cdot \sigma(t) \,.$$

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (18 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_1(t) = 4\,\mathrm{sinc}^2(2t)$, welches im Folgenden abgetastet wird.

a) Geben Sie die Fourier-Transformierte des Signals $y_1(t)$ an und skizzieren Sie das Betragsspektrum. *(2 Punkte)*

b) Welche Abtastfrequenz ist erforderlich, sodass eine fehlerfreie Rekonstruktion des Signals möglich ist? *(1 Punkt)*

c) Was passiert bei Verletzung Ihrer in **b)** formulierten Bedingung für die Abtastfrequenz? Wie wird dieses Phänomen bezeichnet? *(1 Punkt)*

d) Es sei nun ein Rekonstruktionsfilter gegeben, dessen Übertragungsverhalten durch folgende Rechteckfunktion beschrieben wird:

$$G(f) = g_{\mathrm{Filt}} \cdot r_{12}(f), \quad g_{\mathrm{Filt}} \in \mathbb{R}\,.$$

Was muss für die Abtastfrequenz f_A und die Filterverstärkung g_{Filt} gelten, wenn dieses Filter eine fehlerfreie Rekonstruktion des Signals $y_1(t)$ ermöglichen soll? *(2 Punkte)*

e) Die Abtastfrequenz werde zu $f_\mathrm{A} = 4$ festgelegt, ferner gilt: $g_{\mathrm{Filt}} = \frac{1}{4}$. Zeichnen Sie das Betragsspektrum des rekonstruierten Signals. *(2 Punkte)*

f) Geben Sie das rekonstruierte Signal $\hat{y}(t)$ an. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal $y_{2,n} = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Die Abtastfrequenz liegt bei $f_\mathrm{A} = 1\,\mathrm{kHz}$.

g) Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $Y_{2,k}$ des Signals $y_{2,n}$ und skizzieren Sie $\left|Y_{2,k}\right|$. *(4 Punkte)*

Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

h) Im weiteren Vorgehen soll eine Frequenzauflösung von $0{,}4\,\mathrm{Hz}$ erreicht werden. Die Abtastfrequenz sei unveränderlich. Wie muss die Messung angepasst werden? *(2 Punkte)*

i) Es soll nun die FFT zur Berechnung angewendet werden. Welche Anpassung ist hierfür nötig? *(1 Punkt)*

Lösung

a) Das Spektrum des Signals $y_1(t)$ lässt sich mit Hilfe der Korrespondenztabelle angeben:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 4\,\mathrm{sinc}^2(2t) \\ &= 2 \cdot 2\mathrm{si}^2(\pi 2t) \\ &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \\ Y_1(f) &= 2d_4(f)\,. \end{aligned}$$

Das Betragsspektrum $|Y_1(f)|$ ist in Abbildung L2 dargestellt.

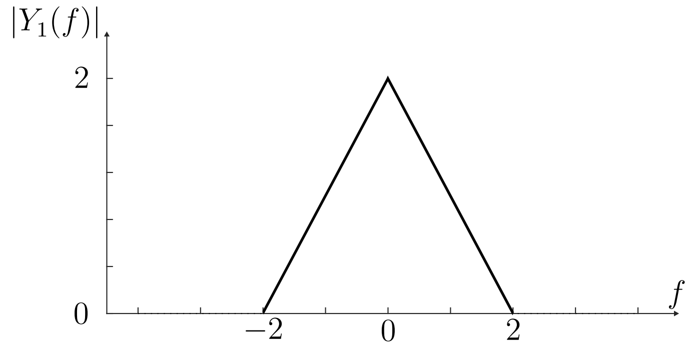

Abbildung L2: Betragsspektrum $|Y_1(f)|$.

