

# Signale und Systeme - Wiederholung – 9. Übung

Dipl.-Ing. Sebastian Vater

Institut für Industrielle Informationstechnik

- Es folgt: Zusammenfassung der Übung ohne Anspruch auf Vollständigkeit

- Signalklassen
- Orthonormale Funktionensysteme
- Fourier-Transformation

## ■ Energiesignale

- Funktion beschränkt und stückweise stetig

- Endliche Energie

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty$$

- Norm ist Wurzel der **Energie**

$$\|y(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}$$

- Innenprodukt

$$\langle y_1(t), y_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(t)y_2^*(t) dt$$

## ■ Leistungssignale $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \not< \infty\right)$

- Mittlere Leistung ist endlich

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt < \infty$$

- Norm ist Wurzel der **Leistung**

$$\|y(t)\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sqrt{\int_{-T}^T |y(t)|^2 dt}$$

- Innenprodukt

$$\langle y_1(t), y_2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_1(t)y_2^*(t) dt$$

# Orthonormale Funktionensysteme (1)

- Bestehen aus orthonormalen Basisfunktionen
- ermöglichen eine Analyse von Funktionen
- Bedingung für Orthonormalität

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

- Beispiele für orthonormale Funktionensysteme:
  - Legendre-Polynome
  - Normierte Fourierreihe (Faktor  $\frac{1}{\sqrt{T_0}}$ )
- Orthogonalität: Keine Normierung der Basisfunktionen notwendig

# Orthonormale Funktionensysteme (2)

## ■ Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben: Basisfunktionen  $B_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

### 1. Berechnung der Hilfsfunktion

$$L_i(x) = B_i(x) - \sum_{n=0}^{i-1} \langle B_i(x), P_n(x) \rangle \cdot P_n(x)$$

### 2. Normierung der Hilfsfunktion $\rightarrow$ neue Basis

$$P_i(x) = \frac{L_i(x)}{\|L_i(x)\|} = \frac{L_i(x)}{\sqrt{\langle L_i(x), L_i(x) \rangle_x}}$$

# Fourier-Transformation (1)

- Für  $T_0$ -periodische Funktionen gilt:

nur diskrete Frequenzen:  $\Delta f = \frac{1}{T_0}$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t}$$

- Für allgemeine Funktionen gilt:

alle Frequenzen:  $T_0 \rightarrow \infty \quad \Delta f \rightarrow \frac{1}{T_0}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Möglichkeiten zur Bestimmung der Fourier-Transformierten
  - Lösung des Integrals (Definitionsgleichung)
  - Umformen bekannter Transformationspaare (Korrespondenztabelle)
  - Verwendung von Eigenschaften der Fourier-Transformation

## ■ Eigenschaften

- Zeitverschiebung
- Modulation
- Skalierung
- Differentiation der Zeitfunktion

$$y(t - t_0) \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{-j2\pi f t_0} \cdot Y(f)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot y(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad Y(f - f_0)$$

$$y(at) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{|a|} Y\left(\frac{f}{a}\right)$$

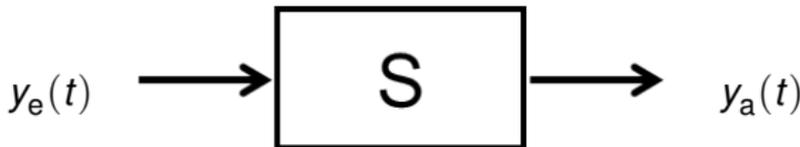
$$y^{(n)}(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (j2\pi f)^n \cdot Y(f)$$



- Zeitkontinuierliche Systeme
- Laplace-Transformation
- Laplace-Rücktransformation
- Frequenzgang zeitkontinuierlicher Systeme
- Kontinuierliches System
- Zustandsraum
- Allpass- und Minimalphasensysteme

# Zeitkontinuierliche Systeme (1)

- Ein zeitkontinuierliches System ist eine Einrichtung, die auf ein Eingangssignal mit einem Ausgangssignal reagiert.



- Mathematische Beschreibung durch eine Operatorgleichung

$$y_a(t) = S \{y_e(t)\}$$

- Spezialfall LTI-System:  
Charakterisiert durch Impulsantwort

$$g(t) = S \{\delta(t)\} \quad \Rightarrow \quad y_a(t) = S \{y_e(t)\} = y_e(t) * g(t)$$

- **Linearität:** Superposition und skalare Multiplikation

$$S \{ m y_1(t) + n y_2(t) \} = m S \{ y_1(t) \} + n S \{ y_2(t) \}$$

- **Zeitinvarianz:** Systemverhalten ist unabhängig vom Zeitpunkt

$$S \{ y_e(t - t_0) \} = y_a(t - t_0)$$

- **Kausalität:** Ausgang hängt nur von vergangenen und aktuellen Eingangswerten ab

$$y_{e1}(t) = y_{e2}(t) \quad , \quad t \leq t_1 \quad \Rightarrow \quad y_{a1}(t) = y_{a2}(t) \quad , \quad t \leq t_1$$

- **Stabilität:** Auf ein beschränktes Eingangssignal reagiert das System mit einem beschränkten Ausgangssignal



$$y_e(t) \leq N < \infty \quad \Rightarrow \quad y_a(t) \leq M < \infty$$

# Zeitkontinuierliche Systeme (3)

- **Linearität** und **Zeitinvarianz** müssen erfüllt sein (linear time-invariant systems)

- vollständige Systembeschreibung durch Impulsantwort

$$y_a(t) = g(t) * y_e(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y_a(s) = G(s) \cdot Y_e(s)$$

- **Kausalität** bei LTI-Systemen

$$g(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$$

- **Stabilität** bei LTI-Systemen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$



## ■ Motivation

- Fourier-Integral existiert nur für eine beschränkte Klasse an Funktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty \quad \rightarrow \quad Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

⇒ Transformation, die für weitere Klassen von Funktionen konvergiert

## ■ Lösung

- Erweiterung des Integranden um den Faktor  $e^{-\delta t}$   
→ Dämpfen der Signalamplitude durch zusätzlichen exponentiellen Anteil

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-\delta t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-(\delta+j2\pi f)t} dt$$

- Zweiseitige Laplace-Transformation

$$Y(s) = \mathcal{L}_{II} \{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-st} dt \quad s = \delta + j2\pi f$$

- Fourier-Transformation des gedämpften Signals

$$Y(s) = \mathcal{L}_{II} \{y(t)\} = \mathcal{F} \{y(t) e^{-\delta t}\}$$

Konvergenzbedingung für die Laplace-Transformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t) e^{-\delta t}| dt < \infty$$

- Nachteil: Konvergenz ist abhängig von der Funktion und der Dämpfung

- Einseitige Laplace-Transformation
  - Beschränkung des Intervalls auf positive Zeiten
  - Angepasst auf kausale Funktionen

$$Y(s) = \mathcal{L}_I \{y(t)\} = \mathcal{L} \{y(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

- Existiert für beliebige kausale Funktionen

- Eigenschaften ähnlich wie bei Fourier-Transformation
  - Linearität
  - Verschiebung im Zeit- und Frequenzbereich
  - Differentiation und Integration
  - Faltung
  - **Anfangs-** und **Endwertsatz**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

- Berechnung
  - Auswertung des Integrals
  - Korrespondenztabelle

- Theoretisch durch Auswertung des Linienintegrals

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds$$

- Einfachere Berechnung

- Korrespondenzen

- Partialbruchzerlegung

- Residuensatz

[http://theorie.physik.uni-giessen.de/documents/skripte/Mosel\\_residuen.pdf](http://theorie.physik.uni-giessen.de/documents/skripte/Mosel_residuen.pdf)

