

Signale und Systeme Übungsskript

Aufgaben und Lösungen

Prof. Dr.-Ing. Fernando Puente León
Dipl.-Ing. Sebastian Vater

Version 1.2

Wintersemester 2013/2014

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Industrielle Informationstechnik (IIT)
Hertzstraße 16
76187 Karlsruhe
<http://www.iit.kit.edu/sus.php>

Inhaltsverzeichnis

I Aufgaben	7
Übung 1	9
Aufgabe 1.1: Energiesignale	9
Aufgabe 1.2: Legendre-Polynome	9
Aufgabe 1.3: Approximation - Orthonormalsystem	9
Aufgabe 1.4: Faltung mit der Fourier-Transformation	10
Aufgabe 1.5: Zuordnungsaufgaben - Faltung	10
Übung 2	13
Aufgabe 2.1: Fourier-Reihe	13
Aufgabe 2.2: Fourier-Transformation	13
Aufgabe 2.3: Zusammenhang Fourier-Reihe und Fourier-Transformation	13
Aufgabe 2.4: Fourier-Transformierte	14
Aufgabe 2.5: Zuordnungsaufgaben - Faltung	14
Übung 3	17
Aufgabe 3.1: Systemeigenschaften	17
Aufgabe 3.2: Impulsantwort System - Stabilität	17
Aufgabe 3.3: Laplace-Transformation	17
Aufgabe 3.4: Laplace-Rücktransformation - PBZ	17
Aufgabe 3.5: Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems	18
Aufgabe 3.6: Zeitkontinuierliche Systeme - Zuordnung	18
Übung 4	21
Aufgabe 4.1: Zeitkontinuierliches System - Signalflussgraph	21
Aufgabe 4.2: Zeitkontinuierliches System - Differentialgleichung	22
Aufgabe 4.3: Minimalphasen- und Allpassanteil	22
Aufgabe 4.4: RLC-Schaltung	22
Aufgabe 4.5: Pol-/Nullstellendiagramm	23
Übung 5	25
Aufgabe 5.1: Rekonstruktionsfilter	25
Aufgabe 5.2: Unterabtastung	26
Aufgabe 5.3: Signal nach Unterabtastung	26
Aufgabe 5.4: Änderung des Spektrums nach Unterabtastung	26
Aufgabe 5.5: Abtasttheorem	26
Aufgabe 5.6: Rekonstruktionsfilter	26
Übung 6	29
Aufgabe 6.1: DFT von Zeitfolgen	29

Aufgabe 6.2: Leckeffekt bei der DFT	29
Aufgabe 6.3: Auflösung im Frequenzbereich	29
Aufgabe 6.4: DFT-Zuordnungen	30
Übung 7	31
Aufgabe 7.1: Differenzgleichung	31
Aufgabe 7.2: z-Transformation cosh	31
Aufgabe 7.3: Inverse z-Transformation	31
Aufgabe 7.4: Inverse z-Transformation – Residuensatz	31
Aufgabe 7.5: Stabilität und Minimalphasigkeit	32
Übung 8	33
Aufgabe 8.1: Zeitdiskretes System- Blockschaltdiagramm	33
Aufgabe 8.2: Zeitdiskrete Darstellung aus Übertragungsfunktion	34
Aufgabe 8.3: Zeitdiskretes LTI-System	34
Aufgabe 8.4: Zeitdisk.-Systeme-Zuordnungen	35
II Lösungen	39
Übung 1	41
Lösung 1.1	41
Lösung 1.2	41
Lösung 1.3	43
Lösung 1.4	45
Lösung 1.5	45
Übung 2	47
Lösung 2.1	47
Lösung 2.2	47
Lösung 2.3	47
Lösung 2.4	49
Lösung 2.5	50
Übung 3	51
Lösung 3.1	51
Lösung 3.2	52
Lösung 3.3	52
Lösung 3.4	52
Lösung 3.5	53
Lösung 3.6	53
Übung 4	55
Lösung 4.1	55
Lösung 4.2	56
Lösung 4.3	57
Lösung 4.4	58
Lösung 4.5	61

Übung 5	63
Lösung 5.1	63
Lösung 5.2	63
Lösung 5.3	63
Lösung 5.4	64
Lösung 5.5	66
Lösung 5.6	66
 Übung 6	 67
Lösung 6.1	67
Lösung 6.2	69
Lösung 6.3	70
Lösung 6.4	70
 Übung 7	 71
Lösung 7.1	71
Lösung 7.2	71
Lösung 7.3	71
Lösung 7.4	72
Lösung 7.5	73
 Übung 8	 77
Lösung 8.1	77
Lösung 8.2	80
Lösung 8.3	82
Lösung 8.4	84

Teil I

Aufgaben

1. Übung

Aufgabe 1.1: Energiesignale

Prüfen Sie, ob es sich bei dem Signal

$$x(t) = e^{-t} \cdot \sin(2\pi ft) \cdot \sigma(t)$$

um ein Energiesignal handelt.

Aufgabe 1.2: Legendre-Polynome

Gegeben sind die Funktionen $B_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $x \in [-1, 1]$.

- Zeigen Sie allgemein, dass die Funktionen $\{B_k(x)\}_k$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ kein Orthonormalsystem bilden.
- Durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ erhält man die orthonormalisierten Polynome $P_k(t)$, welche auch Legendre-Polynome genannt werden. Bestimmen Sie $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$.

Aufgabe 1.3: Approximation - Orthonormalsystem

- Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ durch eine Linearkombination der Legendre-Polynome bis zur zweiten Ordnung

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^2 b_i P_i(x)$$

- Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ durch eine Linearkombination der normierten Fourierreihe.

Aufgabe 1.4: Faltung mit der Fourier-Transformation

Bestimmen Sie die Faltung der Funktion

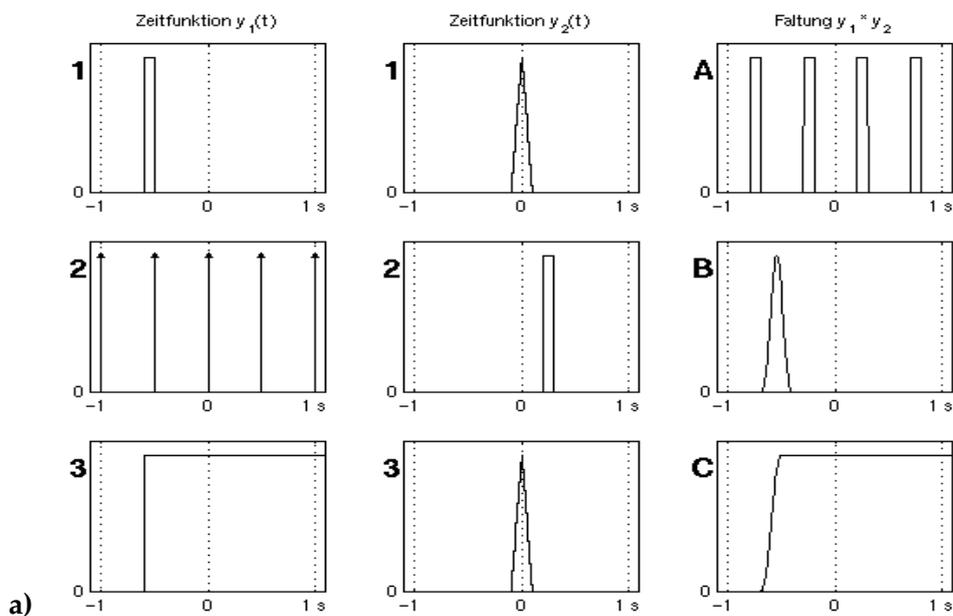
$$y(t) = r_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

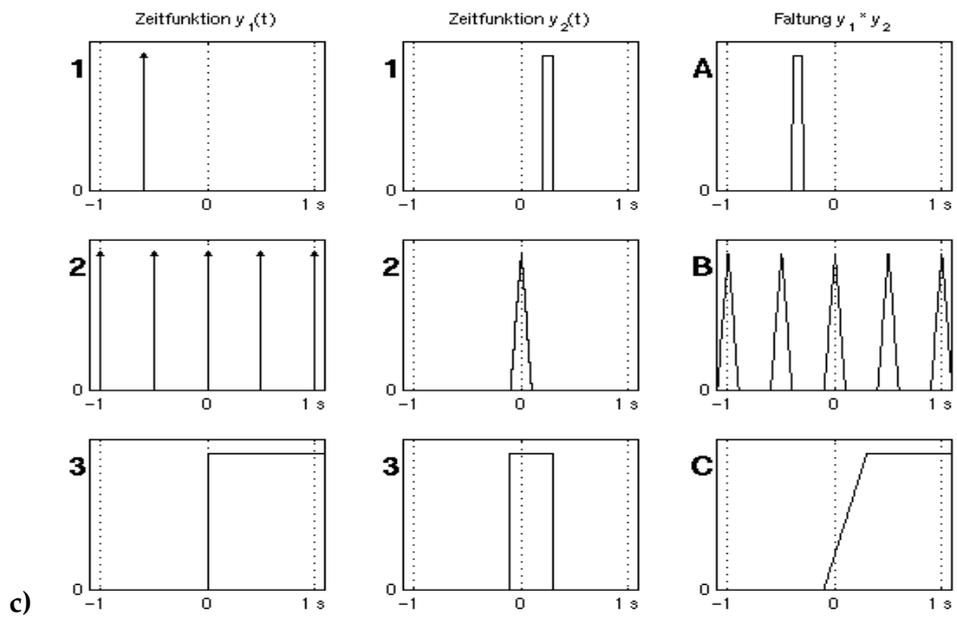
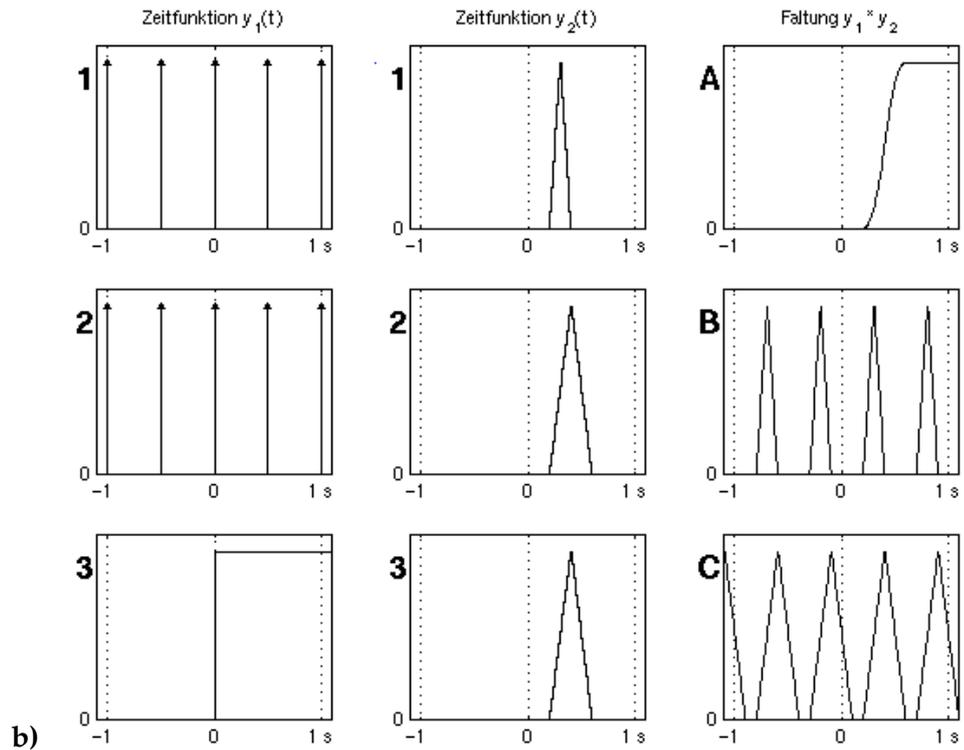
mit sich selbst durch Berechnung

- im Zeitbereich und
- über den Weg im Frequenzbereich.