b) Die Abtastfrequenz muss mindestens das Doppelte der maximalen Signalfrequenz betragen. Für das Spektrum $Y_1(f)$ gilt:

$$Y_1(f) = 0, \quad |f| \geq 2.$$

Somit gilt für die Abtastfrequenz:

$$f_\mathrm{A} \geq 4.$$

c) Bei Unterschreitung der im Abtasttheorem geforderten Abtastfrequenz kommt es zur Überlappung des Spektrums und dessen periodischen Fortsetzungen. Dies wird als Aliasing bezeichnet.

d) Das gegebene Filter liefert $G(f) = 0, \quad |f| > 6$. Zur fehlerfreien Rekonstruktion des Signals muss sichergestellt werden, dass die periodischen Wiederholungen des Spektrums außerhalb des Durchlassbereichs des Filters liegen, was für $f_\mathrm{A} \geq 8$ erfüllt ist. Da eine Abtastung zur Gewichtung des Spektrums mit dem Faktor f_A führt, muss die Filterverstärkung dies kompensieren, was die Bedingung $g_\mathrm{Filt} = f_\mathrm{A}^{-1}$ liefert.

e) Das Betragsspektrum des rekonstruierten Signals $\left|\hat{Y}_1(f)\right|$ ist in Abbildung L3 dargestellt.

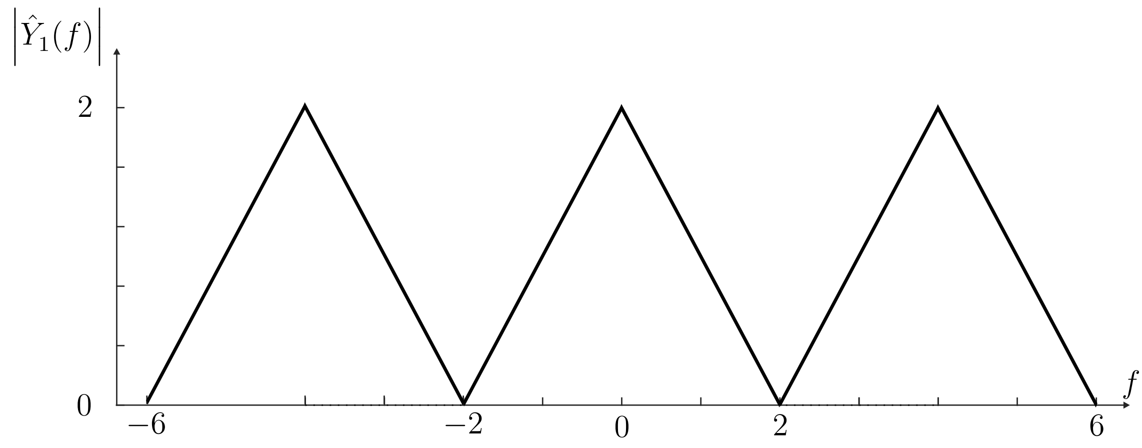

Abbildung L3: Betragsspektrum $\left|\hat{Y}_1(f)\right|$.

f) Das Spektrum besteht aus drei Dreieckfunktionen. Die Rücktransformation ergibt sich aus der Korrespondenztabelle und dem Modulationssatz:

$$\hat{Y}_1(f) = 2d_4(f) + 2d_4(f-4) + 2d_4(f+4)$$

$$\bullet\!-\!\!\!-\!\circ$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(t) &= 4\,\mathrm{sinc}^2(2t)\cdot\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi 4t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi 4t}\right)\\ &= 4\,\mathrm{sinc}^2(2t)\cdot\left(1 + 2\cos(2\pi 4t)\right)\ .\end{aligned}$$

g) Die diskrete Fourier-Transformation berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}Y_{2,k} &= \sum_{n=0}^{5} y_{2,n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{n}{6}}\\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{1}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{2}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{4}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k\frac{5}{6}}\\ &= 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}\sin\left(2\pi\frac{k}{6}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{j}\sin\left(2\pi\frac{2k}{6}\right)\\ &= (1, 1+3\,\mathrm{j}, 1, 1, 1, 1-3\,\mathrm{j})\ .\end{aligned}$$

Der Betrag $\left|Y_{2,k}\right|$ ist in Abbildung L4 skizziert.

h) Die Frequenzauflösung ist definiert als $\Delta f = \frac{f_\mathrm{A}}{N}$, wobei N die Anzahl der Abtastpunkte ist. Um die Frequenzauflösung bei unveränderlicher Abtastfrequenz zu erhöhen, muss die Anzahl der Abtastpunkte vergrößert werden.