- Partialbruchzerlegung
  - Aufspaltung einer echt gebrochen rationalen Funktion in Teilfunktionen
  - Transformation der Teilfunktionen mithilfe der Korrespondenztabelle
- Vorgehensweise
  - Als echten Bruch darstellen (Zählergrad < Nennergrad)
  - Darstellung des Nennerpolynoms in seiner Nullstellenform
  - Ansatz der Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten
  - Berechnung der Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich
- Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{2s+1}{s^2+5s+6} &= \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{s+3} \\ &= \frac{s(a_1+a_2) + (3a_1+2a_2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{-3}{s+2} + \frac{5}{s+3}\end{aligned}$$

## ■ Residuensatz

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^M \text{Res} \left\{ Y(s) e^{st}; s_{k\infty} \right\}$$

- Residuum bei einfachem Pol in  $s_k$

$$\text{Res} \left\{ Y(s) e^{st}; s_{k\infty} \right\} = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) Y(s) e^{st}$$

- Residuum bei n-fachem Pol in  $s_k$

$$\text{Res} \left\{ Y(s) e^{st}; s_{k\infty} \right\} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s - s_k)^n Y(s) e^{st}$$

- Wie reagiert ein LTI-System bei Anregung mit einer komplexen Schwingung der Frequenz  $f_0$  ( $y_e(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ )?

$$\begin{aligned}y_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y_e(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau}_{\text{Fourier-Transformation}} \cdot e^{j2\pi f_0 t} = G(f_0) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\end{aligned}$$

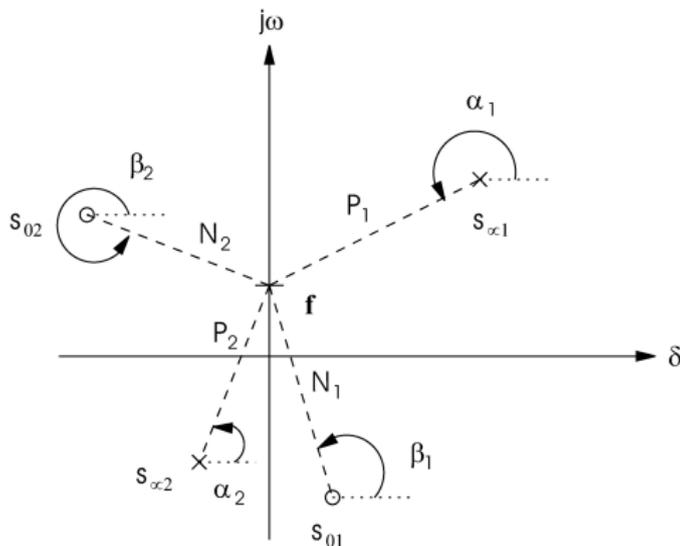
- Proportionalitätsfaktor zwischen Ein- und Ausgang eines Systems bei Anregung mit einer komplexen Schwingung der Frequenz  $f$

- Frequenzgang:

$$G(f) = A(f) e^{j\Phi(f)}$$

- Amplitudengang:  $A(f) = |G(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{G(f)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(f)\}^2}$

- Phasengang:  $\Phi(f) = \arg G(f) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{G(f)\}}{\operatorname{Re}\{G(f)\}}$



- Amplitudengang  $A(f) = |G(s = j2\pi f)| = C \cdot \prod_{\mu=1}^m N_{\mu} \cdot \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{P_{\nu}}$
- Phasengang  $\Phi(f) = \arg\{G(s = j2\pi f)\} = \gamma + \sum_{\mu=1}^m \beta_{\mu} - \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu}$

# Zeitkontinuierliche Systeme (1)

- Darstellung in allgemeiner Form als Funktion der Eingangsgröße und den Ableitungen der Ein- und Ausgangsgrößen

$$y(t) = f(x(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dots) \quad \xleftrightarrow{\text{LTI}} \quad y(t) = g(t) * x(t)$$

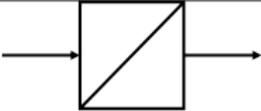
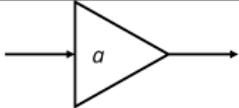
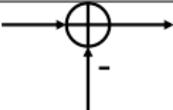
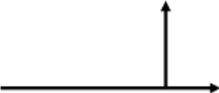
Laplace  $\downarrow$  Laplace  $\downarrow$

$$Y(s) = f(X(s), sX(s), sY(s), \dots) \quad \xleftrightarrow{\text{LTI}} \quad Y(s) = G(s)X(s)$$

- LTI-Systeme lassen sich beschreiben durch

- lineare DGL
- Übertragungsfunktion 
- Impulsantwort (Sprungantwort)
- Frequenzgang (Amplituden- und Phasengang)
- Signalflussgraph

## ■ Signalflussgraph

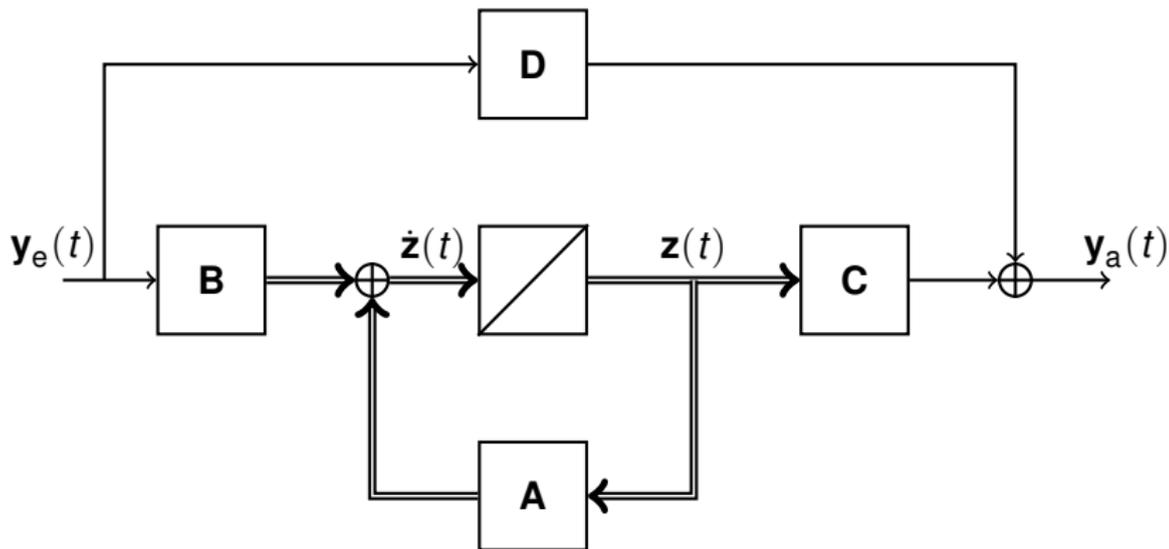
| Symbol  | Name        | Zeitbereich                      | Laplacebereich    |
|---|-------------|----------------------------------|-------------------|
|  | Integration | $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ | $\frac{1}{s}X(s)$ |
|  | Verstärkung | $a \cdot x(t)$                   | $a \cdot X(s)$    |
|  | Summation   | $x_1(t) - x_2(t)$                | $X_1(s) - X_2(s)$ |
|  | Verzweigung |                                  |                   |

# Darstellung im Zustandsraum (1)

- Betrachtung der inneren Struktur des Systems
- Beschreibung struktureller Eigenschaften (Normalformen)
- Sinnvoll in regelungstechnischen Anwendungen (Innere Systemstabilität)
- **nicht** eindeutig
- Ordnung des Systems: kleinste Anzahl an Zustandsgrößen
- Zur Darstellung werden zwei Formeln benötigt (Zustandsgleichung und Ausgangsgleichung)

# Darstellung im Zustandsraum (2)

## ■ Flussgraph (Blockdiagramm)



$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}y_e(t) & \circ \bullet & \quad s\mathbf{Z}(s) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{B}\mathbf{Y}_e(s) \\ y_a(t) &= \mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}y_e(t) & \circ \bullet & \quad \mathbf{Y}_a(s) = \mathbf{C}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{D}\mathbf{Y}_e(s) \end{aligned}$$

