Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Signale und Systeme
11. Februar 2020

Musterlösung

Aufgabe 1: 18
Aufgabe 2: 17
Aufgabe 3: 16
Aufgabe 4: 17

Gesamtpunkte: 68

Aufgabe 1: Kontinuierliche Signale (18 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_1(t) = |\cos(2\pi t)|$.

a) Skizzieren Sie das Signal $y_1(t)$ im Bereich $-1 \leq t \leq 1$. *(2 Punkte)*

b) Welche Periodendauer weist das Signal $y_1(t)$ auf? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe des Signals $y_1(t)$. Geben Sie eine allgemeine Darstellung für die Koeffizienten c_k in Abhängigkeit von k an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. *(5 Punkte)*

d) Es soll nun ein Signal $y_G(t)$ synthetisiert werden, welches lediglich den bei der Grundfrequenz liegenden Anteil des Signals $y_1(t)$ enthält. Berechnen Sie das Signal $y_G(t)$. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $y_2(t) = \cos^2(t)$, welches nur für $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ definiert ist. Außerhalb dieses Bereichs sei das Signal $y_2(t) = 0$. Das Signal $y_2(t)$ ist in Abbildung 1 skizziert.

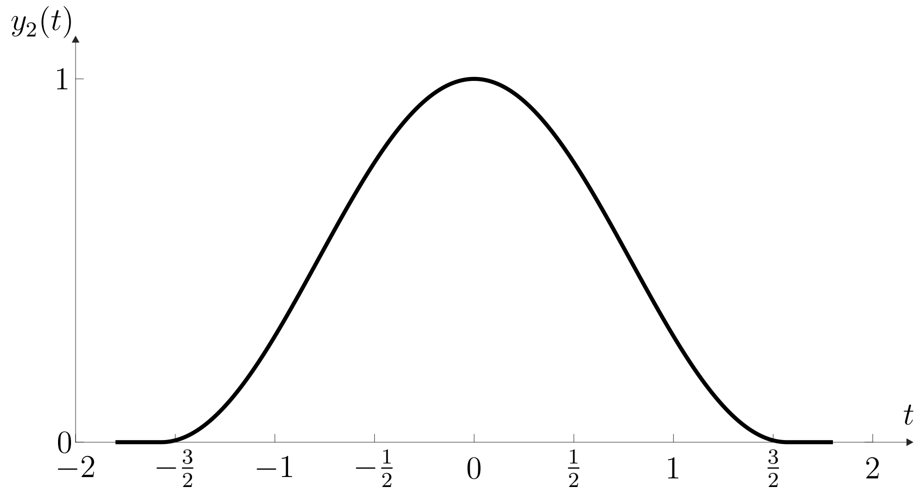

Abbildung 1: Signal $y_2(t)$.

e) Treffen Sie anhand der Signalform von $y_2(t)$ zwei Aussagen über die Eigenschaften der Fourier-Transformierten des Signals. *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $Y_2(f)$ des Signals $y_2(t)$ **ohne Verwendung des Fourier-Integrals.** *(4 Punkte)*

g) Berechnen Sie den Gleichanteil des Signals $y_2(t)$. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Das Signal $y_1(t)$ ist in Abbildung L1 dargestellt.