Es folgt, dass mindestens

$$N = \frac{f_\mathrm{A}}{\Delta f} = \frac{1000}{\frac{4}{10}} = 2500$$

Abtastwerte vorliegen müssen, die Beobachtungszeit also mindestens 2,5 s betragen muss.

i) Für die Verwendung der FFT muss für die Anzahl der Abtastpunkte gelten $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Unter Berücksichtigung der geforderten Frequenzauflösung ist die Anzahl der Abtastpunkte auf $N = 2^{12} = 4096$ festzulegen. Dies kann mit einer längeren Beobachtungsdauer oder mit Hilfe von Zero-Padding erreicht werden.

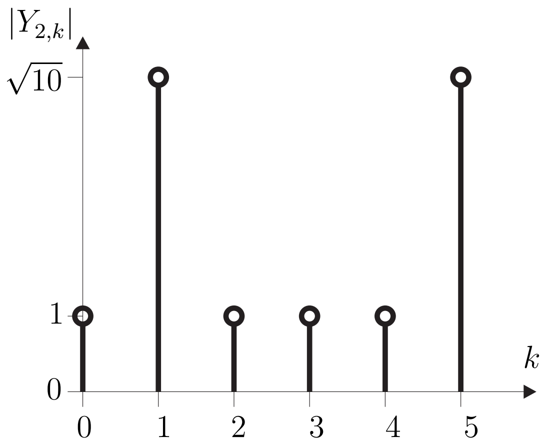

Abbildung L4: 6-Punkte-DFT von $y_{2,n}$.

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (16 Punkte)

Gegeben sei das zeitdiskrete LTI-System $\mathcal{S}_1$ mit der Impulsantwort:

$$g_n = n \cdot 2^{-n} \cdot \sigma_n + \frac{1}{2}\delta_n \,.$$

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion des kausalen Systems $\mathcal{S}_1$ an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie den Pol-Nullstellen-Plan des Systems $\mathcal{S}_1$. *(3 Punkte)*

c) Handelt es sich um ein Minimalphasensystem? **(Begründung!)** *(2 Punkte)*

d) Wie müssen Sie die Lage der aus **b)** bekannten Pol- oder Nullstellen qualitativ verändern, sodass bei der Frequenz $f = \frac{f_\mathrm{A}}{4}$ eine sehr starke Dämpfung vorliegt? **(Kurze Antwort, keine Rechnung!)** *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitdiskrete Ausgangssignal eines Systems im z-Bereich:

$$Y_\mathrm{a}(z) = \frac{\frac{3}{4}z + \frac{3}{2}}{z^2 + 5z + 4} \,.$$

e) Geben Sie die möglichen Konvergenzbereiche von $Y_\mathrm{a}(z)$ an . *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die akausale Zeitfolge $y_{\mathrm{a},n}$ durch Rückführung auf die geometrische Reihe. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Die Übertragungsfunktion $G(z)$ kann nach kurzer Umformung direkt aus der Korrespondenztabelle entnommen werden:

$$
\begin{aligned}
g_n &= n \cdot 2^{-n} \cdot \sigma_n + \frac{1}{2}\delta_n \\
&= n \cdot \frac{1}{2}^n \cdot \sigma_n + \frac{1}{2}\delta_n
\end{aligned}
$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}}{(z-\frac{1}{2})^2}\,.
\end{aligned}
$$

b) Das System besitzt Nullstellen bei $z_{0,1/2} = \pm\mathrm{j}\,\frac{1}{2}$ sowie eine doppelte Polstelle bei $z_{\infty 1,2} = \frac{1}{2}$. Der sich ergebende Pol-Nullstellen-Plan ist in Abbildung L5 zu sehen.