# Allpass und Minimalphasensystem (1)

## ■ Allpass

$$A(f) = |G(f)| = 1 \quad , \quad f \in \mathbb{R}$$

- Zählergrad = Nennergrad
- keine Pol- oder Nullstellen auf der imaginären Achse
- ~~Zählerterme konjugiert komplex zu Nennertermen~~



## ■ Minimalphasensystem

Ein **stabiles** System dessen Nullstellen in der linken Halbebene liegen.

$$\operatorname{Re} \{ s_{0\mu} \} \leq 0$$

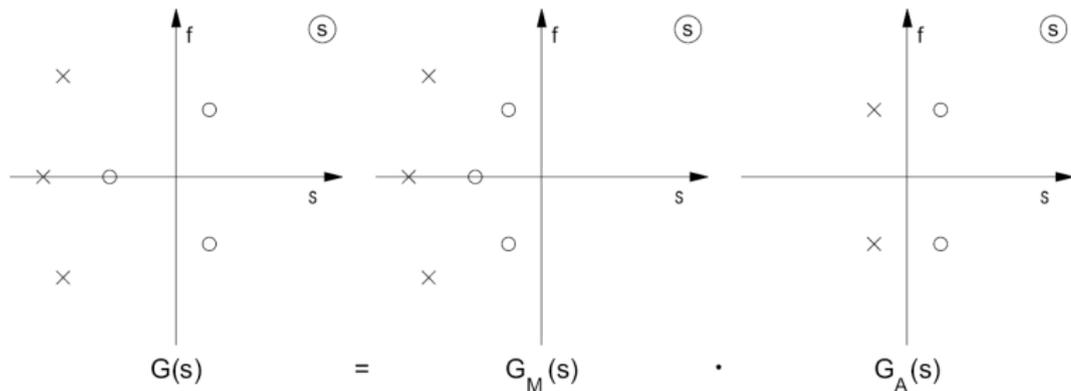


- Zwischen Amplitudengang und Phasengang besteht eindeutiger Zusammenhang!

# Allpass und Minimalphasensystem (2)

## Zerlegung

Jedes kausale LTI-System lässt sich in Minimalphasen- und Allpassanteil zerlegen.



- Abtastung
- Überabtastung
- Unterabtastung
- DFT
- Leckeffekt
- FFT

# Zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Signale (1)

Zeitkontinuierliche Signale

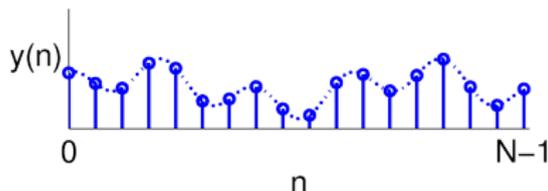
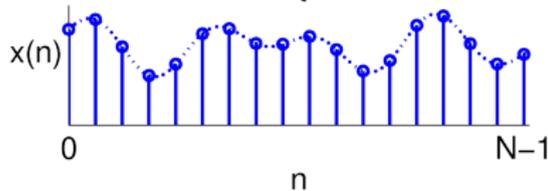
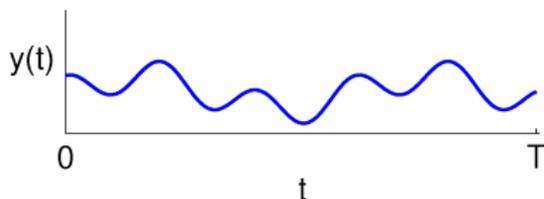
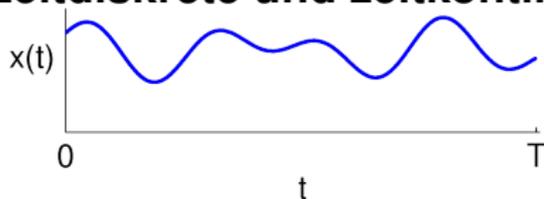
Kontinuierliches Innenprodukt:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t)y^* dt$$

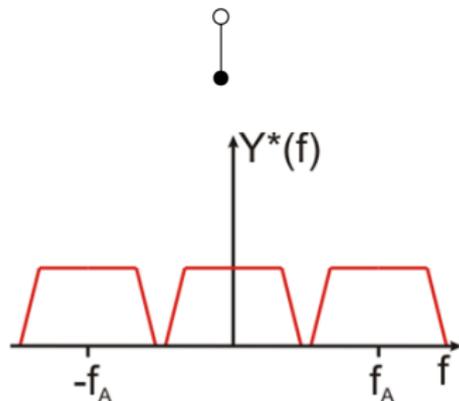
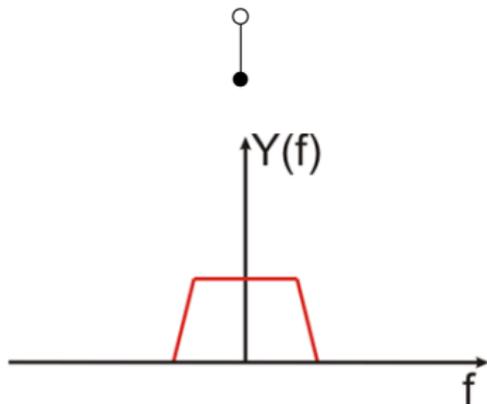
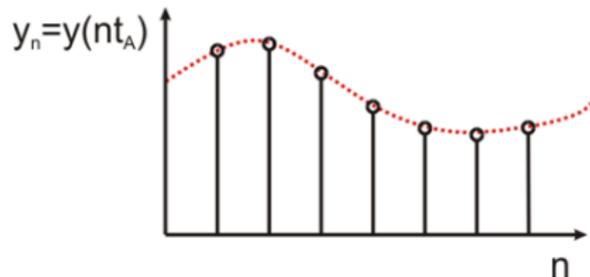
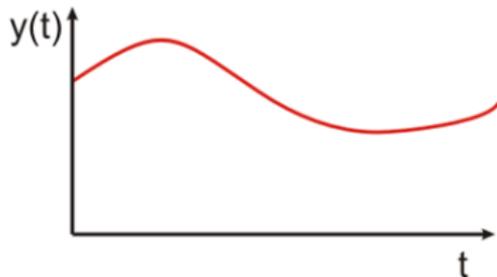
Zeitdiskrete Signale