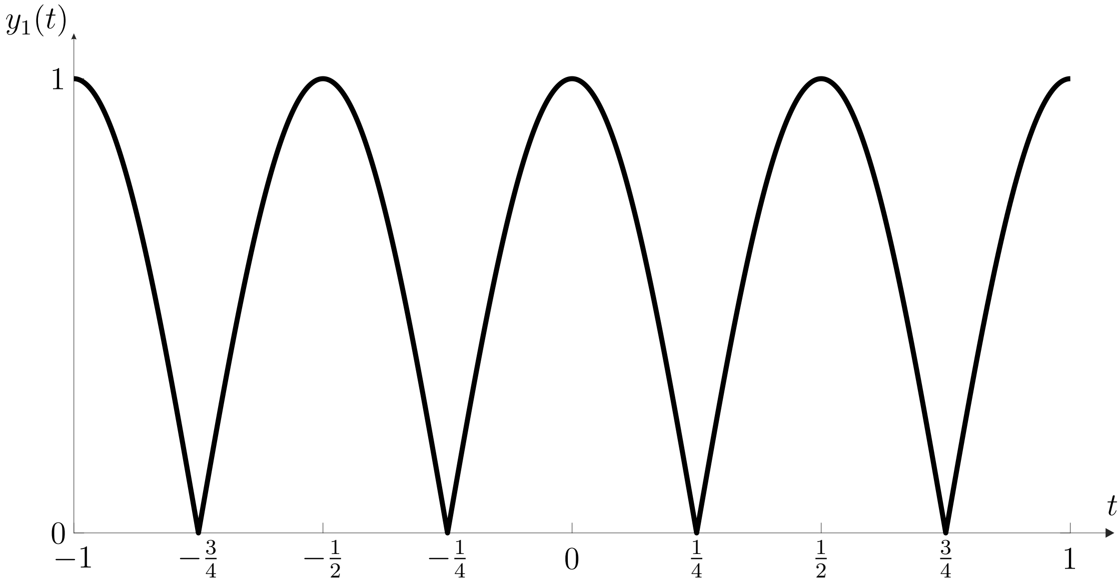

Abbildung L1: Signal $y_1(t)$.

(Σ: 2 Punkte)

b) Die Periodendauer beträgt $T = \frac{1}{2}$. ***(Σ: 1 Punkt)***

c) Die komplexen Fourier-Koeffizienten berechnen sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{T} t} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi t} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,4\pi k t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi t (1-2k)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi t (1+2k)} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi(1-2k)} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi t(1-2k)} - \frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi(1+2k)} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi t(1+2k)} \right]_{t=-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\,2} \cdot \frac{1}{\pi(1-2k)} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}(1-2k)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}(1-2k)} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{\mathrm{j}\,2} \cdot \frac{1}{\pi(1+2k)} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}(1+2k)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}(1+2k)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}(1-2k) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}(1+2k) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2} - k \right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2} + k \right) \right) .
\end{aligned}
$$

(Σ: 5 Punkte)

d) Die Grundfrequenzanteile werden durch die komplexen Schwingungen für $k = \pm 1$ abgebildet. Es erfolgt daher zunächst die Berechnung der Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}-1\right)+\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}+\frac{-1}{\frac{3\pi}{2}}\right)\\
&= \frac{2}{3\pi}\,,\\
c_{-1} &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)\\
&= \frac{2}{3\pi}\,.
\end{aligned}
$$

Das Signal $y_\mathrm{G}(t)$ ergibt sich durch Anwendung der Synthesegleichung für $k = \pm 1$:

$$
\begin{aligned}
y_\mathrm{G}(t) &= c_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi\frac{1}{T}t} + c_{-1}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\frac{1}{T}t}\\
&= \frac{2}{3\pi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4\pi t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,4\pi t}\right)\\
&= \frac{4}{3\pi}\cos(4\pi t)\,.
\end{aligned}
$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

e) Mögliche Aussagen sind:

- $y_2(t)$ ist reellwertig und gerade. $\rightarrow$ $Y_2(f)$ ist reellwertig und gerade.
- $y_2(t)$ ist nichtnegativ. $\rightarrow$ $|Y_2(f)| \leq Y_2(0)$.
- $y_2(t)$ ist zeitkontinuierlich und nicht periodisch. $\rightarrow$ $Y_2(f)$ ist frequenzkontinuierlich und nicht periodisch.

(Es sind zwei Aussagen verlangt.) *(Σ: **2 Punkte**)*

f) Zunächst wird das Signal $y_2(t)$ in eine für alle t gültige Form gebracht:

$$y_2(t) = \cos^2(t)\cdot r_\pi(t)\,.$$

Nun kann mit Hilfe der Korrespondenztabelle und des Faltungssatzes die Berechnung des Spektrums $Y_2(f)$ erfolgen:

$$y_2(t) = \cos^2(t)\cdot r_\pi(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$
\begin{aligned}
Y_2(f) &= \frac{1}{2}\left(\delta\left(f+\tfrac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f-\tfrac{1}{2\pi}\right)\right) * \frac{1}{2}\left(\delta\left(f+\tfrac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f-\tfrac{1}{2\pi}\right)\right) * \pi\operatorname{sinc}(\pi f)\\
&= \left(\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\left(\delta\left(f+\frac{1}{\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{\pi}\right)\right)\right) * \pi\operatorname{sinc}(\pi f)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sinc}(\pi f)+\frac{1}{2}\left(\operatorname{sinc}(\pi f-1)+\operatorname{sinc}(\pi f+1)\right)\right)\,.
\end{aligned}
$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

g) Der Gleichanteil berechnet sich für $f = 0$ zu:

$$Y_2(0) = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sinc}(0) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sinc}(-1) + \operatorname{sinc}(1)\right)\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