Aufgabe 1.5: Zuordnungsaufgaben - Faltung

Ordnen Sie den folgenden Funktionen das richtige Faltungsprodukt zu.





2. Übung

Aufgabe 2.1: Fourier-Reihe

Gegeben ist die reelle Funktion

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } -\pi < t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $x(t)$ wird periodisch fortgesetzt und bildet die Funktion $y(t)$ mit der Periodendauer $T = 2\pi$ aus Abbildung 2.1. Es gilt $y(t) = e^{-t}$ für $-\pi < t \leq \pi$ und $y(t + n2\pi) = y(t)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

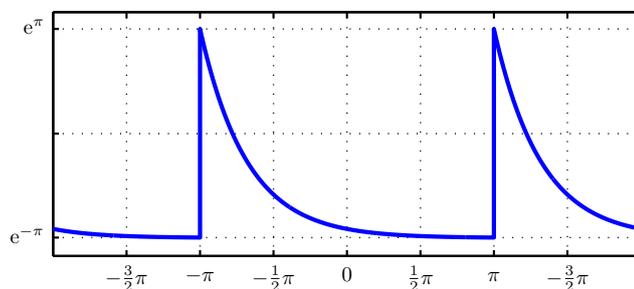


Abbildung 2.1: Die periodische Funktion $y(t)$.

- a) Bestimmen Sie die **komplexen** Fourier-Koeffizienten c_k der periodischen Funktion $y(t)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

Aufgabe 2.2: Fourier-Transformation

Die Funktion $Y(\cdot)$ ist die Fourier-Transformierte der Funktion $y(\cdot)$.

- a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion Y (diesmal als Funktion der Zeit t) und stellen Sie diese als Funktion von y (diesmal als Funktion der Frequenz f) dar.
- b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von $y(t) = \delta(t - \alpha)$.
- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus **a)** und **b)** die Fourier-Transformierte von $y(t) = e^{-j2\pi\alpha t}$.

Aufgabe 2.3: Zusammenhang Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

Eine periodische Funktion $y_p(t)$ wird mittels

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t - kT)$$

aus einer auf ein Grundintervall der Länge T zeitbegrenzten Funktion $y(t)$ gebildet. Es soll der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_k der Fourier-Reihe der periodischen Funktion $y_p(t)$, der Fourier-Transformierten $Y_p(f)$ und der Fourier-Transformierten $Y(f)$ untersucht werden. Besonders interessiert hier, wie ...

- a) $Y_p(f)$ aus c_k ,
- b) c_k aus $Y(f)$,
- c) $Y(f)$ aus $Y_p(f)$,
- d) $Y_p(f)$ aus $Y(f)$,

entsteht. (Annahme: Das Grundintervall liegt zwischen $-\frac{T}{2}$ bis $+\frac{T}{2}$.)

Aufgabe 2.4: Fourier-Transformierte

Leiten Sie die Fourier-Transformierte von $\sin(2\pi f_0 t)$ aus

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

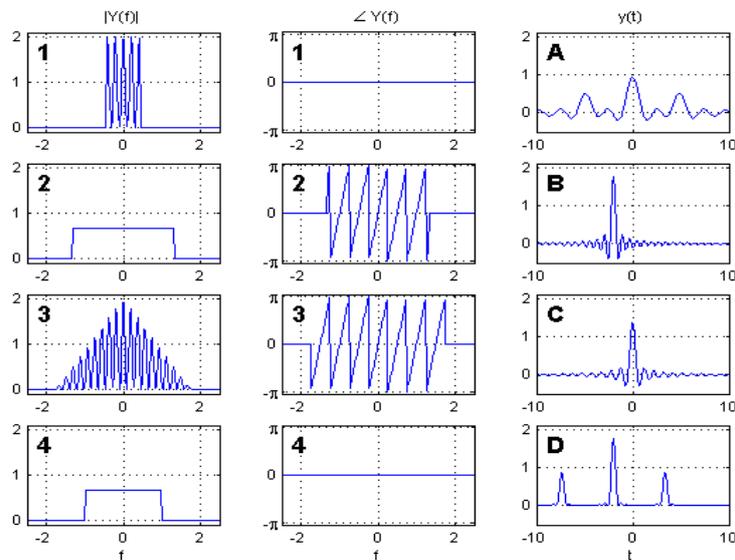
durch

- a) Differentiation
- b) Verschiebung

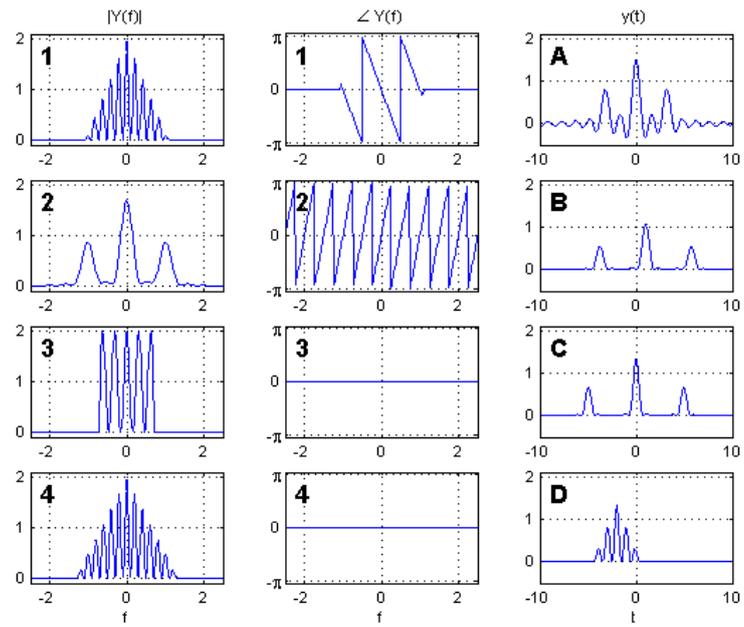
her.

Aufgabe 2.5: Zuordnungsaufgaben - Faltung

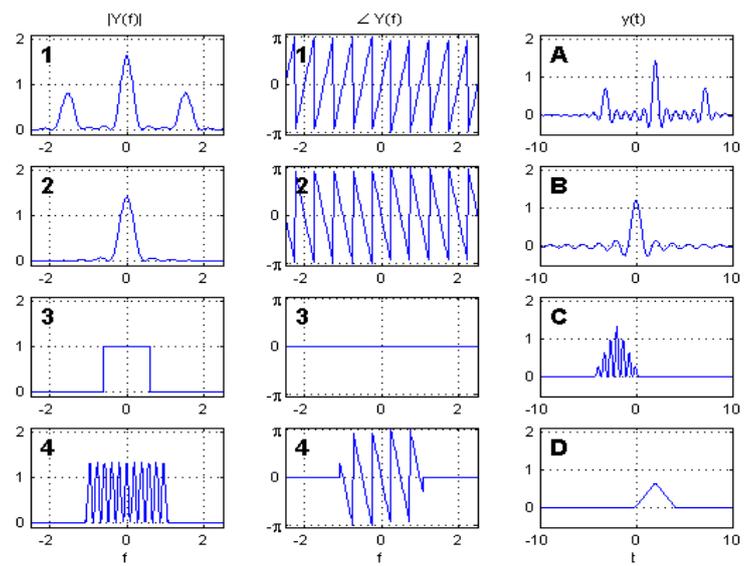
Ordnen Sie den folgenden Spektren die richtige Zeitfunktion zu.



a)



b)



c)

3. Übung

Aufgabe 3.1: Systemeigenschaften

a) Untersuchen Sie die folgenden Systeme auf Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität. Das Eingangssignal ist jeweils mit x , das Ausgangssignal mit y bezeichnet.

$$(1) \quad y(t) = \cos(x(t-1)) \quad t, x, y \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad y(t) = ax(t) - b \frac{dy(t)}{dt} \quad a, b, t, x, y \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad y(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau \quad t, x, y, T \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad y(t) = at^2 + x(t+3) \quad a, t, x, y \in \mathbb{R}$$

b) Diskutieren Sie, ob die Systeme (1)-(4) BIBO stabil sind, und wenn ja unter welchen Bedingungen.

Aufgabe 3.2: Impulsantwort System - Stabilität

Geben Sie jeweils an, wann die folgenden Impulsantworten ein stabiles LTI-System charakterisieren.

$$g_1(t) = \cos(t)\sigma(t) \quad , \quad g_2(t) = e^{\alpha t} \sigma(t) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3.3: Laplace-Transformation

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{7}{15} e^{-3t} \right) \sigma(t)$$

mit Hilfe

a) des Integrals $Y(s) = \int_{0-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt$

b) der Korrespondenztabelle.

Aufgabe 3.4: Laplace-Rücktransformation - PBZ

Berechnen Sie mittels des Residuensatzes die kausale Zeitfunktion zu der Laplace-Transformierten

$$X(s) = \frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s}$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Partialbruchzerlegung von $X(s)$.

Aufgabe 3.5: Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems mit der Impulsantwort

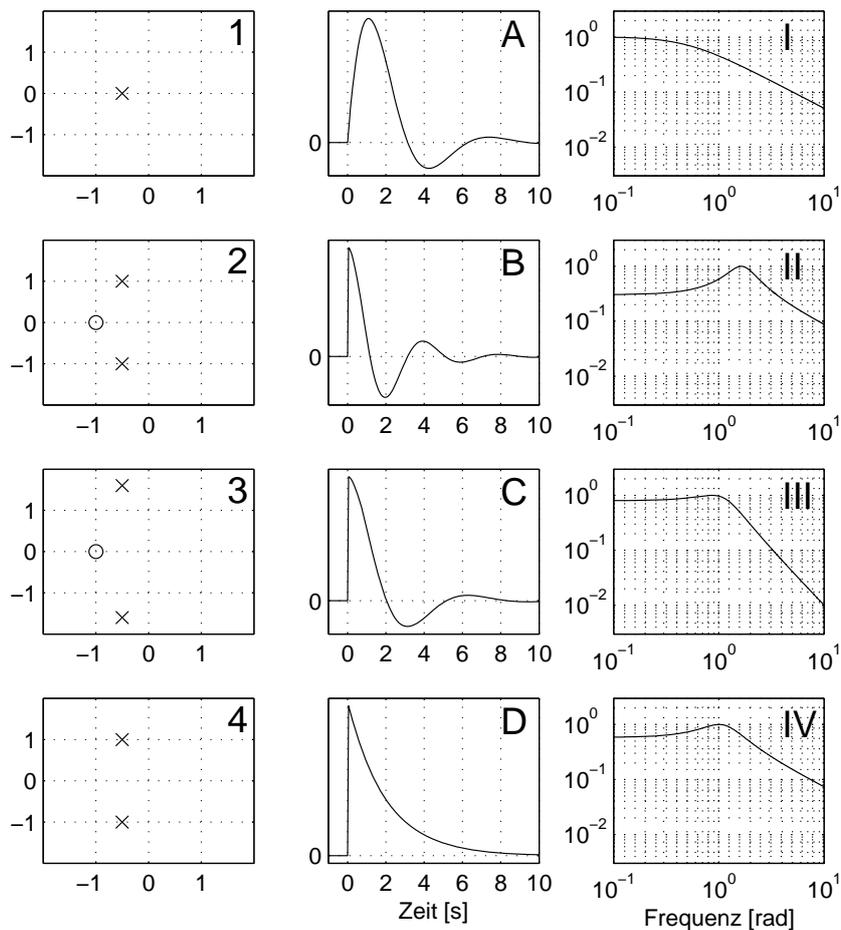
$$g(t) = (8t \cdot e^{-2t} - 4t^2 \cdot e^{-2t}) \sigma(t)$$

und skizzieren Sie den Pol-Nullstellenplan.