Diskretes Innenprodukt:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$$

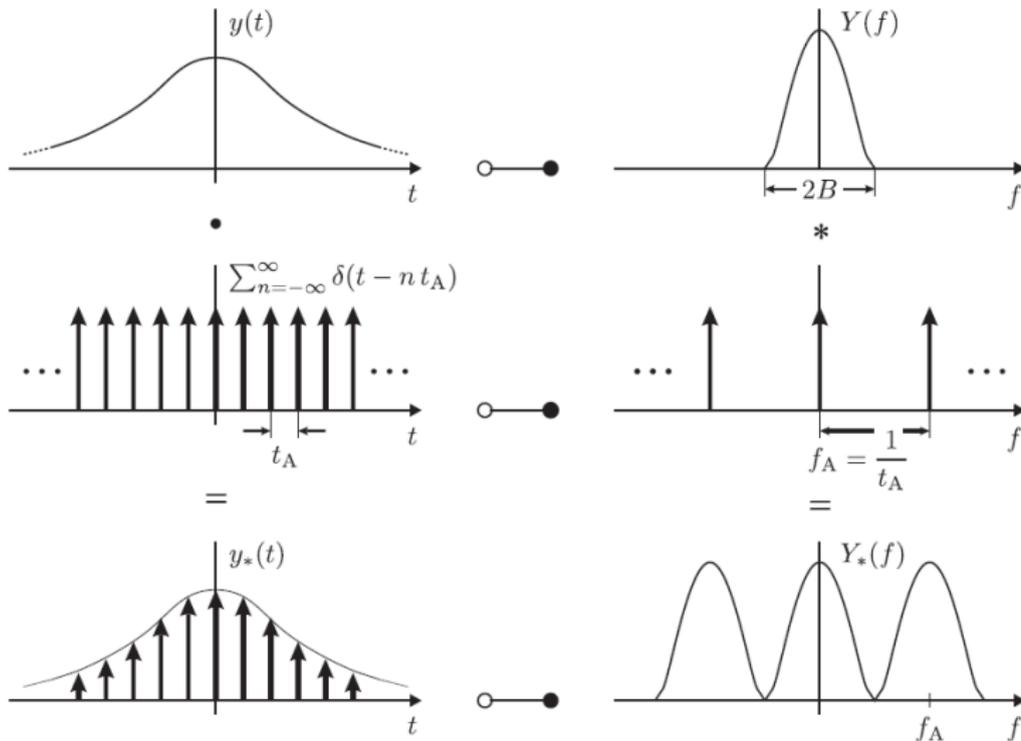


# Zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Signale (2)



- Wozu zeitdiskrete Signale durch Abtastung?
  - Digitale Signalprozessoren in der Lage Aufgaben zu lösen, zu denen analoge Systeme nicht im Stande sind
  - Ermöglicht Vielzahl von Wandlungs- und Bearbeitungsmöglichkeiten (Audiodatenkompression, Bildbearbeitung)
  - Durch Abtastung (Sampling) Gewinnung von Messwerten an diskreten Zeitpunkten
  - Zeitkontinuierliches Signal  $\rightarrow$  Zeitdiskretes Signal
  - Zahl der Samples pro Sekunde: Abtastrate
  - Digitale Telefonie (ISDN): 8 kHz, Audio-CDs: 44,1 kHz (menschliches Gehör 20kHz)

# Zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Signale (4)



- Mathematische Beschreibung zeitdiskreter Signale

- als Folge

$$y_n = y(nt_A)$$

- als Impulsreihe

$$y_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A)\delta(t - nt_A)$$

- Multiplikation mit Impulsreihe führt zu periodischer Fortsetzung des Spektrums:

$$Y_*(f) = f_A \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(f - kf_A)$$

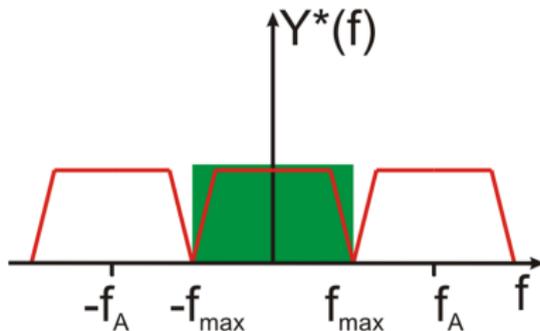
# Abtastung - Abtasttheorem (1)

Ist die Abtastfrequenz **mehr als doppelt so hoch** wie die höchste im stetigen Zeitsignal  $y(t)$  vorkommende Frequenz, so kann das Signal auch zwischen den Abtastwerten vollständig rekonstruiert werden.

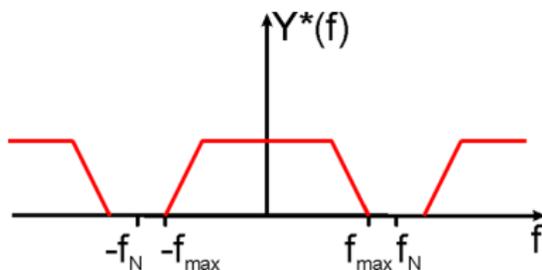
$$1) f_A > 2 \cdot f_{\max}$$

$$2) f_A \geq 2 \cdot B$$

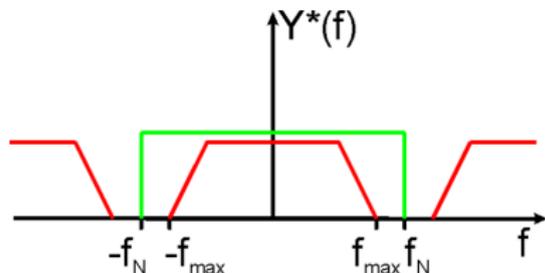
$$Y(f) = 0 \text{ für } |f| \geq B$$



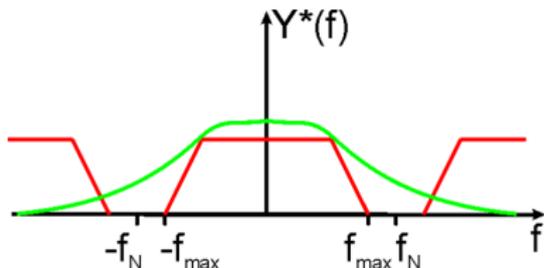
## Abgetastetes Signal



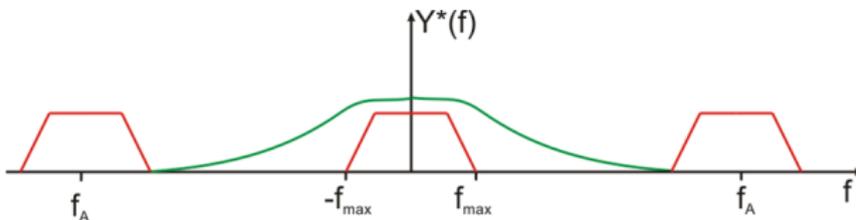
## Ideales Filter



## Reales Filter



## Lösung durch Überabtastung



- Durch Abtasttheorem geforderte Abtastfrequenz nicht immer technisch realisierbar
- Abtastung des Signals mit einer Frequenz, die nicht das Abtasttheorem erfüllt ( $f_A < 2 \cdot f_{\max}$ )
- Frage: Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, um Aliasing zu vermeiden? Wo im Nyquistband soll neue Mittenfrequenz liegen?
- Kein Aliasing, wenn Signal bandbegrenzt und Abtastfrequenz richtig gewählt.
- Allgemein gilt:
  - Wahl der Abtastfrequenz

$$f_0 = f_0^{\text{proj}} + r \cdot f_A$$

oder

$$f_A = \frac{f_0 - f_0^{\text{proj}}}{r}$$

## Unterabtastung (2)

- Abtastung des Signals mit einer Frequenz, die nicht das Abtasttheorem erfüllt ( $f_A < 2 \cdot f_{\max}$ )
- Kein Aliasing, wenn Signal bandbegrenzt und Abtastfrequenz richtig gewählt.
- Allgemein gilt:

$$f_0 = f_0^{\text{proj}} + r \cdot f_A$$

Mittelfrequenz  $\curvearrowright$

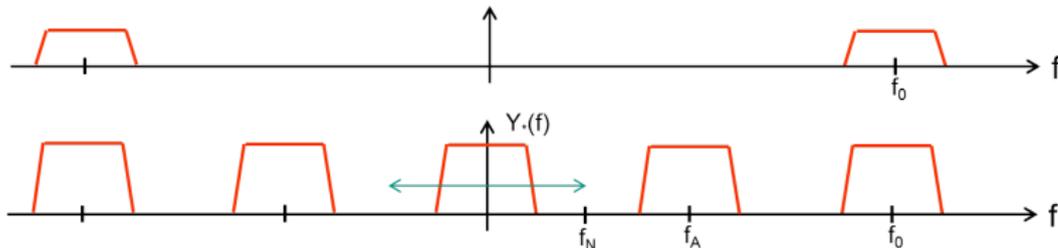
projizierte Mittelfrequenz  $\curvearrowright$

Abtastfrequenz  $\curvearrowright$

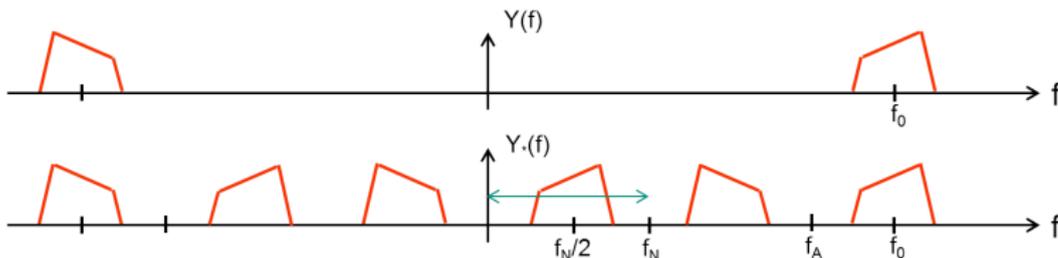
Die Spektren, die durch die Abtastung entstehen, dürfen sich nicht überlagern.