Aufgabe 2: Kontinuierliche Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches LTI-System $\mathcal{S}_1$, von dem nur folgende Zustandsraumdarstellung bekannt sei:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{3} \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_\mathrm{e}(t)$$

$$y_\mathrm{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + (0)\, y_\mathrm{e}(t)\,.$$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ des Systems $\mathcal{S}_1$. Nehmen Sie verschwindende Anfangswerte an. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie den Pol-Nullstellen-Plan des Systems $\mathcal{S}_1$. *(2 Punkte)*

c) Handelt es sich beim System $\mathcal{S}_1$ um ein Hochpass-, Tiefpass- oder Bandpassfilter? **(Begründung!)** *(2 Punkte)*

d) Ist das System $\mathcal{S}_1$ stabil? **(Begründung!)** *(1 Punkt)*

e) Wie verhält sich die Impulsantwort des Systems $\mathcal{S}_1$ an der Stelle $0+$? **(Kurze Rechnung oder Begründung!)** *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei das System $\mathcal{S}_2$, welches durch seine Differentialgleichung beschrieben wird:

$$-4\ddot{y}_\mathrm{e}(t) - \frac{9}{2}\dot{y}_\mathrm{e}(t) + y_\mathrm{e}(t) = \ddot{y}_\mathrm{a}(t) + 2\dot{y}_\mathrm{a}(t)\,.$$

Das System befinde sich zu Beginn in Ruhe.

f) Erstellen Sie den Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_2$ in ARMA-Form. *(3 Punkte)*

g) Das System $\mathcal{S}_2$ werde nun mit dem Eingangssignal $y_\mathrm{e}(t)$ belastet:

$$y_\mathrm{e}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sigma(t)\,.$$

Berechnen Sie das Ausgangssignal $y_\mathrm{a}(t)$. *(6 Punkte)*

Lösung

a) Aus der gegebenen Zustandsraumdarstellung erfolgt die Berechnung der Übertragungsfunktion $G_1(s)$ zu:

$$\begin{aligned}
G_1(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \\
&= (0,1)\begin{pmatrix} s-1 & \frac{11}{3} \\ -3 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \\
&= (0,1)\frac{1}{(s-1)(s+4)+11}\begin{pmatrix} s+4 & -\frac{11}{3} \\ 3 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+3s+7}(0,1)\begin{pmatrix} s+4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{s^2+3s+7}\,.
\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ besitzt keine Nullstellen und folgende Polstellen:

$$s_{\infty,1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{19}}{2}\,.$$

Der Pol-Nullstellen-Plan ist in Abb. L2 dargestellt.

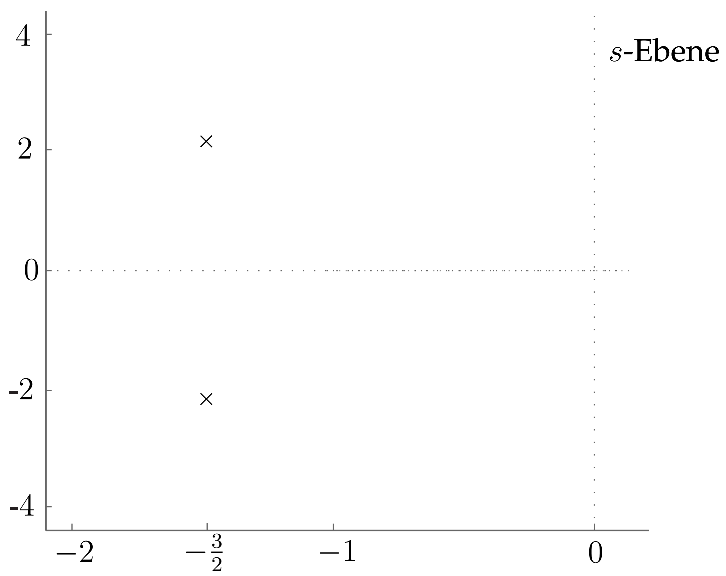

Abbildung L2: Pol-Nullstellen-Plan des Systems $\mathcal{S}_1$.

(Σ: 2 Punkte)

c) Die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ besitzt ein konjugiert komplexes Polstellenpaar und keine Nullstellen. Im Bode-Diagramm ergibt sich folglich ein nahezu konstanter Verlauf des Amplitudengangs bis zu einer Frequenz von ungefähr

$$f \approx \frac{\left|s_{\infty,1/2}\right|}{2\pi}\,.$$

Da für den Amplitudengang laut Teilaufgabe a)

$$|G_1(s = j2\pi f)|\bigg|_{f=0} = \frac{3}{7}$$

gilt, werden tiefe Frequenzen nicht vollständig gedämpft. Für große Frequenzen mit

$$|2\pi f| \gg \left|s_{\infty,1/2}\right|$$

nähert sich der Verlauf des Amplitudengangs im Bode-Diagramm einer Asymptote mit einer Steigung von $-40\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ an. Somit werden hohe Frequenzen gedämpft. Es handelt sich folglich um ein Tiefpassfilter. *(Σ: **2 Punkte**)*