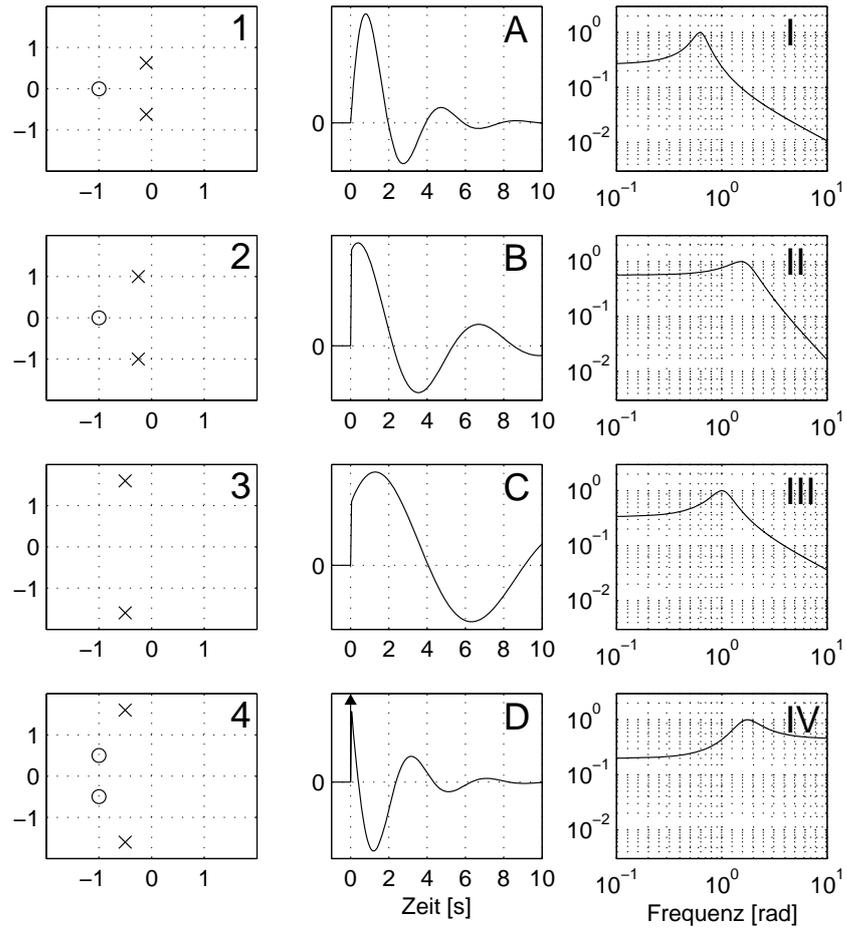
Aufgabe 3.6: Zeitkontinuierliche Systeme - Zuordnung

Ordnen Sie den folgenden Pol-/Nullstellen-Diagrammen (arabische Zahlen) die richtigen Impulsantworten (große Buchstaben) und Amplitudengänge (römische Zahlen) zu.

a)



b)



4. Übung

Aufgabe 4.1: Zeitkontinuierliches System - Signalflussgraph

In Bild 4.2 ist der Signalflussgraph eines Systems S_1 mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

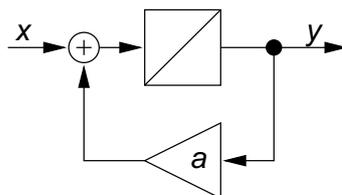


Abbildung 4.2: Signalflussgraph des Systems S_1

- Bestimmen Sie aus dem Signalflussgraphen des Systems S_1 dessen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ des Systems S_1 .
- Wie lauten die Pol- und Nullstellen des Systems S_1 .
- Ist das System S_1 stabil? (Begründung)
- Geben Sie die Impulsantwort des Systems S_1 an.

In Bild 4.3 ist der Signalflussgraph eines Systems S_2 mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt.

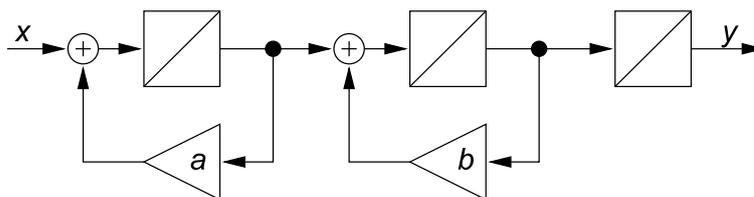


Abbildung 4.3: Signalflussgraph des Systems S_2

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ des Systems S_2 .
- Wie lauten Pol- und Nullstellen des Systems S_2 .
- Ist das System S_2 stabil? (Begründung)

Aufgabe 4.2: Zeitkontinuierliches System - Differentialgleichung

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches, kausales LTI-System, welches bei dem Eingangssignal $y_e(t)$ und dem Ausgangssignal $y_a(t)$ durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}_a(t) + 5\dot{y}_a(t) + 4y_a(t) = y_e(t)$$

beschrieben ist.

- Berechnen Sie **jeweils** eine Zustandsraumdarstellung dieses Systems, indem Sie
 - die Herleitung aus der Vorlesung (Buch) **nachvollziehen**.
 - die Zustandsgrößen $z_1(t) = y_a(t)$, $z_2(t) = \dot{y}_a(t)$ verwenden.
- Geben Sie mittels der Differentialgleichung für das System einen Signalflussgraphen an.
- Berechnen Sie aus einer der Zustandsraumdarstellungen nach a) die Übertragungsfunktion. Nehmen Sie hierfür verschwindende Anfangswerte an.
- Wie lautet die Impulsantwort des Systems?
- Berechnen Sie über das Faltungsintegral die Reaktion des Systems auf das Eingangssignal $y_e(t) = e^{-t} \sigma(t)$.
- Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems aus der Impulsantwort.

Aufgabe 4.3: Minimalphasen- und Allpassanteil

- Zerlegen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-2)(s-3)}{(s^2+2s+2)(s+5)}$$

in ihren Minimalphasen- und ihren Allpass-Anteil. Ist der Allpassanteil stabil? Kann diese Aussage verallgemeinert werden? (**Begründung**)

Aufgabe 4.4: RLC-Schaltung

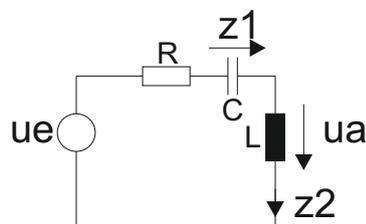


Abbildung 4.4: RLC-Schaltung

Gegeben sei die in Abbildung 4.4 skizzierte Schaltung mit $R, L, C \in \mathbb{R}^+$. Zu Beginn der Betrachtung befindet sich das System in Ruhe.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Zusatzgrößen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ die Differentialgleichungen, die das System charakterisieren.
- b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$. Gehen Sie davon aus, dass sich das System zu Beginn in Ruhe befindet. Zeichnen Sie den Signalflussgraphen in ARMA-Form.
- c) Ist das System stabil? Berechnen Sie den stationären Endwert von $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$.
- d) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems.
- e) Für welche Werte der Parameter R , L und C enthält die Sprungantwort Schwingungen?
- f) Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems für die Zahlenwerte $R = 100$, $L = 100 \cdot 10^{-3}$ und $C = 300 \cdot 10^{-6}$.

Aufgabe 4.5: Pol-/Nullstellendiagramm

Von einem zeitkontinuierlichen, reellen LTI-System $G(s)$ seien folgende Eigenschaften bekannt:

1. Es existieren insgesamt fünf Pol-/Nullstellen (zusammen).
 2. $\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| = 0$.
 3. Das System ist stabil.
 4. Der Betrag des Realteils aller Polstellen ist jeweils 2.
 5. Der Imaginärteil einer Polstelle ist 1.
 6. Das System ist minimalphasig.
 7. $|G(j)| = 0$.
- a) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm.
 - b) Begründen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen. Nutzen Sie dafür die Nummerierung der oben genannten Eigenschaften.
 - c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ an.

5. Übung

Aufgabe 5.1: Rekonstruktionsfilter

Ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$ wird mit der Abtastfrequenz f_A ideal zu $y_*(t)$ abgetastet und anschließend mit einem Rekonstruktionsfilter mit dem Frequenzgang $G(f)$ rekonstruiert. Dabei soll das ursprüngliche Signal wiedergewonnen werden. Das bandbegrenzte Signal $y(t)$, das oberhalb von 20 kHz keine Spektralanteile mehr besitzt, lässt sich durch das Spektrum in Bild 5.5 beschreiben.

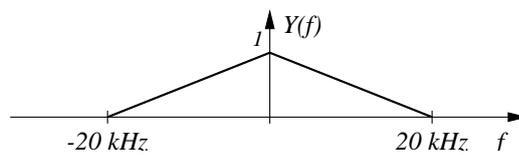


Abbildung 5.5: Spektrum des Signals

Für die Abtastfrequenz f_A stehen folgende Frequenzen zur Verfügung:

- (i) $f_A = 36 \text{ kHz}$ (ii) $f_A = 44 \text{ kHz}$ (iii) $f_A = 64 \text{ kHz}$

- a) Wählen Sie aus den drei gegebenen Abtastfrequenzen die niedrigste aus, so dass eine exakte Rekonstruktion des ursprünglichen Signals $y(t)$ möglich ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

Als Rekonstruktionsfilter mit dem Frequenzgang $G(f)$ stehen die Frequenzgänge in Bild 5.6 zur Verfügung.

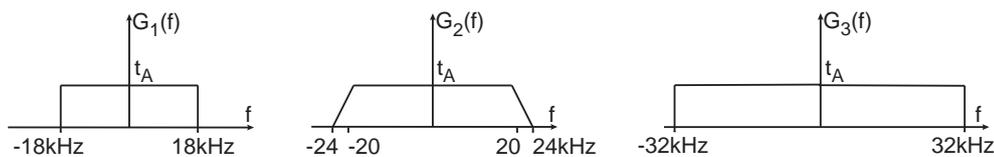


Abbildung 5.6: Rekonstruktionsfilter

- b) Entscheiden Sie sich für eines der gegebenen Interpolationsfilter G_1 , G_2 oder G_3 , mit dem eine exakte Rekonstruktion mit der in Teilaufgabe a) gewählten Abtastfrequenz gelingt. Begründen Sie Ihre Wahl.
- c) Skizzieren Sie für Ihre Wahl der Abtastfrequenz aus Teilaufgabe a) und des Rekonstruktionsfilters aus Teilaufgabe b) das Spektrum des abgetasteten Signals $y_*(t)$ und den Frequenzgang des Rekonstruktionsfilters für $|f| < 80 \text{ kHz}$.