## Unterabtastung (3)

- Symmetrisches Bandspektrum ( $f_0^{\text{proj}}$  auf  $f = 0$ )



- Unsymmetrisches Bandspektrum ( $f_0^{\text{proj}}$  auf  $f = \frac{f_N}{2}$ )



## Unterabtastung (4)

- Symmetrisches Bandspektrum ( $f_0^{\text{proj}}$  auf  $f = 0$ )

Abtastfrequenzen:  $f_A = \frac{f_0}{r}$

Untere Schranke (sonst sicher Aliasing):  $f_{A,\min} > B$

somit:  $k \leq r = \frac{f_0}{B}$

- Überlagerung der Spektren führt zur doppelten Höhe des Spektrums

- Unsymmetrisches Bandspektrum ( $f_0^{\text{proj}}$  auf  $f = \frac{f_N}{2}$ )

Abtastfrequenzen:  $f_A = \frac{4 f_0}{4r+1}$

Untere Schranke (sonst sicher Aliasing):  $f_{A,\min} > 2B$

somit:  $k \leq r = \frac{f_0}{2B} - \frac{1}{4}$

- Es darf zu keiner Überlagerung der Spektren kommen

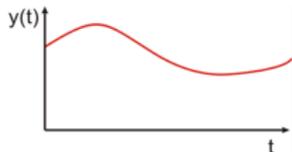
# Diskrete Fourier-Transformation (1)

## ■ Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale

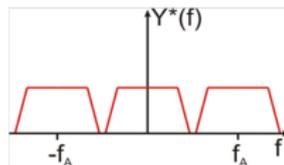
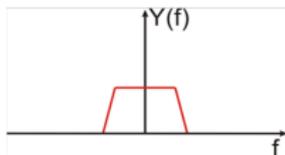
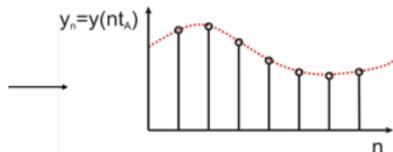
$$Y_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) e^{-j2\pi fnt_A}$$



## ■ unendlich viele Abtastwerte



## Frequenzvariable kontinuierlich



⇒ Berechnung mit digitalem System nicht möglich

# Diskrete Fourier-Transformation (2)

- Beschränkung auf  $N$  Abtastwerte

Beobachtungszeit  $T_0 = N \cdot t_A$

Beobachtungsfrequenz  $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N t_A} = \frac{f_A}{N}$

- Diskretisierung im Frequenzbereich

$$f = k \cdot \Delta f$$

- Herleitung aus der Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

$$Y_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n t_A) e^{-j 2 \pi f n t_A} \quad f \cdot t_A = k \cdot \Delta f \cdot t_A = \frac{k}{N}$$

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j 2 \pi k n / N}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

## ■ Definition

$$\text{DFT} \quad Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi kn/N}$$

$$\text{Inverse DFT} \quad y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi kn/N}$$

## ■ Eigenschaften

### ■ Linearität

### ■ Faltungssatz

$$x_n * y_n \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_k \cdot Y_k$$

### ■ Energieerhaltung

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

# Leckeffekt (1)

- Leckeffekt bei kontinuierlichen Signalen

Endliches Beobachtungsintervall kann als Multiplikation mit einer Rechteckfunktion interpretiert werden. Diese entspricht einer si-Funktion im Frequenzbereich. Daraus folgt eine Verfälschung des Spektrums.

- Leckeffekt bei diskreten Signalen

DFT einer harmonischen Schwingung  $y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow y_n = e^{j2\pi f_0 n t_A}$

$$\begin{aligned}
 Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(f_0 t_A N - k)kn/N} \\
 &= e^{j\pi(f_0 t_A N - k)\frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin \pi(f_0 t_A N - k)}{\sin \frac{\pi}{N}(f_0 t_A N - k)}
 \end{aligned}$$


$$Y_k = e^{j\pi(f_0 t_a N - k) \frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin \pi(f_0 t_A N - k)}{\sin \frac{\pi}{N}(f_0 t_A N - k)}$$



- Fall 1: Schwingfrequenz ist ein Vielfaches der Beobachtungsfrequenz

$$\frac{f_0}{\Delta f} = f_0 t_A N = l \quad \Rightarrow \quad Y_k = N \cdot \delta(k - l)$$



- Fall 2: Schwingfrequenz ist kein ganzzahliges Vielfaches der Beobachtungsfrequenz

$$f_0 t_A N = l + a \quad \text{mit } a \in ] -0,5; 0,5 ]$$



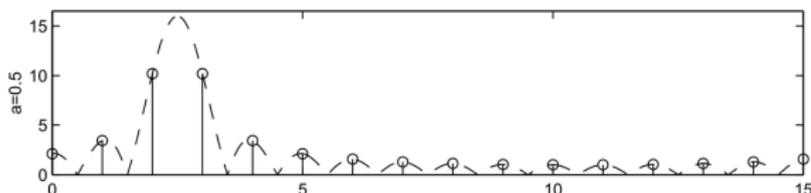
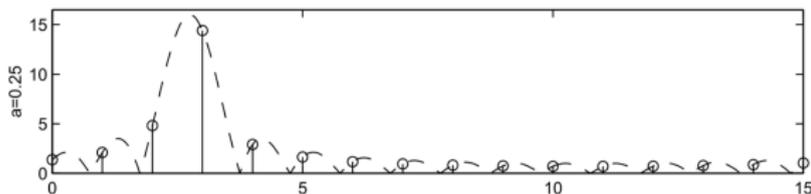
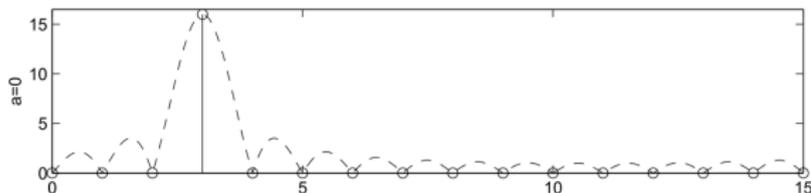
# Leckeffekt (3)

## ■ Interpretation im Frequenzbereich

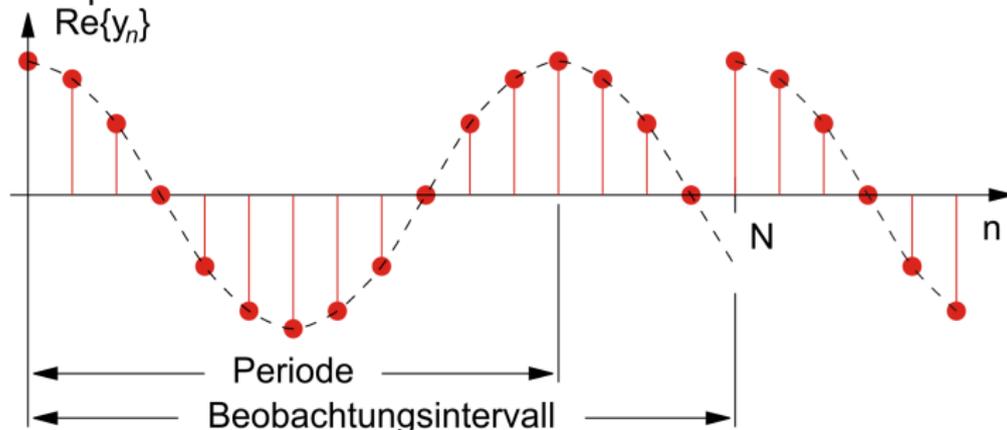
Schwingfrequenz ist  
Vielfaches der Beob-  
achtungsfrequenz