d) Das System $\mathcal{S}_1$ ist stabil, denn der Realteil aller Polstellen der Übertragungsfunktion $G_1(s)$ ist negativ. *(Σ: **1 Punkt**)*

e) Die Impulsantwort an der Stelle $t = 0+$ ergibt sich durch die Anwendung des Anfangswertsatzes und durch den Vergleich des Zähler- und Nennergrads der Übertragungsfunktion $G_1(s)$. Zähler- und Nennergrad unterscheiden sich um 2 und folglich gilt für die Impulsantwort

$$g(t = 0+) = 0\,.$$

Eine kurze Rechnung unter Verwendung des Anfangswertsatzes ergibt dies ebenfalls:

$$g(t = 0+) = \lim_{s\to\infty} sG_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s}{s^2 + 3s + 7} = \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{3}{s}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{7}{s^2}} = 0\,.$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

f) Die Differentialgleichung des Systems $\mathcal{S}_2$ wird zunächst zweifach integriert und nach der Ausgangsgröße $y_\mathrm{a}(t)$ umgestellt:

$$y_\mathrm{a}(t) = -2\int y_\mathrm{a}(t) - 4y_\mathrm{e}(t) - \frac{9}{2}\int y_\mathrm{e}(t) + \int\int y_\mathrm{e}(t)\,.$$

Anschließend kann der Signalflussplan wie in Abb. L3 erstellt werden.

*(Σ: **3 Punkte**)*

g) Zur Berechnung der Systemantwort ist die Impulsantwort oder die Übertragungsfunktion des Systems $\mathcal{S}_2$ erforderlich. Im ersten Schritt wird die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung ermittelt:

$$-4\ddot{y}_\mathrm{e}(t) - \frac{9}{2}\dot{y}_\mathrm{e}(t) + y_\mathrm{e}(t) = \ddot{y}_\mathrm{a}(t) + 2\dot{y}_\mathrm{a}(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$-4s^2Y_\mathrm{e}(s) - \frac{9}{2}sY_\mathrm{e}(s) + Y_\mathrm{e}(s) = s^2Y_\mathrm{a}(s) + 2sY_\mathrm{a}(s)$$

$$G_2(s) = \frac{Y_\mathrm{a}(s)}{Y_\mathrm{e}(s)} = \frac{-4s^2 - \frac{9}{2}s + 1}{s^2 + 2s}\,.$$

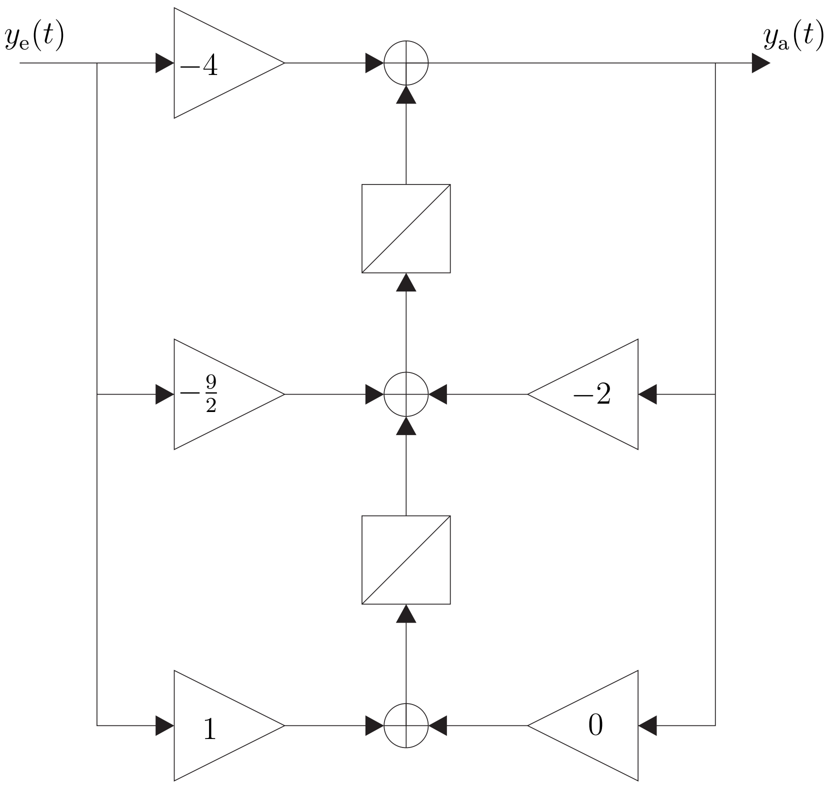

Abbildung L3: Signalflussplan des Systems $\mathcal{S}_2$.