Aufgabe 5.2: Unterabtastung

Ein reelles Signal besitzt Frequenzband von 101 bis 112 kHz Spektralanteile. Spiegeln folgende Abtastfrequenzen diesen Frequenzbereich in das Nyquistband?

- 1) 15kHz 2) 20 kHz 3) 25kHz 4) 30 kHz

Aufgabe 5.3: Signal nach Unterabtastung

Ein Bandpasssignal $y(t)$ mit der Mittenfrequenz f_0 und der Bandbreite B soll durch Unterabtastung demoduliert werden. Die Spektren sind im Folgenden jeweils im Bereich $-f_0 \leq f \leq f_0$ zu zeichnen.

- a) Das Signal $y(t)$ wird mit der Frequenz $f_A = \frac{4}{9}f_0$ abgetastet. Zeichnen Sie das Spektrum des abgetasteten Signals y_n . Welche Bedingung muss gelten, damit es zu keiner Überschneidung von Teilspektren kommt?
- b) Das abgetastete Signal y_n wird nun mit der Funktion $m_n = (-j)^n$ moduliert:

$$x_n = y_n \cdot m_n = y_n \cdot (-j)^n$$

Zeichnen Sie das Spektrum von x_n .

- c) Zum Schluss wird das Signal x_n durch einen idealen Tiefpass mit der Grenzfrequenz $\frac{f_A}{4}$ geschickt. Dieser Tiefpass dient als Rekonstruktionsfilter. Zeichnen Sie das Spektrum von x_n nach der Filterung.

Aufgabe 5.4: Änderung des Spektrums nach Unterabtastung

Ein Signal $y(t)$ wird mit der Frequenz $f_A = 1/t_A$ abgetastet. Anschließend wird jedoch nur jeder N -te Wert der Abtastwertefolge $y(n)$ weiterverarbeitet, d.h. die verarbeitete Folge besitzt die Abtastfrequenz $f_{A,2} = \frac{f_A}{N}$.

Untersuchen Sie, wie das Spektrum des langsam abgetasteten Signals mit dem des schnell abgetasteten Signals zusammenhängt.

Aufgabe 5.5: Abtasttheorem

Welcher Bedingung muss die Abtastzeit t_A genügen, damit bei der Abtastung des Signals

$$y(t) = 1 + \cos(2\text{Hz}\pi t) + 2 \sin(40\text{Hz}\pi t)$$

das Abtasttheorem erfüllt wird?

Aufgabe 5.6: Rekonstruktionsfilter

Das Signal

$$y(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi f_2 t) \quad f_1 = 3\text{ Hz} \quad f_2 = 4\text{ Hz}$$

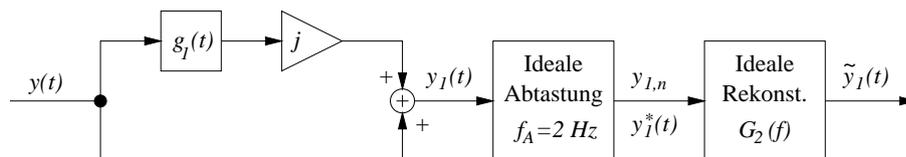


Abbildung 5.7: Abtastsystem

werde mit der Anordnung in Bild 5.7 abgetastet und wieder rekonstruiert.

Dabei durchläuft das Signal $y(t)$ ein LTI-System mit der Impulsantwort $g_1(t) = 1/(\pi t)$ und wird mit der imaginären Einheit j multipliziert. Das Resultat wird mit dem ursprünglichen Signal $y(t)$ überlagert. Das entstehende Signal $y_1(t)$ wird zunächst ideal mit der Abtastfrequenz $f_A = 2$ Hz abgetastet und dann mit einem zeitkontinuierlichen Rekonstruktionsfilter mit der Übertragungsfunktion

$$G_2(f) = \begin{cases} 1 & , |f| < 1,5 \text{ Hz} \\ 0 & , |f| \geq 1,5 \text{ Hz} \end{cases}$$

rekonstruiert.

- Wie heißt ein System mit der Impulsantwort $g_1(t)$? Geben Sie $G_1(f)$ an.
- Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $y(t)$.
- Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $y_1(t)$.
- Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $y_1^*(t)$.
- Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $\tilde{y}_1(t)$.

6. Übung

Aufgabe 6.1: DFT von Zeitfolgen

Berechnen Sie jeweils zur Folge y_n die diskrete Fourier-Transformierte, DFT, Y_k für die Indizes $k = 0, \dots, N - 1$.

- a) $y_n = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- b) $y_n = (2, 0, 3, 0)$
- c) $y_n = (1, 2, 3, 4)$
- d) $y_n = e^{j2\pi\alpha n/N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, N fest
- e) $y_n = \cos(2\pi\alpha n/N)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, N fest
- f) $y_n = 1$, N fest

Aufgabe 6.2: Leckeffekt bei der DFT

Verwenden Sie die Formel

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-j2\pi kn/N) = \begin{cases} N & , k = l \cdot N, l \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

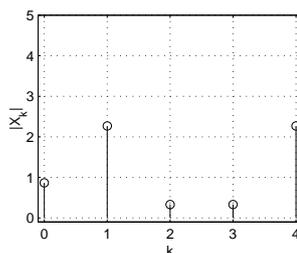
zur Berechnung der 6-Punkt-DFT für die Zeitwerte $x_n = \sin(2\pi f_0 n t_A)$, wobei die Abtastzeit als $t_A = \frac{1}{6f_0}$ gewählt ist. Skizzieren Sie den Betrag der erhaltenen DFT im Bereich $0 \leq k \leq 5$.

Würde man eine DFT der Länge 5 benutzen, so ergäbe sich das folgende Betragsspektrum der DFT:

Erklären Sie die Unterschiede der beiden Spektren (DFT der Länge 5 und 6).

Aufgabe 6.3: Auflösung im Frequenzbereich

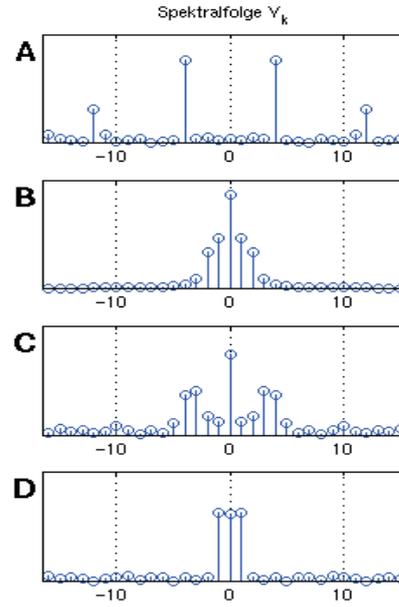
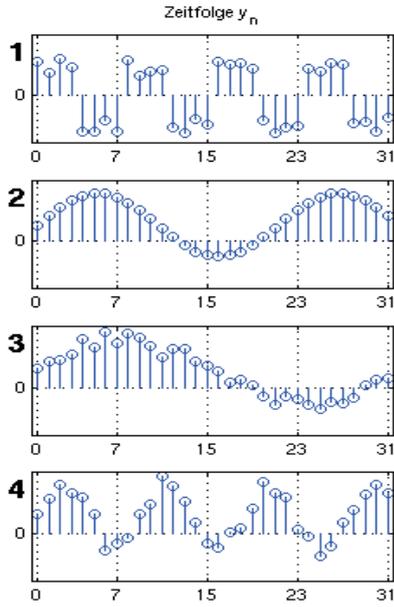
Bei Wolkenkratzern müssen Gebäuderesonanzen im Bereich von 0,8 Hz bis 1,0 Hz vermieden werden, da sonst Fenster zu Bruch gehen können. Deshalb ist es für Gebäudetechniker wichtig, die exakten Resonanzfrequenzen zu kennen. Dazu werden am Gebäude Aufnehmer angebracht, deren Signale digital ausgewertet werden. Nun wird sofort nach der A/D-Wandlung eine FFT durchgeführt. Wieviel Punkte $N = 2^l$ muss die FFT bei der Abtastfrequenz $f_A = 5,4$ Hz umfassen, damit die Frequenzauflösung feiner als 0,001 Hz ist? Wie lange muss das Signal dabei beobachtet werden?



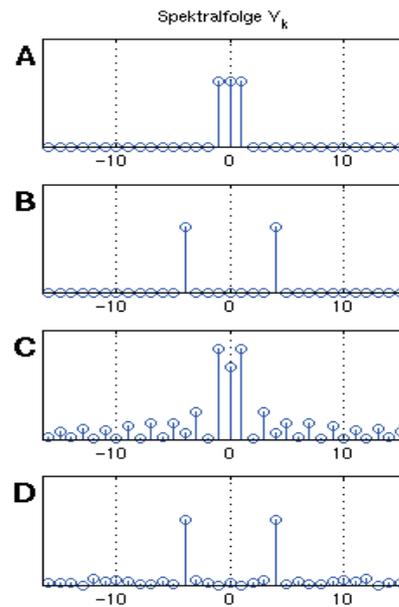
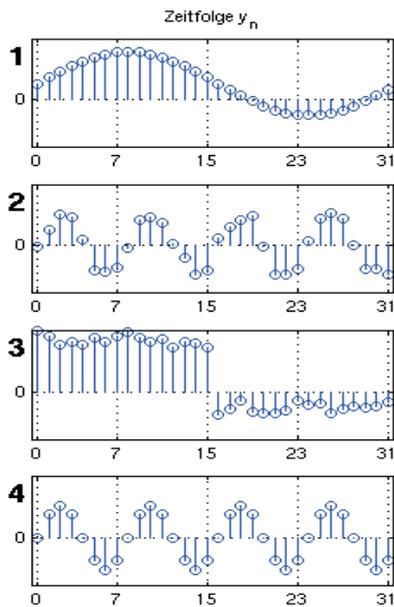
Aufgabe 6.4: DFT-Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Zeitfolgen die richtigen Spektralfolgen zu.

a)



b)



7. Übung

Aufgabe 7.1: Differenzgleichung

Ein zeitdiskretes System S wird durch die Differenzgleichung

$$y_n - 2^n \cdot y_{n+1} + 3 \cdot y_{n+2}^2 = 4 \cdot u_n - 2 \cdot u_{n+1}$$

beschrieben.

- a) Ist das System S linear? (Begründung)
- b) Ist das System S zeitinvariant? (Begründung)
- c) Ist das System S kausal? (Begründung)

Aufgabe 7.2: z-Transformation cosh

Geben Sie die z-Transformierte und deren Konvergenzgebiet der Folge

$$h_n = \cosh(\alpha n) \sigma_n$$

an und skizzieren Sie das Konvergenzgebiet in der z-Ebene.