Schwingfrequenz ist  
kein Vielfaches der  
Beobachtungsfre-  
quenz

Höchster Wert liegt  
genau zwischen zwei  
Abtastpunkten  
⇒ max. Leckeffekt

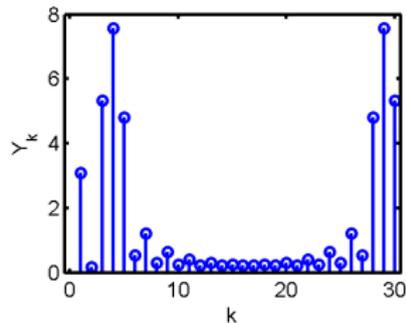
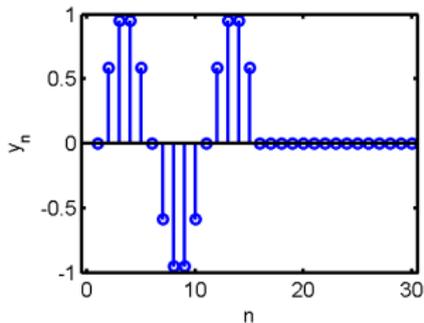
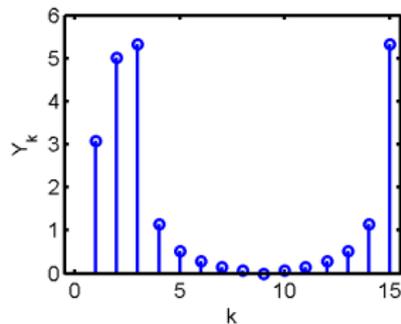
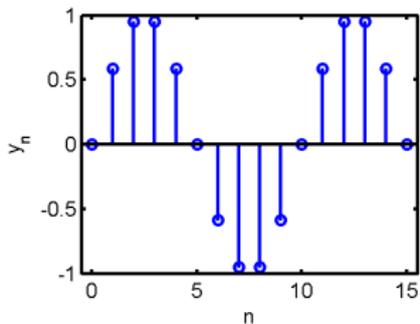


## ■ Interpretation im Zeitbereich



Das Signal wird aufgrund der Diskretisierung der Frequenz außerhalb des Beobachtungszeitraums periodisch fortgesetzt. Ist das Beobachtungsintervall gerade ein ganzzahliges Vielfaches der Periode, wird das Signal fehlerfrei fortgesetzt. Ansonsten können beispielsweise Unstetigkeiten entstehen.

# Zeropadding (1)



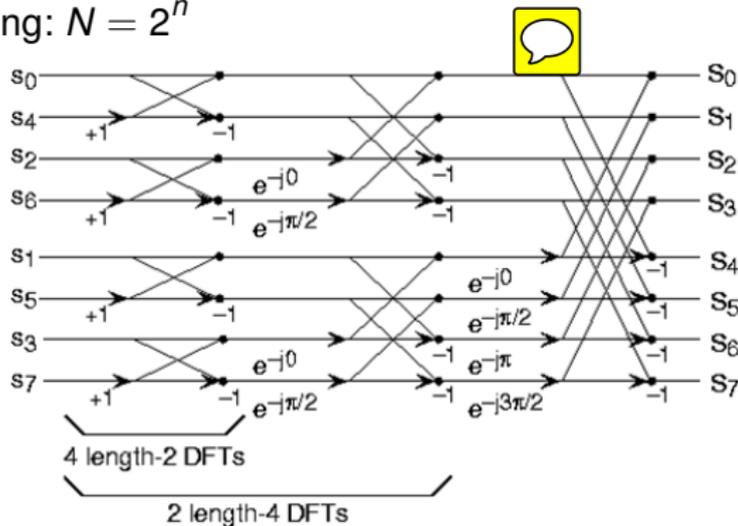
# Fast-Fourier-Transformation (FFT) (1)

- Besondere Implementierung der DFT

Rechenkomplexität der DFT:  $O(N^2)$

Rechenkomplexität der FFT:  $O(N \log(N))$

Voraussetzung:  $N = 2^n$



- z-Transformation
- Eigenschaften diskreter Systeme
- Zeitdiskrete Darstellung kontinuierlicher Systeme
- Frequenzgang zeitdiskreter Systeme

## ■ Motivation

- zeitdiskr. FT konvergiert nicht für alle Folgen (vgl. Fourier-Transformation)
- Laplace-Transformation für kontinuierliche Signale

## ■ Herleitung

- Abtastung



$$y_*(t) = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) \delta(t - nt_A)$$

- Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} Y_*(s) &= L_{II}\{y_*(t)\} = L_{II}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) \delta(t - nt_A)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) \delta(t - nt_A) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) e^{-nt_A s} \end{aligned}$$

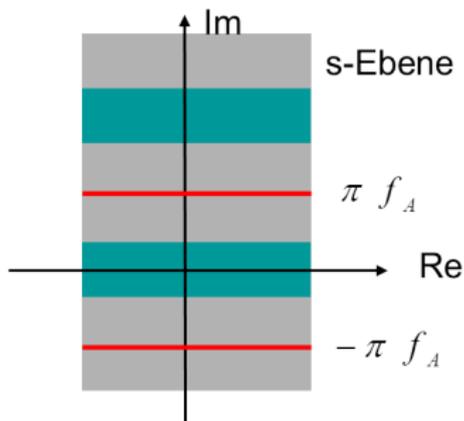
## z-Transformation (2)

- Laplace-Transformation eines zeitdiskreten Signals

$$Y_*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nt_A) e^{-nt_A s}$$

Periodizität im Frequenzbereich wegen Abtastung

$$e^{-nt_A s} = e^{-nt_A (s + j2\pi l f_A)}, l \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad Y_*(s + j2\pi l f_A) = Y_*(s)$$

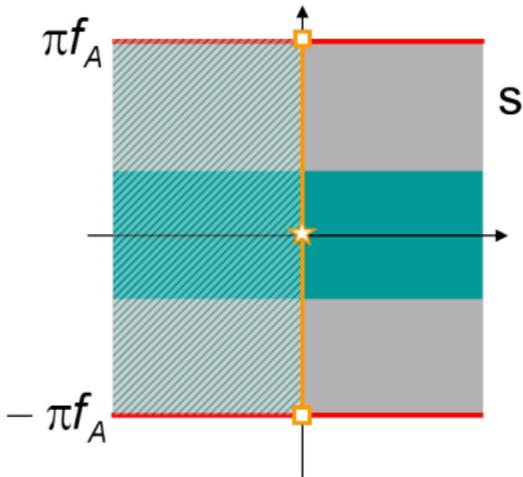


- Periodisch mit  $2\pi f_A$
- Streifen der Breite  $2\pi f_a$  enthalten die ganze Information
- Unendlich viele Pole und Nullstellen durch periodische Fortsetzung