Im zweiten Schritt erfolgt die Laplace-Transformation für das Eingangssignal $y_e(t)$ unter Verwendung der Korrespondenztabelle:

$$y_e(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sigma(t)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$
$$Y_e(s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})}\,.$$

Die Systemantwort ergibt sich im Laplace-Bereich aus Multiplikation der Laplace-Transformierten des Eingangssignals und der Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} Y_a(s) &= G_2(s) \cdot Y_e(s) \\ &= \frac{-4s^2 - \frac{9}{2}s + 1}{s(s+2)(s+\frac{1}{2})}\,. \end{aligned}$$

Für die Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenztabelle wird eine Partialbruchzerlegung mit folgendem Ansatz durchgeführt:

$$\frac{-4s^2 - \frac{9}{2}s + 1}{s(s+2)(s+\frac{1}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+\frac{1}{2}}\,.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ B &= -2, \\ C &= -3\,. \end{aligned}$$

Die nun vorliegenden Terme der Laplace-Transformierten des Ausgangssignals können mit Hilfe der Korrespondenztabelle rücktransformiert werden, sodass sich das Ausgangssignal $y_\mathrm{a}(t)$ im Zeitbereich ergibt:

$$Y_\mathrm{a}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} - \frac{3}{s+\frac{1}{2}}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$y_\mathrm{a}(t) = \left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right) \cdot \sigma(t)\,.$$

*(Σ: **6 Punkte**)*

Aufgabe 3: Zeitdiskrete Signale (16 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche, reellwertige Signal $y_1(t)$, dessen Betragsspektrum $|Y_1(f)|$ in Abbildung 2 dargestellt ist. Es gilt: $|Y_1(f)| \neq 0$ für $850\,\mathrm{Hz} < |f| < 950\,\mathrm{Hz}$, für alle anderen Frequenzen gilt: $|Y_1(f)| = 0$.

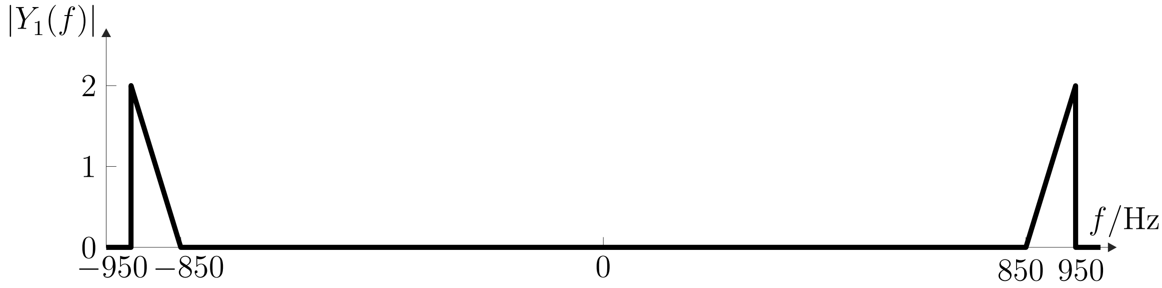

Abbildung 2: Betragsspektrum $|Y_1(f)|$.

a) Es soll eine Unterabtastung des Signals $y_1(t)$ mit $f_{\mathrm{A},1} = 250\,\mathrm{Hz}$ erfolgen. Warum ist die Unterabtastung mit der Abtastfrequenz $f_{\mathrm{A},1}$ nicht erfolgreich? *(2 Punkte)*

b) Wählen Sie eine **kleinere** Abtastfrequenz $f_{\mathrm{A},2}$, mit der die Unterabtastung erfolgreich ist. Begründen Sie Ihre Wahl und skizzieren Sie das sich ergebende Betragsspektrum $|Y_{1,*}(f)|$ im Bereich $|f| \leq f_{\mathrm{A},2}$. *(5 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei der in Abbildung 3 gezeigte Ausschnitt des Spektrums $Y_{2,*}(f)$ des zeitdiskreten Signals $y_{2,*}(t)$. Treffen Sie zur Lösung dieser Aufgabe folgende Annahmen:

- Das Spektrum des Signals $y_2(t)$ vor der Abtastung war dreieckförmig und reellwertig.
- Das Abtasttheorem wurde eingehalten.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ fand eine Abtastung statt.