Aufgabe 7.3: Inverse z-Transformation

Berechnen Sie alle zu $X(z) = \frac{2z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}$ gehörenden Zeitfolgen und skizzieren Sie die Konvergenzgebiete.

Aufgabe 7.4: Inverse z-Transformation – Residuensatz

Berechnen Sie die zu der z-Transformierten

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 5}$$

gehörende **kausale** Zeitfolge mittels des **Residuensatzes**. Geben Sie anschließend die Werte für x_0 , x_1 , x_2 an und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Polynomdivision bzw. Ausmultiplizieren aus dem Reihenansatz.

Aufgabe 7.5: Stabilität und Minimalphasigkeit

- a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist das zeitdiskrete System

$$G_1(z) = \frac{1}{z^2 + 0,25z + c}$$

stabil?

- b) Für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist das zeitdiskrete System

$$G_2(z) = \frac{z^2 + 0,25z + b}{z^2 + 0,25z + c}$$

stabil und minimalphasig?

Im Folgenden wird mit der Übertragungsfunktion $G_1(z)$ mit

$$c = -\frac{3}{64}$$

gerechnet.

- c) Bestimmen Sie die kausale Impulsantwort $g_{1,n}$.

8. Übung

Aufgabe 8.1: Zeitdiskretes System- Blockschaltdiagramm

Ein reelles, kausales, zeitdiskretes System S wird durch das Blockschaltdiagramm in Bild 8.8 beschrieben.

- Geben Sie eine Differenzgleichung an, die das System beschreibt.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des zeitdiskreten Systems S . Geben Sie diese als Quotient zweier Polynome in z an.
- Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$.
- Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm der Übertragungsfunktion $G(z)$.
- Ist das System stabil? (Begründung).
- Ist das System minimalphasig? (Begründung).

Das System wird mit dem Signal

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma_n$$

angeregt.

- Wie lautet das Ausgangssignal y_n des Systems S ? Geben Sie das Ergebnis mit reellen Zahlen an.

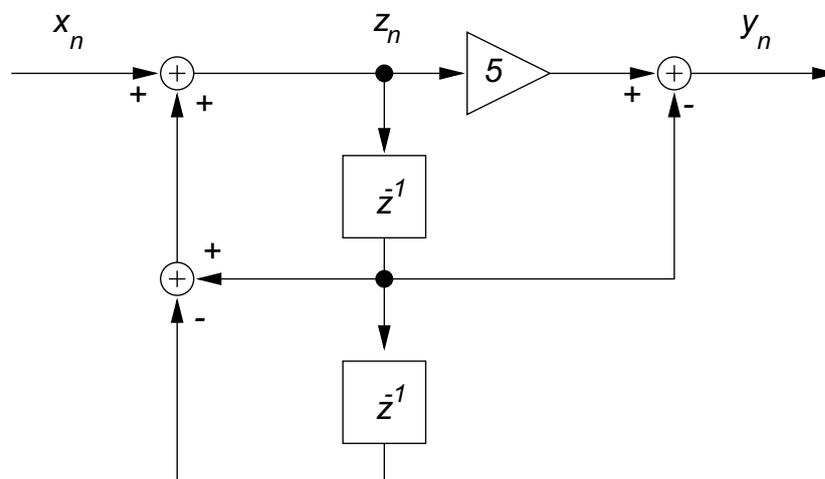


Abbildung 8.8: Zeitdiskretes System

Aufgabe 8.2: Zeitdiskrete Darstellung aus Übertragungsfunktion

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 1}{0,1 \cdot s + 1}$$

eines LTI-Systems. Berechnen Sie die diskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ und deren Pole und Nullstellen aus der kontinuierlichen Übertragungsfunktion mit Hilfe folgender Transformationsvorschriften:

- a) Rechteckregel vorwärts
- b) Rechteckregel rückwärts
- c) Trapezregel
- d) Pol-Nullstellenübertragung bei stationärer Genauigkeit

Die Abtastzeit beträgt $t_A = 0,25$.

Aufgabe 8.3: Zeitdiskretes LTI-System

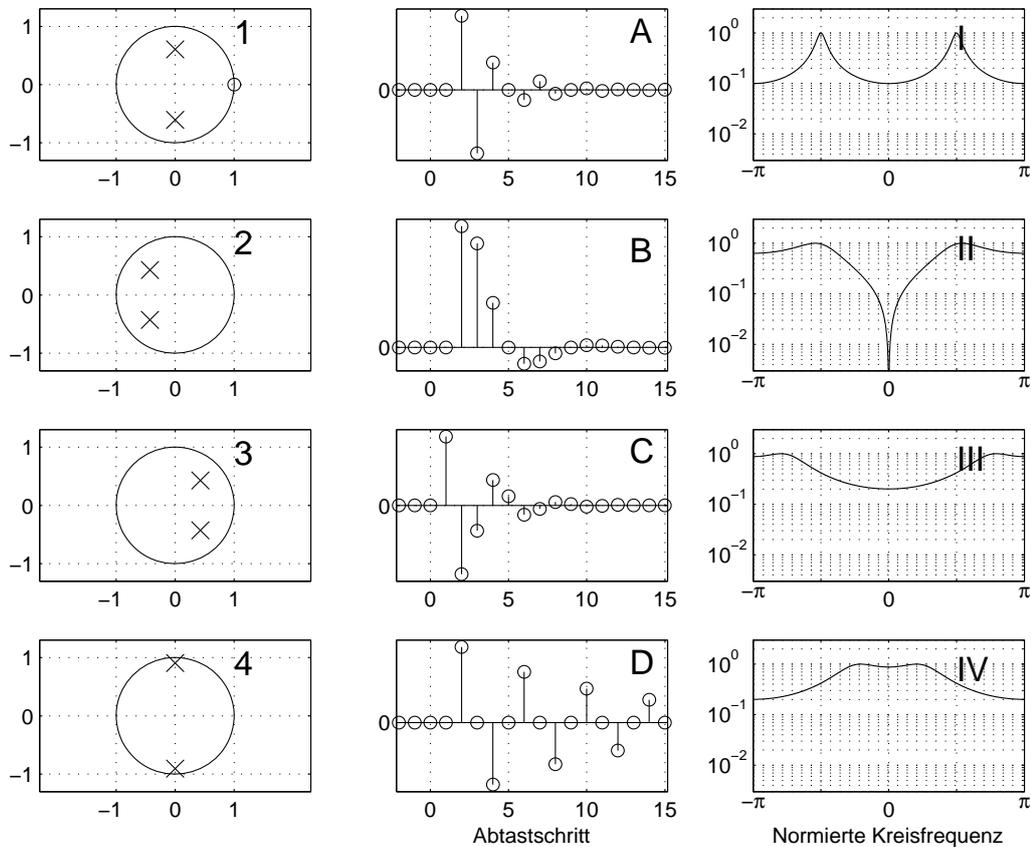
Gegeben sei das in Abbildung 8.9 gezeigte zeitdiskrete LTI-System.

- a) Berechnen Sie die Zustandsraumdarstellung des Systems mit den Zustandsgrößen $z_{1,n}$ und $z_{2,n}$.
- b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.
- c) Stellen Sie das System durch seine Differenzgleichung dar.
- d) Untersuchen Sie das System auf Stabilität.

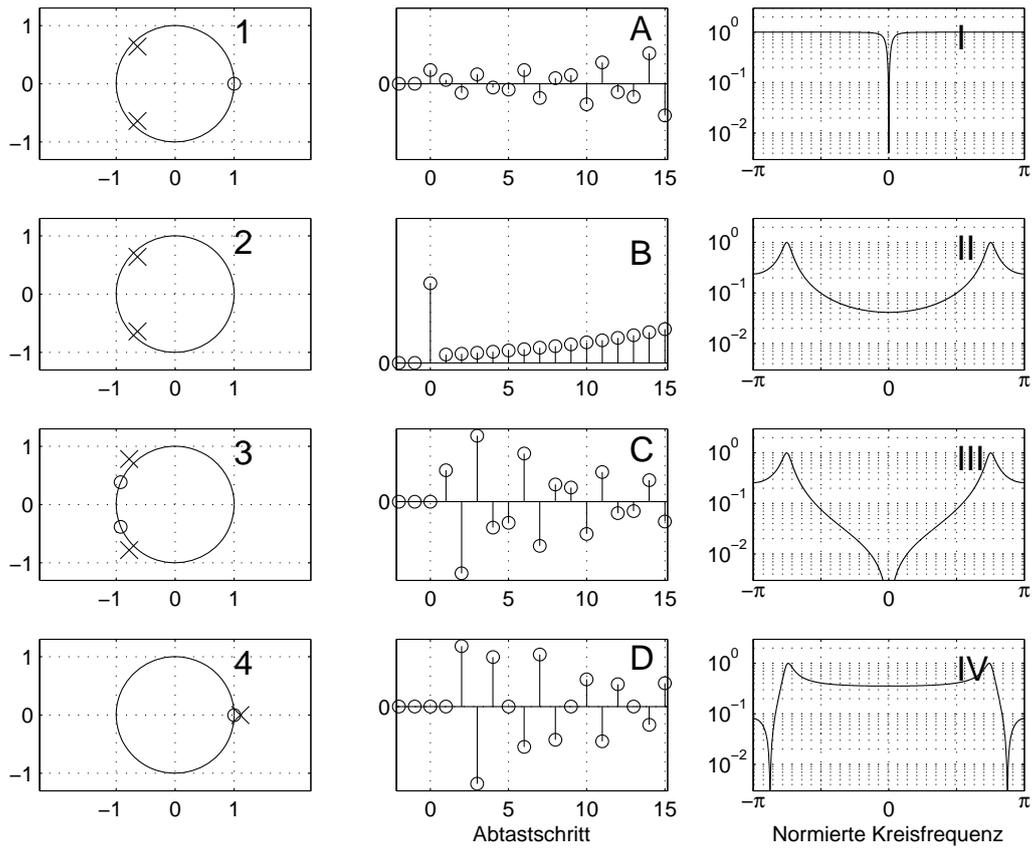
Aufgabe 8.4: Zeitdisk.-Systeme-Zuordnungen

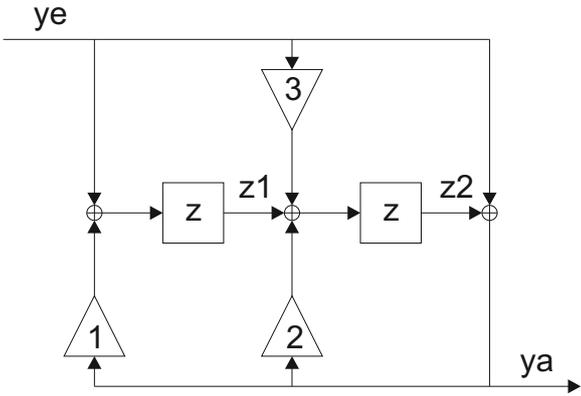
Ordnen Sie den folgenden Pol-/Nullstellen-Diagrammen die richtigen **Impulsantworten** und **Amplitudengänge** zu.

a)



b)





Teil II

Lösungen

1. Übung

Lösung 1.1

Wegen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t} \sin(2\pi ft) \sigma(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |e^{-t} \sin(2\pi ft)|^2 dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |e^{-t}|^2 dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

handelt sich bei dem Signal um ein Energiesignal.