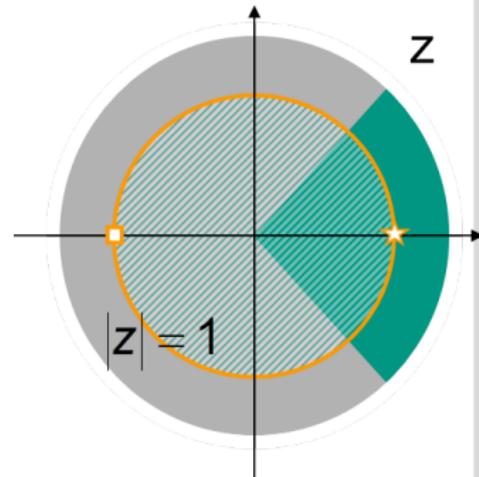
# z-Transformation (3)

## ■ Transformation der s-Ebene

Nutzung der konformen Abbildung  $z = e^{t_A s}$



Reeller Anteil  
Imaginärer Anteil



Betrag, Radius  
Argument, Winkel

# z-Transformation (4)

## ■ Definitionsgleichung

### ■ Zweiseitige z-Transformation

$$Y(z) = Z\{y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n}$$

### ■ Rechtsseitige z-Transformation

$$Y_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$$

### ■ Linksseitige z-Transformation

$$Y_-(z) = \sum_{n=-\infty}^0 y_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{-n} z^n$$



- Zeitdiskretes stabiles System mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion, dessen Amplitudengang

$$A(f) = |G(f)| = 1 \quad , \quad f \in \mathbb{R}$$

für alle Frequenzen gleich 1 eins ist.

- Nullstellen bezüglich Einheitskreis spiegelbildlich zu Polen
- Beiträge Nullstellen und Pole zum Amplitudengang kompensieren sich (Zählergrad = Nennergrad)

## ■ Stabilität

Alle Polstellen liegen innerhalb des Einheitskreises  $|z_{\infty,i}| < 1$

## ■ Minimalphasigkeit



Alle Nullstellen liegen auf / innerhalb des Einheitskreises  $|z_{0,i}| \leq 1$

## ■ Reelles System

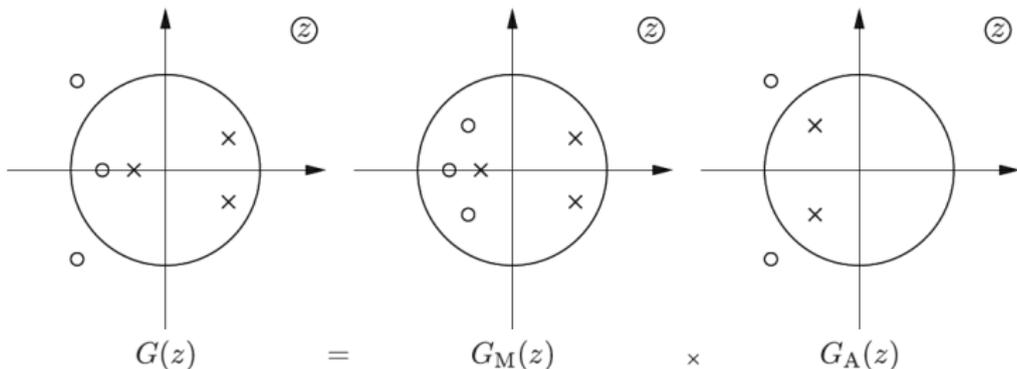
An der reellen Achse gespiegeltes Polpaar, symmetrischer Amplitudengang  $z_{\infty,\mu} = z_{\infty,\nu}^*$

# Allpass und Minimalphasensystem (3)

## Zerlegung

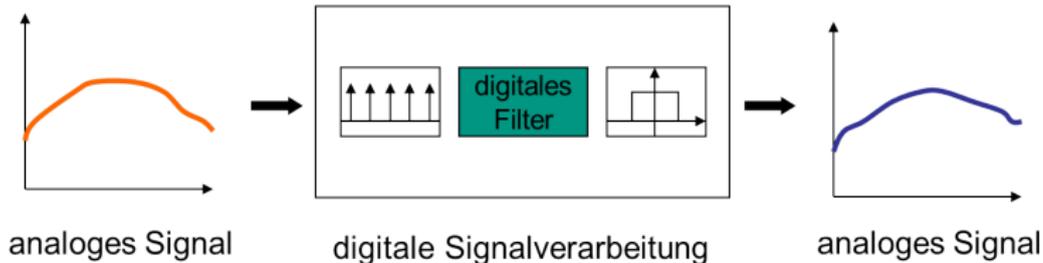
Jedes kausale LTI-System  $G(z)$  lässt sich in Minimalphasen-  $G_M(z)$  und Allpassanteil  $G_A(z)$  zerlegen.

$$G(z) = \frac{Z(z)}{N(z)} = \underbrace{\frac{Z_1(z) \cdot Z_2'(z)}{N(z)}}_{G_M(z)} \cdot \underbrace{\frac{Z_2(z)}{Z_2'(z)}}_{G_A(z)}$$



# Zeitdiskrete Darstellung zeitkontinuierlicher Systeme (1)

## ■ Überblick



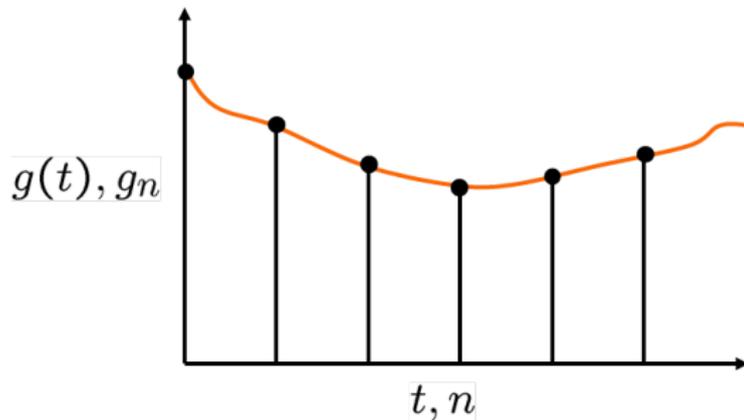
## ■ Drei Ansätze

- Impulsinvarianz
- Pol-/ Nullstellenübertragung
- Numerische Integration

# Impulsinvarianz (1)

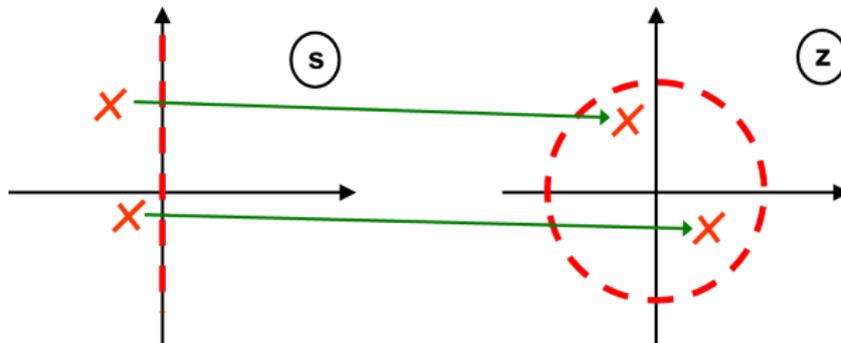
- Kontinuierliches System durch Impulsantwort charakterisiert
- Abtastung der kontinuierlichen Impulsantwort
- Berechnung der z-Transformierten

$$G(s) \longrightarrow g(t) \longrightarrow g_n \longrightarrow G(z)$$

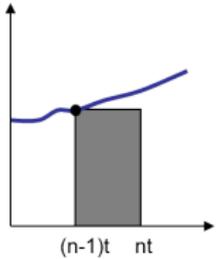
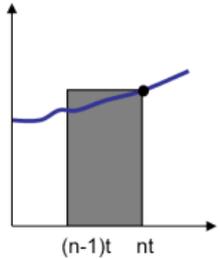
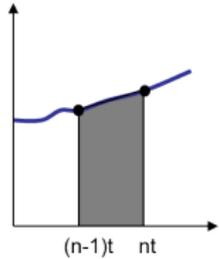
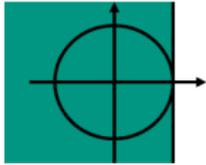
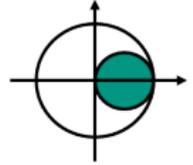
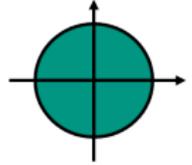