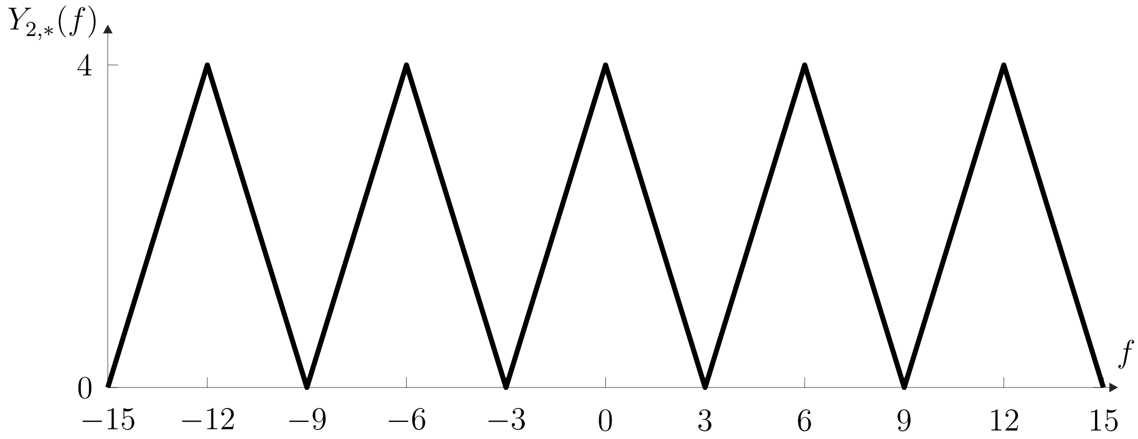

Abbildung 3: Ausschnitt des Spektrums $Y_{2,*}(f)$.

c) Mit welcher Abtastfrequenz wurde hier gearbeitet? *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie das zeitdiskrete Signal $y_{2,*}(t)$. *(3 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Werte des zeitdiskreten Signals $y_{2,n}$ für das Intervall $n \in [0, 3]$. *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die 4-Punkte-DFT Y_k der Wertefolge $y_{2,n}$ aus der vorhergehenden Teilaufgabe. Geben Sie Ihr Ergebnis allgemein in Abhängigkeit von k an. Eine Berechnung einzelner Stützstellen ist nicht verlangt. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Für eine erfolgreiche Unterabtastung müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Das Frequenzband muss durch eine hinreichend hohe Abtastfrequenz erfasst werden können. Dies ist hier erfüllt, denn $B = 100\,\mathrm{Hz} < \frac{f_{\mathrm{A},1}}{2}$.
- Die Projektion des Frequenzbandes muss innerhalb des Nyquistbandes liegen. Diese Bedingung wird hier verletzt, denn die Nyquistfrequenz liegt bei $f_\mathrm{N} = 125\,\mathrm{Hz}$ und die relevanten Projektionen erstrecken sich von $100\,\mathrm{Hz}$ bis $200\,\mathrm{Hz}$ und von $-200\,\mathrm{Hz}$ bis $-100\,\mathrm{Hz}$.

*(Σ: **2 Punkte**)*

b) Das Abtasttheorem verlangt gemäß der vorherigen Teilaufgabe eine Abtastfrequenz, für die $f_{\mathrm{A},2} \geq 200\,\mathrm{Hz}$ gilt. Zur erfolgreichen Unterabtastung muss ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastfrequenz möglichst nahe unterhalb des Frequenzbandes liegen. Es kann beispielsweise eine Abtastfrequenz von $f_{\mathrm{A},2} = 212\,\mathrm{Hz}$ gewählt werden. Die relevanten Projektionen ergeben sich in diesem Fall durch $4f_{\mathrm{A},2} = 848\,\mathrm{Hz}$ und $-4f_{\mathrm{A},2} = -848\,\mathrm{Hz}$.

Die entsprechenden Frequenzbänder liegen bei:

- $4f_{\mathrm{A},2} - 950\,\mathrm{Hz} = -102\,\mathrm{Hz}$ bis $4f_{\mathrm{A},2} - 850\,\mathrm{Hz} = -2\,\mathrm{Hz}\,,$
- $-4f_{\mathrm{A},2} + 850\,\mathrm{Hz} = 2\,\mathrm{Hz}$ bis $-4f_{\mathrm{A},2} + 950\,\mathrm{Hz} = 102\,\mathrm{Hz}\,.$

Somit liegen die Projektionen im Nyquistband. Abbildung L4 zeigt das sich ergebende Betragsspektrum.