Lösung 1.2

- a) Für ein Orthonormalsystem muss gelten, dass die Innenprodukte zweier verschiedener Funktionen verschwinden, und dass die Norm gleich eins ist, d.h.

$$\langle B_i, B_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Das Innenprodukt für Energiesignale — man sieht sofort, dass die Energie der Funktionen $B_i(x)$ innerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ beschränkt ist — bestimmt sich zu

$$\begin{aligned}\langle B_i, B_j \rangle &= \int_{-1}^1 x^i \cdot x^j dx = \int_{-1}^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1} \cdot x^{i+j+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i+j \text{ ungerade} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{für } i+j \text{ gerade} \end{cases} .\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, dass $\{B_i(x)\}_i$ kein Orthonormalsystem bildet.

Z.B. ist $\langle B_0(x), B_2(x) \rangle = \frac{2}{3} \neq 0!$

- b) Die Funktion $B_i(x)$ werden mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren in ein Orthonormalsystem überführt. Hierbei ist $L_0(x)$ die orthogonale Hilfsfunktion und $P_0(x)$ die orthonormale Basisfunktion (Legendre-Polynom).

- a) Festlegen der 1. Hilfsfunktion

$$L_0(x) = B_0(x) = 1$$

b) Bestimmen der Norm:

$$\|L_0(x)\|^2 = \int_{-1}^1 L_0(x) \cdot L_0(x) \, dx = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2$$

c) Die normierte Basis wird dann zu:

$$P_0(x) = \frac{L_0(x)}{\|L_0(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Bestimmung der 2. Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= B_1(x) - \langle B_1(x), P_0(x) \rangle \cdot P_0(x) \\ &= x - \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \, dx = x - \frac{1}{2} \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_{-1}^1 = x \end{aligned}$$

e) Normierung:

$$\|L_1(x)\|^2 = \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

f) 2. Basisfunktion:

$$P_1(x) = \frac{L_1(x)}{\|L_1(x)\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

g) Bestimmung der 3. Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= B_2(x) - \langle B_2(x), P_0(x) \rangle \cdot P_0(x) - \langle B_2(x), P_1(x) \rangle \cdot P_1(x) \\ &= x^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \, dx - \frac{3}{2} x \underbrace{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}_{0, \text{ da ungerade}} = x^2 - \frac{1}{2} \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-1}^1 = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

h) Normierung:

$$\begin{aligned} \|L_2(x)\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \, dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} \right) \, dx \\ &= \left. \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9} \right|_{-1}^1 = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

i) 3. Basisfunktion:

$$P_2(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1)$$

Allgemein gilt: (ohne Beweis)

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lösung 1.3

Die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

soll durch zwei Basissysteme approximiert werden. Da sowohl die normierte Fourier-Reihe als auch die Legendrepolynome ein Orthonormalsystem bilden, kann die Funktion $f(x)$ durch

$$\hat{f}(x) = \sum_k a_k \Phi_k(x)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = \langle f, \Phi_k \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \Phi_k^*(x) \, dx$$

dargestellt werden.

a) Die Legendre-Polynome bis zur 2. Ordnung lauten

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x \quad , \quad P_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1).$$

Für die Koeffizienten folgt damit:

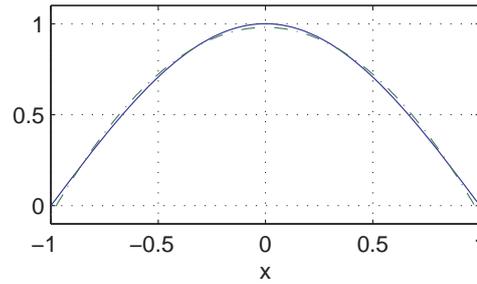


Abbildung L1: Originalfunktion (durchgezogene Linie) und approximierte Funktion (gestrichelte Linie)

$$b_0 = \langle f(x), P_0(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$b_1 = 0, \text{ da } f(x) \cdot P_1(x) \text{ eine ungerade Funktion ist.}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[3 \cdot \left(\frac{8x}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \left(\frac{2x^2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[3 \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \right) \cdot 2 - \frac{2}{\pi} \cdot 2 \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[\frac{12}{\pi} - \frac{96}{\pi^3} - \frac{4}{\pi} \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Damit folgt für die approximierte Funktion $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= b_0 P_0(x) + b_2 P_2(x) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{5}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) (3x^2 - 1) \\ &= \frac{15}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) x^2 - \frac{3}{\pi} + \frac{60}{\pi^3} \\ &\approx -1,03x^2 + 0,98 \end{aligned}$$

Bild L1 zeigt im Intervall $[-1, 1]$ die Originalfunktion und die approximierte Funktion.

b) Mit Hilfe der normierten Fourier-Funktionen

$$F_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kx/T}$$

der Periodendauer $T = 2 - (-2) = 4$ und der Zerlegung des Kosinus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi}{2}x} + e^{-j\frac{\pi}{2}x} \right)$$

können die Koeffizienten a_k leicht durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden:

$$a_{-1} = 1$$

$$a_1 = 1$$

Lösung 1.4

a) Die Berechnung der Faltung im Zeitbereich erfolgt mit Hilfe der Faltungsgleichung.

$$\begin{aligned} y(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot y(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(\tau) \cdot r_T(t - \tau) \, d\tau \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_T(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_T(\tau - t) \, d\tau \quad \left| \begin{array}{l} v = \tau - t \\ dv = d\tau \end{array} \right. \\ &= \int_{-T/2-t}^{T/2-t} r_T(v) \, dv \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } |t| \geq T \\ T + t & \text{für } -T < t \leq 0 \\ T - t & \text{für } 0 < t < T \end{array} \right\} = T \cdot d_{2T}(t) \end{aligned}$$

b) Die Berechnung der Faltung über den Frequenzbereich entspricht der inversen Fourier-Transformation des Produkts der beiden Fourier-Transformierten.

$$\begin{aligned} y(t) * y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}\{y(t)\} \cdot \mathcal{F}\{y(t)\} \} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ T^2 \cdot \text{si}^2(\pi f T) \} = T \cdot d_{2T}(t) \end{aligned}$$

Lösung 1.5

a) 2-A; 1-B; 3-D;

b) 3-A; 1-D; 2-C;

c) 1-A; 2-D; 3-C;

2. Übung

Lösung 2.1

a) Es gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} e^{-j2\pi \frac{k}{2\pi} t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-1-jk)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-1-jk} e^{(-1-jk)t} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-1-jk} \left(e^{(-1-jk)\pi} - e^{(1+jk)\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+jk} (-1)^k \left(e^{\pi} - e^{-\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+jk} (-1)^k \sinh(\pi) \end{aligned}$$

Lösung 2.2

$$\text{a) } \mathcal{F}\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \cdot e^{j2\pi(-f)t} dt = y(-f)$$

$$\text{b) } Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi \alpha f}$$

$$\text{c) } \mathcal{F}\{e^{-j2\pi \alpha t}\} = \delta(-f - \alpha) = \delta(f + \alpha)$$

Lösung 2.3

a) Die Darstellung der periodischen Funktion $y_p(t)$ durch eine Fourier-Reihe wird durch

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt$$

angegeben. Damit kann man die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} Y_p(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t(\frac{k}{T} - f)} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

der periodischen Funktion $y_p(t)$ bestimmen. Hierbei handelt es sich um ein Linienspektrum, d.h. es treten nur Dirac-Impulse auf. Die Amplituden der Dirac-Impulse sind proportional zu den Koeffizienten der Fourier-Reihe.

- b) Vergleicht man die Fourier-Transformierte der auf das Grundintervall begrenzten Funktion $y(t)$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt, \quad (\text{L1})$$

mit der Bestimmungsgleichung der Fourier-Koeffizienten,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt,$$

so erhält man sofort die Gleichung

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot Y\left(\frac{k}{T}\right),$$

die den Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten c_k und der Fourier-Transformierten $Y(f)$ bestimmt.

- c) Durch Erweiterung der Gleichung (L1),

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_p(t) \cdot r_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = Y_p(f) * T \cdot \text{si}(\pi fT), \end{aligned}$$

erhält man die Gleichung, welche die Berechnung von $Y(f)$ aus $Y_p(f)$ ermöglicht. Sie entspricht der Faltung der Dirac-Impulse von $Y_p(f)$ mit einer $\frac{\sin x}{x}$ -Funktion.

- d) Setzt man das Ergebnis von Teilaufgabe b) in das Ergebnis von Teilaufgabe a) ein, so erhält man die Gleichung

$$Y_p(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y\left(\frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

welche die Berechnung von $Y_p(f)$ aus $Y(f)$ ermöglicht.

Lösung 2.4

- a) Wegen

$$\frac{d}{dt} \cos(2\pi f_0 t) = (-2\pi f_0) \sin(2\pi f_0 t)$$

folgt durch Fourier-Transformation und Anwendung der Differentiationseigenschaft

$$(j2\pi f) \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = (-2\pi f_0) \mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\}$$

und somit

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{-j}{2} \frac{f}{f_0} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{-j}{2} \left(\frac{f}{f_0} \delta(f + f_0) + \frac{f}{f_0} \delta(f - f_0) \right).$$

Berücksichtigt man, dass der Dirac-Impuls $\delta(x - x_0)$ überall, bis auf die Stelle $x = x_0$, den Wert Null annimmt, so müssen hier die Stellen $f = -f_0$ und $f = f_0$ genauer untersucht und die Vorfaktoren der Dirac-Impulse bestimmt werden.

Es ergeben sich daraus die Faktoren $\frac{-f_0}{f_0} = -1$ bzw. $\frac{f_0}{f_0}$ und die Lösung zu

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{-j}{2} (-1 \cdot \delta(f + f_0) + 1 \cdot \delta(f - f_0))$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{j}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)).$$

b) Es gilt

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mit

$$\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{1}{4f_0}\right)\right)$$

folgt daraus durch Fourier-Transformation und mit der Verschiebungseigenschaft

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = e^{-j\frac{2\pi f}{4f_0}} \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = e^{-j\frac{\pi f}{2f_0}} \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)].$$

Mit den Betrachtungen von Aufgabenteil a) ergeben sich hier die Faktoren $e^{-j\frac{\pi}{2}\frac{-f_0}{f_0}} = j$ und $e^{-j\frac{\pi}{2}\frac{f_0}{f_0}} = -j$ und somit

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)].$$

Lösung 2.5

- a) 1-A; 2-B; 3-C; 4-D;
- b) 1-B; 2-D; 3-A; 4-C;
- c) 1-C; 2-D; 3-B; 4-A;