# Pol- /Nullstellenübertragung (1)

- Kontinuierliches System durch Pole und Nullstellen charakterisiert
- Übertragung der Pole und Nullstellen mit  $z = e^{st_A}$  in den z-Bereich
- **Proportionalitätsfaktor** bestimmen  $G(s = j2\pi f_0) = G(z = e^{j2\pi f_0 t_A})$

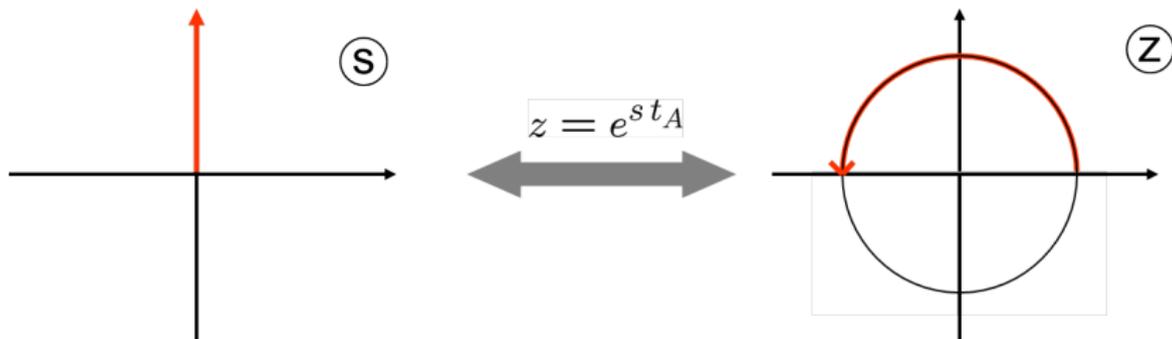


# Numerische Integration (1)

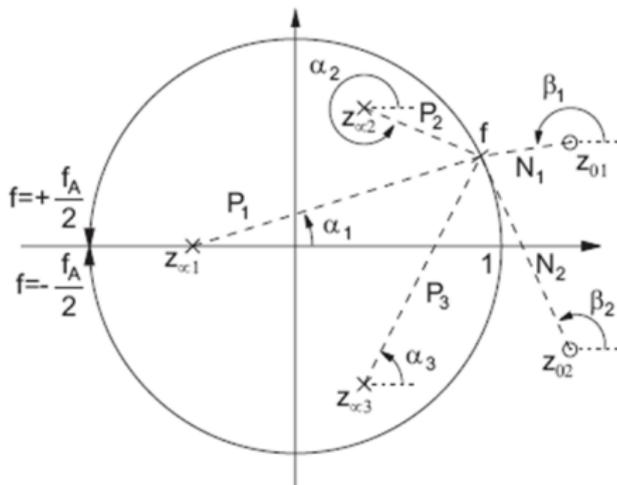
| Name       | Rechteckregel<br>vorwärts   | Rechteckregel<br>rückwärts  | bilineare<br>Transformation  |
|------------|---|---|---|
| Formel     | $s = \frac{z - 1}{t_A}$   | $s = \frac{z - 1}{t_A z}$   | $s = \frac{2}{t_A} \frac{z - 1}{z + 1}$   |
| Skizze     |  |  |                               |
| Konvergenz |  |  |                              |

# Frequenzgang zeitdiskreter Systeme (1)

- Frequenzgang ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Ein- und Ausgangssignal eines Systems, bei Anregung mit einer komplexen Schwingung.  
Übertragungsfunktion 'auf der Frequenzachse'



- Auswertung der Abstände zu Pol- und Nullstellen zum Einheitskreis



- Amplitudengang  $A(f) = |G(z = j2\pi f)| = C \cdot \prod_{\mu=1}^m N_{\mu} \cdot \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{P_{\nu}}$
- Phasengang  $\Phi(f) = \arg\{G(z = j2\pi f)\} = \gamma + \sum_{\mu=1}^m \beta_{\mu} - \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu}$

- Zuordnung Faltung
- Zuordnung Fourier
- Zuordnung kontinuierliche Systeme
- Zuordnung diskrete Fourier-Transformation
- Zuordnung diskrete Systeme

| Zeitfunktionen                        | Faltung                        |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| $\delta(t - \tau), x(t)$              | Verschiebung um $\tau$         |
| Impulskamm, $x(t)$                    | period. Fortsetzung von $x(t)$ |
| untersch. breite Rechtecke            | Plateau                        |
| beide Fkt. sprungförmigen Flanken     | linear steigende Flanke        |
| sprungf. Flanke, linear steig. Flanke | quadrat. steig. Flanke         |
| beide Funktionen zeitl. beschränkt    | zeitlich beschränkt            |



## ■ Interaktives Weblearning

[http://www.iiit.kit.edu/web\\_learning.php](http://www.iiit.kit.edu/web_learning.php)

# Zuordnungsaufgaben - Fourier-Transformation (1)



| Zeitbereich  | Frequenzbereich   |
|--|---|
| Rechteckfunktion   | si-Funktion (Amplitude)                 |
| Dreiecksfunktion   | si <sup>2</sup> -Funktion (Amplitude)   |
| breit / schmal  | schmal / breit  |
| Reelle Schwingung  | Dirac-Impulse bei $f = f_0$ und $f = -f_0$  |
| Offset   | Dirac-Impuls bei $f = 0$  |
| Multiplikation   | Faltung   |
| Verschiebung nach links<br>/ rechts  | steigende / fallende Phase   |

| Pol-/Nullstellen   | Impulsantwort   | Amplitudengang  |
|--|---|---|
| Pole stabil / instabil  | klings ab / auf   |   |
| kompl. / reelle Pole   | schwingt / schwingt nicht   |   |
| $n_{\text{Pole}} - m_{\text{Nst.}} = 0, 1, 2$  | Impuls, Sprung, Knick bei $t = 0$  | Zunahme der Steigung bei $f \rightarrow \infty$  |
| Imaginärteil der Pole (Resonanzfrequenz)   | Schwingfrequenz   | Position der Peaks  |
| Realteil der Pole (Dämpfung)   | Abklinggeschwindigkeit  |    |

# Zuordnungsaufgaben - Diskrete-Fourier-Transformation (1)

| Zeitbereich                 | DFT   |
|-----------------------------|---|
| Reelle Schwingung           | zwei Dirac-Impulse  |
| Alternierende Rechteckfolge | Abklingender Impulskamm  |
| Rauschen                    | Verteilung auf alle Frequenzen  |
| Offset                      | Dirac-Impuls bei $f = 0$  |
| Unganzzahlige Perioden      | Leckeffekt                 |

| Pol-/Nullstellen                              | Impulsantwort   | Amplitudengang  |
|---|---|---|
| Pole stabil / instabil                        | klings ab / auf   |   |
| kompl. / reelle Pole                          | schwingt / schwingt nicht   |   |
| $n_{\text{Pole}} - m_{\text{Nst.}} = 0, 1, 2$ | Verzögerung um 0, 1, 2 Schritte   |   |
| Winkel der Pole/ Nullstellen                  | Schwingfrequenz  | Position der Peaks (der Minima)    |
| Betrag der Pole/ Nullstellen                  | Abklinggeschwindigkeit  | Ausprägung der Peaks (der Minima)  |

# Vielen Dank

- Klausur: 27. März 2014
- Fragestunde gewünscht?
- Terminvorschlag: 20.03.14, 14 Uhr, Seminarraum IIIT