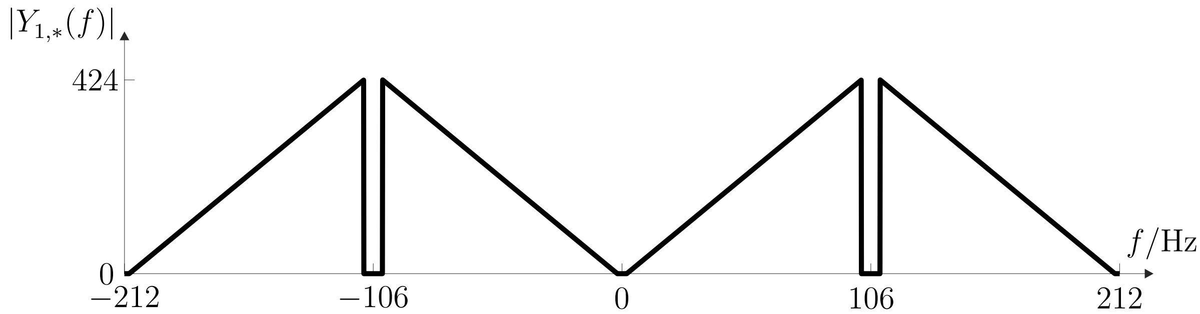

Abbildung L4: Betragsspektrum $|Y_{1,*}(f)|$ für $f_{\mathrm{A},2} = 212\,\mathrm{Hz}$.

*(Σ: **5 Punkte**)*

c) Die in Abbildung 3 ersichtliche periodische Fortsetzung des Spektrums liefert direkt die Abtastfrequenz $f_\mathrm{A} = 6$. *(Σ: **1 Punkt**)*

d) Abbildung 3 kann entnommen werden, dass das Spektrum des abgetasteten Signals ein Dreiecksignal der Breite 6 und Höhe 4 ist, welches im Abstand von $f = 6$ periodisch wiederholt wird. Dies kann mathematisch wie folgt formuliert werden:

$$Y_{2,*}(f) = 4d_6(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_\mathrm{A})\,.$$

Das zugehörige Zeitsignal kann durch Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Korrespondenztabelle bestimmt werden:

$$Y_{2,*}(f) = 4d_6(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_\mathrm{A})$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\begin{aligned} y_{2,*}(t) &= 4 \cdot \frac{6}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{6}{2}t\right) \cdot \frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\frac{1}{6}\right) \\ &= 2\operatorname{sinc}^2(3t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{6}\right) . \end{aligned}$$

Das zeitdiskrete Signal $y_{2,*}(t)$ kann durch Auswertung der Abtastzeitpunkte auch als Wertefolge $y_{2,n}$ geschrieben werden:

$$y_{2,n} = 2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

(Σ: 3 Punkte)

e) Für $n = 0...3$ ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} y_{2,0} &= 2\operatorname{sinc}^2(0) = 2\,, \\ y_{2,1} &= 2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}\,, \\ y_{2,2} &= 2\operatorname{sinc}^2(1) = 0\,, \\ y_{2,3} &= 2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}}\right)^2 = \frac{8}{9\pi^2}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

Die Wertefolge lautet somit $\left(2, \frac{8}{\pi^2}, 0, \frac{8}{9\pi^2}\right)$.

f) Die 4-Punkte-DFT obiger Wertefolge lautet:

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^{3} y_{2,n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{n}{4}} \\ &= 2\,\mathrm{e}^0 + \frac{8}{\pi^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{4}} + 0 + \frac{8}{9\pi^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{3}{4}} \\ &= 2 + \frac{8}{9\pi^2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{4}}\right) + \frac{64}{9\pi^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi k \frac{1}{4}} \\ &= 2 + \frac{16}{9\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{64}{9\pi^2}(-\mathrm{j})^k . \end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 4: Zeitdiskrete Systeme (17 Punkte)

Gegeben sei das zeitdiskrete LTI-System $\mathcal{S}_1$ mit der Übertragungsfunktion:

$$G_1(z) = \frac{z^2 + \sqrt{2}z + 1}{z^3 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}} \,.$$

a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems $\mathcal{S}_1$. Es sei bereits eine Polstelle bei $z_{\infty,1} = \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}$ bekannt. *(4 Punkte)*

b) Ist das System $\mathcal{S}_1$ stabil? **(Begründung!)** *(2 Punkte)*

c) Bei welcher Frequenz ist die Dämpfung des Systems $\mathcal{S}_1$ maximal? Wie wird ein solches System bezeichnet? *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie die stationäre Verstärkung des Systems $\mathcal{S}_1$. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind von den vorhergehenden unabhängig.