3. Übung

Lösung 3.1

- a) (1) Linearität: $\cos(mx(t-1)) \neq m \cos(x(t-1)) \quad \zeta$
 Zeitinvarianz: $y(t-t_0) = \cos(x(t-t_0-1)) \quad \checkmark$
 Kausalität: (t) hängt nur von vergangenen Werten von $x(t)$ ab \checkmark
- (2) Linearität: Ein- und Ausgangs-Funktionen werden nur mit Skalaren multipliziert, Differentiation ist ebenfalls linear \checkmark
 Zeitinvarianz: alle Funktionen hängen nur von Argument t ab \checkmark
 Kausalität: $y(t)$ hängt nur von aktuellen und vergangenen Werten von $x(t)$ und $y(t)$ ab \checkmark
- (3) Linearität: $S\{mx_1(t) + nx_2(t)\} = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} mx_1(\tau) + nx_2(\tau) d\tau$
 $= m \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x_1(\tau) d\tau + n \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x_2(\tau) d\tau = mS\{x_1(t)\} + nS\{x_2(t)\} \quad \checkmark$
 Zeitinvarianz: $\int_{t-t_0-\frac{T}{2}}^{t-t_0+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau-t_0) d\tau \quad \checkmark$
 Kausalität: im Integral werden zukünftige Werte von $x(t)$ verwendet ζ
- (4) Linearität: $mS\{x(t)\} = m(at^2 + x(t+3)) \neq at^2 + mx(t+3) = S\{mx(t)\} \quad \zeta$
 Zeitinvarianz: $y(t-t_0) = a(t-t_0)^2 + x(t-t_0+3) \neq at^2 + x(t-t_0+3) \quad \zeta$
 Kausalität: Es werden zukünftige Werte von $x(t)$ zur Bestimmung von $y(t)$ verwendet. ζ

Insgesamt ergibt sich folgende Zuordnung:

System	linear	zeitinvariant	kausal
(1)	nein	ja	ja
(2)	ja	ja	ja
(3)	ja	ja	nein
(4)	nein	nein	nein

- b) (1) BIBO stabil, da $|\cos x| \leq 1$
 (2) $G(s) = \frac{a}{1+bs} \rightarrow$ BIBO stabil für $b \geq 0$
 (3) BIBO stabil, da Integration über endliches Intervall
 (4) Für $t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \rightarrow$ nicht BIBO stabil

Lösung 3.2

Ein System ist stabil genau dann, wenn die Impulsantwort absolut integrierbar ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty.$$

Somit kann das erste System nicht stabil sein, da

$$\int_0^{\infty} |\cos(t)| dt = \infty$$

ist. Zur Untersuchung des zweiten Systems ist wegen $|e^x| = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, die Integrierbarkeit von $e^{\alpha t}$ in $[0, \infty)$ entscheidend. Aus diesem Grund ist das System genau dann stabil, wenn $\alpha < 0$ gilt. Instabilität liegt für $\alpha \geq 0$ vor.

Lösung 3.3

a)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{7}{15} e^{-3t} \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{3} e^{-st} - \frac{1}{5} e^{-(s-2)t} - \frac{7}{15} e^{-(s+3)t} dt \\ &= \left[-\frac{2}{3s} e^{-st} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s-2} \right) e^{-(s-2)t} + \frac{7}{15} \left(\frac{1}{s+3} \right) e^{-(s+3)t} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 + \underbrace{\frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-2)t}}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re}\{s\} > 2} + \underbrace{\frac{7}{15} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+3)t}}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re}\{s\} > -3} + \frac{2}{3s} - \frac{1}{5(s-2)} - \frac{7}{15(s+3)} \\ &= \frac{2}{3s} - \frac{1}{5s-2} - \frac{7}{15s+3} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(s-2)(s+3) - \frac{1}{5}s(s+3) - \frac{7}{15}s(s-2)}{s(s-2)(s+3)} \\ &= \frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s} \end{aligned}$$

b) Aus der Korrespondenztabelle ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{3s} - \frac{1}{5s-2} - \frac{7}{15s+3} \\ &= \frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s} \end{aligned}$$

Lösung 3.4

Da es sich per Aufgabenstellung um eine kausale Zeitfunktion handelt, finden die folgenden Berechnungen für $t \geq 0$ statt. Es gilt nach dem Residuensatz

$$x(t) = \sum \operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty}\},$$

wobei

$$\operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty}\} = \lim_{s \rightarrow s_{\infty}} (s - s_{\infty}) X(s) e^{st}$$

gilt. Aus

$$\frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s} = \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)}$$

lassen sich die Polstellen $s_{\infty 1} = 0$, $s_{\infty 2} = 2$ und $s_{\infty 3} = -3$ ablesen. Mit diesen Polstellen ergibt sich für die Zeitfunktion:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty} = 0\} + \operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty} = 2\} + \operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty} = -3\} \right) \sigma(t) \\ &= \left(\lim_{s \rightarrow 0} \left[(s-0) \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow 2} \left[(s-2) \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)} e^{st} \right] \right. \\ &\quad \left. + \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s+3) \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)} e^{st} \right] \right) \sigma(t) \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{7}{15} e^{-3t} \right) \sigma(t) \end{aligned}$$

Über die Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{-\frac{1}{5}}{s-2} + \frac{-\frac{7}{15}}{s+3}$$

und damit dasselbe Zeitsignal.

Lösung 3.5

Die Systemfunktion $G(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort. Mit der Korrespondenz

$$\frac{1}{n!} t^n e^{\alpha t} \longleftrightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

ergibt sich

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)^2} - \frac{8}{(s+2)^3} = \frac{8(s+2) - 8}{(s+2)^3} = \frac{8(s+1)}{(s+2)^3}.$$

Der Pol-Nullstellenplan ist in Bild L2 zu sehen.

Lösung 3.6

- a) 1-D-I
2-C-IV
3-B-II
4-A-III
- b) 1-C-I
2-B-III
3-A-II
4-D-IV

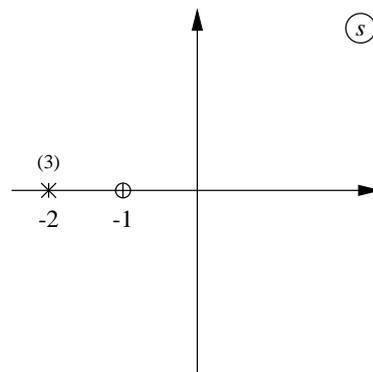


Abbildung L2: Pol-Nullstellenplan der Systemfunktion

4. Übung

Lösung 4.1

- a) Das Ausgangssignal $y(t)$ ist die integrierte Summe des Eingangssignals $x(t)$ und des mit a multiplizierten Ausgangssignals. Differenziert man, so folgt

$$\dot{y}(t) = x(t) + a \cdot y(t) \iff \dot{y}(t) - a \cdot y(t) = x(t)$$

als Differentialgleichung des Systems S_1 .

- b) Die Systemfunktion ergibt sich durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung.

$$sY(s) - aY(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s - a) = X(s) \Rightarrow G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s - a}$$

- c) Das System S_1 besitzt keine Nullstellen und eine Polstelle bei $s_{1,\infty} = a$.
- d) Ein zeitkontinuierliches System ist dann stabil, wenn alle Polstellen in der linken s -Halbebene liegen, d.h. wenn gilt:

$$\operatorname{Re}\{s_{1,\infty}\} = \operatorname{Re}\{a\} = a < 0$$

- e) Die Impulsantwort ist die Laplace-Rücktransformierte der Systemfunktion.

$$g_1(t) = e^{at} \cdot \sigma(t)$$

- f) Das System S_2 entsteht durch zweimaliges Hintereinanderschalten des Systems S_1 mit verschiedenen Koeffizienten und Anhängen eines Integrators. Beim Hintereinanderschalten von Teilsystemen werden die Systemfunktionen der Teilsysteme multipliziert. Hieraus folgt die Systemfunktion des Systems S_2 :

$$G_2(s) = \frac{1}{s - a} \cdot \frac{1}{s - b} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s - a)(s - b)s}$$

- g) Auch das System S_2 besitzt keine Nullstellen, dafür drei Polstellen bei

$$s_{2,\infty,1} = a \quad s_{2,\infty,2} = b \quad s_{2,\infty,3} = 0.$$

- h) Das System S_2 ist nicht stabil, da die dritte Polstelle $s_{2,\infty,3}$ nicht in der linken offenen s -Halbebene liegt.

Lösung 4.2

- a) a) Aus $\dot{y}_a(t) = y_e(t) - 4y_a(t) - 5\dot{y}_a(t)$ folgt nach dem Buch (S. 140)

$$\dot{z}_0(t) = y_e(t) - 4y_a(t)$$

$$\dot{z}_1(t) = y_e(t) - 4y_a(t) - 5\dot{y}_a(t) \implies \dot{z}_1(t) = z_0(t) - 5y_a(t).$$

Wegen

$$\dot{y}_a(t) = \dot{z}_1(t) \implies y_a(t) = z_1(t)$$

folgt somit:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{B}} y_e(t) \\ y_a(t) &= \underbrace{(0, 1)}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t) + \underbrace{(0)}_{\mathbf{D}} y_e(t) \end{aligned}$$

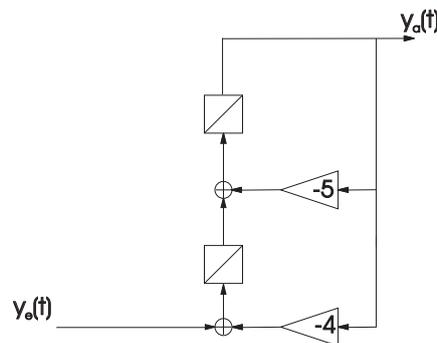
- b) a) Durch Einsetzen folgt $\dot{z}_2(t) + 5z_2(t) + 4z_1(t) = y_e(t)$ und somit aufgrund von $\dot{z}_1(t) = z_2(t)$ die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{B}} y_e(t) \\ y_a(t) &= \underbrace{(1, 0)}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t) + \underbrace{(0)}_{\mathbf{D}} y_e(t) \end{aligned}$$

- b) Durch zweimalige, informale Integration der Differentialgleichung folgt

$$y_a(t) = \int \int y_e(t) - 4 \int \int y_a(t) - 5 \int y_a(t)$$

und daraus das folgende Flussverhalten:



- c) Aus der Zustandsraumdarstellung folgt

$$\mathbf{Y}_a(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{Y}_e(s).$$

Durch Ausrechnen ergibt sich:

$$\begin{aligned} G(s) &= (0, 1) \begin{pmatrix} s & 4 \\ -1 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1) \frac{1}{s(s+5)+4} \begin{pmatrix} s+5 & -4 \\ 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, 1) \frac{1}{s(s+5)+4} \begin{pmatrix} s+5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+5)+4} \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Differentialgleichung erkennt man unter Beachtung der verschwindenden Anfangswerte die Richtigkeit der Rechnung.

d) Aus $G(s)$ folgt durch den Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+4}$$

und damit über Korrespondenztabelle

$$g(t) = \frac{1}{3} e^{-t} \sigma(t) - \frac{1}{3} e^{-4t} \sigma(t).$$

e) Durch Rechnung:

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_e(\tau) g(t-\tau) d\tau = \left(\int_0^t e^{-\tau} \frac{1}{3} (e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}) d\tau \right) \sigma(t) \\ &= \left(\frac{1}{3} \int_0^t (e^{-t} - e^{-4t+3\tau}) d\tau \right) \sigma(t) \\ &= \frac{1}{3} \left[e^{-t} \tau - \frac{1}{3} e^{-4t} e^{3\tau} \right]_0^t \sigma(t) \\ &= \left(\frac{1}{3} t e^{-t} - \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-4t} \right) \sigma(t) \end{aligned}$$

f) Wegen $h(t) = g(t) * \sigma(t)$ ist die Sprungantwort

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(\int_0^t \frac{1}{3} e^{-\tau} - \frac{1}{3} e^{-4\tau} d\tau \right) \sigma(t) = \left[\frac{1}{3} (-1) e^{-\tau} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4\tau} \right]_0^t \sigma(t) \\ &= \left(-\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{-4t} + \frac{1}{4} \right) \sigma(t). \end{aligned}$$

Lösung 4.3

a) Die Zerlegung lautet:

$$G(s) = \underbrace{\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s^2+2s+2)(s+5)}}_{G_M(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s-2)(s-3)}{(s+2)(s+3)}}_{G_A(s)}$$

Die Pole der Übertragungsfunktionen sind für den Allpass $s_{A,\infty,1} = -2, s_{A,\infty,2} = -3$ und für das Minimalphasensystem $s_{M,\infty,1} = -5, s_{M,\infty,2/3} = -1 \pm j$.