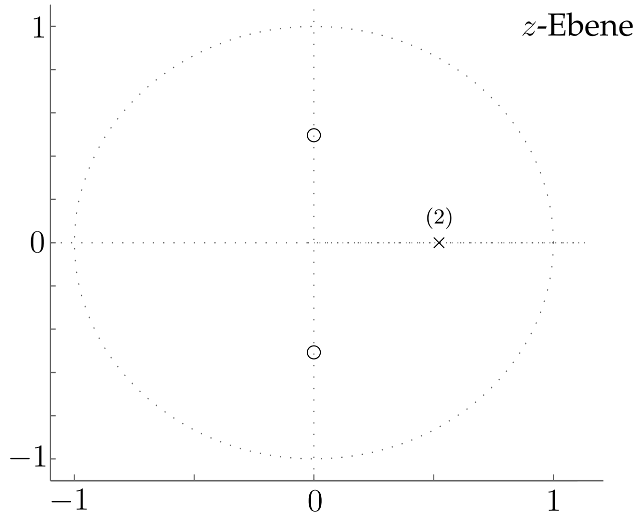

Abbildung L5: Pol-Nullstellen-Plan des zeitdiskreten Systems.

c) Das System ist minimalphasig, denn das System ist stabil ($|z_{\infty,1/2}| < 1$) und alle Nullstellen erfüllen die Bedingung $|z_{0,1/2}| \leq 1$.

d) Die Frequenz $\frac{f_A}{4}$ liegt in der z-Ebene bei j. Für die Berechnung des Amplitudengangs bei dieser Frequenz ist der Abstand zu den Nullstellen von Relevanz. Eine Verschiebung der Nullstellen zu $z_{0,1/2} = \pm\mathrm{j}$ würde den Übertragungsfaktor 0 und somit die geforderte Dämpfung liefern.

e) Die Polstellen von $Y_\mathrm{a}(z)$ liegen bei $z_{\infty,1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}$ und somit bei $z_{\infty,1} = -4$ und $z_{\infty,2} = -1$. Die Konvergenzgebiete lauten folglich:

- 1. Konvergenzgebiet: $|z| < 1$,
- 2. Konvergenzgebiet: $1 < |z| < 4$,
- 3. Konvergenzgebiet: $|z| > 4$.

f) Die akausale Zeitfolge ergibt sich aus der Rücktransformation von $Y_\mathrm{a}(z)$ im Konvergenzgebiet $1 < |z| < 4$. Zur Rückführung auf geometrische Reihen ist zunächst eine Partialbruchzerlegung erforderlich:

$$Y_\mathrm{a}(z) = \frac{\frac{3}{4}z + \frac{3}{2}}{(z+1)(z+4)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+4}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich führt zu $A = \frac{1}{4}$ und $B = \frac{1}{2}$ und es folgt:

$$Y_\mathrm{a}(z) = \frac{\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{z+4}\,.$$

Für das Konvergenzgebiet $1 < |z| < 4$ sind die folgenden Umformungen nötig, sodass eine Rückführung auf eine Reihe erfolgen kann:

$$\begin{aligned}
Y_\mathrm{a}(z) &= \frac{1}{4z}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} + \frac{1}{8}\frac{1}{1-(-\frac{z}{4})} \\
&= \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, z^{-n-1} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n z^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\, z^{-k} + \frac{1}{8}\sum_{k'=-\infty}^{0}(-4)^{k'}\, z^{-k'}
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{a},n} &= \frac{1}{4}(-1)^{n-1}\,\sigma_{n-1} + \frac{1}{8}(-4)^n\,\sigma_{-n} \\
&= \frac{1}{4}(-1)^{n-1}\,\sigma_{n-1} - \frac{1}{2}(-4)^{n-1}\,\sigma_{-n}\,.
\end{aligned}$$