Gegeben sei die Systemantwort $Y_\mathrm{a}(z)$ eines zeitdiskreten Systems $\mathcal{S}_2$ durch:

$$Y_\mathrm{a}(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 - 4z + 3} \,.$$

e) Ermitteln Sie die Konvergenzgebiete der z-Transformierten $Y_\mathrm{a}(z)$. *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie die zu $Y_\mathrm{a}(z)$ gehörige kausale **und** antikausale Zeitfolge durch Rückführung auf Reihen. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Da in der Übertragungsfunktion nur reellwertige Koeffizienten auftreten, können Pol- und Nullstellen nur reellwertig oder als konjugiert komplexe Paare auftreten. Somit kann aus der gegebenen Polstelle bei $z_{\infty,1} = \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}$ direkt auf eine zweite Polstelle bei $z_{\infty,2} = \frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}$ geschlossen werden. Die dritte Polstelle ergibt sich aus Polynomdivision des Nenners:

$$\left(z^3 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}\right) : \left((z - z_{\infty,1})(z - z_{\infty,2})\right) =$$
$$\left(z^3 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}\right) : \left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right) = z + \frac{1}{4}\,.$$

Für die dritte Polstelle gilt folglich: $z_{\infty,3} = -\frac{1}{4}\,.$

Die Nullstellen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} z_{0,1/2} &= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

(Σ: 4 Punkte)

b) Für die konjugiert komplexen Polstellen gilt:

$$|z_{\infty,1/2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\,.$$

Somit liegen sämtliche Polstellen innerhalb des Einheitskreises und das System $\mathcal{S}_1$ ist stabil. ***(Σ: 2 Punkte)***

c) Die Nullstellen liegen auf dem Einheitskreis:

$$|z_{0,1/2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1\,.$$

Bei Berechnung des Amplitudengangs werden Frequenzen von $f = 0$ bei $z = 1$ bis $f = \pm\frac{f_\mathrm{A}}{2}$ bei $z = -1$ entlang des Einheitskreises analysiert. Für $f = \pm\frac{3}{4} \cdot \frac{f_\mathrm{A}}{2} = \pm\frac{3f_\mathrm{A}}{8}$ werden genau die Nullstellen getroffen, was zu maximaler Dämpfung führt. Ein solches System wird als Kerbfilter oder Notch-Filter bezeichnet. ***(Σ: 3 Punkte)***

d) Die stationäre Verstärkung liegt bei $f = 0$ und somit bei $z = 1$ vor. Einsetzen in die Übertragungsfunktion liefert:

$$\begin{aligned} G(z=1) &= \frac{1 + \sqrt{2} + 1}{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8}{5}\left(2 + \sqrt{2}\right)\,. \end{aligned}$$

(Σ: 1 Punkt)

e) Die z-Transformierte $Y_\mathrm{a}(z)$ besitzt Polstellen bei $z = 3$ und $z = 1$. Somit ergeben sich folgende Konvergenzgebiete:

- 1. $|z| > 3$: kausal
- 2. $|z| < 1$: antikausal
- 3. $1 < |z| < 3$: akausal

*(Σ: **2 Punkte**)*

f) Zunächst erfolgt eine Partialbruchzerlegung:

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathrm{a}}(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 - 4z + 3} &= z \cdot \frac{z+3}{(z-3)(z-1)} \\
&= z \cdot \left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} \right) \\
&= z \cdot \left(\frac{3}{z-3} + \frac{-2}{z-1} \right) \\
&= \frac{3z}{z-3} - \frac{2z}{z-1} \,.
\end{aligned}
$$

Die kausale Lösung ergibt sich für das Konvergenzgebiet $|z| > 3$:

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathrm{a}}(z) &= \frac{3z}{z-3} - \frac{2z}{z-1} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} - 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\
&= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z} \right)^n - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \\
&= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{-n} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ \\
y_{\mathrm{a},n} &= \left(3^{n+1} - 2 \right) \cdot \sigma_n \,.
\end{aligned}
$$

Die antikausale Lösung ergibt sich für das Konvergenzgebiet $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
Y_\mathrm{a}(z) &= \frac{3z}{z-3} - \frac{2z}{z-1} \\
&= \frac{3z}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{2z}{-1} \cdot \frac{1}{1-z} \\
&= -z \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} + 2z \cdot \frac{1}{1-z} \\
&= -z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + 2z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&\text{Subst.}: \quad -k = n \\
&= -z \cdot \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{z}{3}\right)^{-k} + 2z \cdot \sum_{k=-\infty}^{0} z^{-k} \\
&= -\sum_{k=-\infty}^{0} 3^k z^{-k+1} + 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{0} z^{-k+1} \\
&\text{Subst.}: \quad -k' = -k+1 \\
&= -\sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{k'+1} z^{-k'} + 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{-1} z^{-k'} \\
&\text{Subst.}: \quad n = k' \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{n+1} z^{-n} + 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n}
\end{aligned}$$

$$y_{\mathrm{a},n} = \left(-3^{n+1} + 2\right) \cdot \sigma_{-n-1} \,.$$

(Σ: 5 Punkte)