Die Pole des Allpassanteils entsprechen den **negierten** Nullstellen von $G(s)$, welche nicht in der linken Halbebene liegen. Somit haben alle Polstellen des Allpassen **bei solch einer Zerlegung** stets negativen Realteil und der Allpassanteil ist stabil.

Lösung 4.4

- a) An einem Kondensator gilt mit $Q_C = CU_C$ der Zusammenhang

$$I_C = \dot{Q}_C = C\dot{U}_C.$$

Für die Spannung an einer Spule gilt

$$U_S = L \cdot \dot{I}_S.$$

Angewandt auf die obige Schaltung erhält man die Gleichungen

$$z_2(t) = C\dot{z}_1(t) \Rightarrow \dot{z}_1(t) = \frac{1}{C}z_2(t), \quad u_a(t) = L \cdot \dot{z}_2(t) \Rightarrow \dot{z}_2(t) = \frac{1}{L}u_a(t). \quad (\text{L2})$$

Zusammen mit der Maschengleichung

$$u_e(t) = Rz_2(t) + z_1(t) + u_a(t)$$

ist damit das System vollständig beschrieben. Setzt man die beiden Gleichungen (L2) ineinander ein erhält man den Zusammenhang

$$u_a(t) = LC \cdot \ddot{z}_1(t) \Rightarrow \ddot{z}_1(t) = \frac{1}{LC}u_a(t).$$

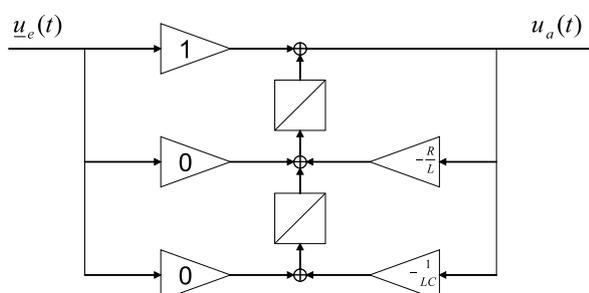
Bildet man die zweite Ableitung der Maschengleichung und setzt die übrigen Gleichungen ein, erhält man schließlich die Differentialgleichung

$$\ddot{u}_e = \frac{R}{L}\dot{u}_a(t) + \frac{1}{LC}u_a(t) + \ddot{u}_a(t), \quad (\text{L3})$$

die nur noch das Eingangs- und das Ausgangssignal beinhaltet.

- b) Die Laplace-Transformation von Gleichung (L3) ergibt

$$\begin{aligned} s^2U_e(s) &= \frac{R}{L}sU_a(s) + \frac{1}{LC}U_a(s) + s^2U_a(s) \\ &= \left(\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} + s^2 \right) U_a(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$



c) Die Pole liegen bei

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}.$$

Fallunterscheidung reelle/komplexe Pole:

a) Fall: $R^2C - 4L \geq 0 \Rightarrow$ Reelle Pole, Betrachtung des Pols "weiter rechts".

$$\begin{aligned} s_{\infty} &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \stackrel{!}{<} 0 \\ &\Rightarrow \frac{R^2C - 4L}{4L^2C} < \frac{R^2C}{4L^2C} \\ &\Rightarrow -4L < 0 \\ &\Rightarrow L > 0 \quad \text{immer erfüllt.} \end{aligned}$$

b) Fall: $R^2C - 4L < 0 \Rightarrow$ komplexe Pole, nur Betrachtung des Realteils.

$$\operatorname{Re}\{s_{\infty}\} = -\frac{R}{2L} < 0 \quad \text{immer erfüllt.}$$

Damit ist das System immer stabil.

Mit dem Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = 0$.

d) Für die Sprungantwort erhält man:

$$h(t) = S\{\sigma(t)\} = S\left\{\int_0^t \delta(\tau) d\tau\right\} = \int_0^t S\{\delta(\tau)\} d\tau = \int_0^t g(t) d\tau$$

○—●

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{A}{s - s_{\infty 1}} + \frac{B}{s - s_{\infty 2}}.$$

Mit den Polstellen von oben ergibt sich:

$$\Rightarrow A = \frac{s_{\infty 1}}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}}, \quad B = \frac{s_{\infty 2}}{s_{\infty 2} - s_{\infty 1}}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}} \left(\frac{s_{\infty 1}}{s - s_{\infty 1}} - \frac{s_{\infty 2}}{s - s_{\infty 2}} \right)$$

●—○

$$h(t) = \frac{1}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}} \left[s_{\infty 1} e^{s_{\infty 1} t} - s_{\infty 2} e^{s_{\infty 2} t} \right] \sigma(t)$$

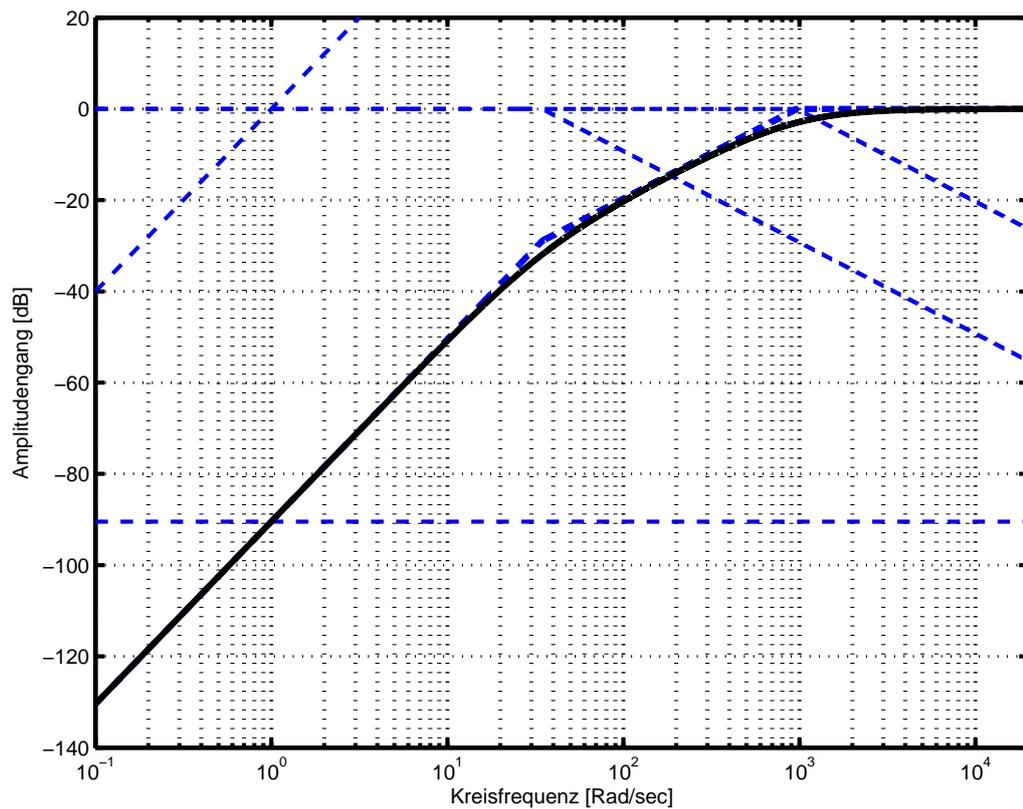
$$= \frac{1}{\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cosh \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} t - R \sinh \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} t \right).$$

e) Damit die Sprungantwort schwingt, müssen die Exponenten der Exponentialfunktion komplex sein. Dies ist für $R^2 C - 4L < 0$ der Fall. In diesem Fall wird aus den Funktionen $\sinh(t)$ und $\cosh(t)$ ein $\sin(t)$ bzw. $\cos(t)$.

f) Erstellen des Bodediagramms:

$$G(s) = \frac{s^2}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2})} = \frac{1}{s_{\infty 1} s_{\infty 2}} \frac{s^2}{\left(\frac{s}{s_{\infty 1}} - 1\right)\left(\frac{s}{s_{\infty 2}} - 1\right)}.$$

Die beiden Pole ergeben sich zu $s_{\infty 1} \approx -34,5$, $s_{\infty 2} \approx -965,5$. Der konstante Faktor liefert im Bode-Diagramm einen konstanten Offset $20 \log \left| \frac{1}{s_{\infty 1} s_{\infty 2}} \right| \approx -90,5$. Die doppelte Nullstelle bei $\omega = 0$ ergibt im Bode-Diagramm des Amplitudengangs eine Gerade mit 40 dB/Dekade Steigung, die bei $\omega = 10^0$ die Frequenzachse schneidet. Jeder der Pole ergibt eine Linie, die bis zur entsprechenden Knickfrequenz $|s_{\infty 1}| \approx -34,5$, $|s_{\infty 2}| \approx -965,5$ konstant null ist und dann mit -20 dB/Dekade abfällt. Die Superposition all dieser Linien ergibt den approximierten Frequenzgang.



Lösung 4.5

a) Das Pol-/Nullstellendiagramm ist in Abbildung L3 zu sehen.

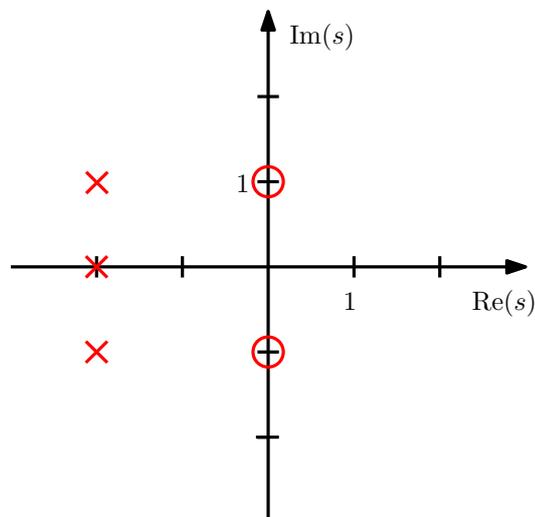


Abbildung L3: Pol-/Nullstellendiagramm.

- b)
- Nach Eigenschaft 2) muss es mindestens eine Polstelle mehr als Nullstellen geben. Zusammen mit 1) erlaubt dies drei, vier oder fünf Polstellen.
 - Nach Eigenschaft 3) müssen alle Polstellen links der imaginären Achse liegen.

- Eigenschaften 4) und 5) definieren die Lage eines Polstellenpaares bei $s = -2 \pm j$. (Polstellenpaar, da reelles System)
- Nach Eigenschaft 6) gilt für die Nullstellen $\operatorname{Re} \{s_0\} \leq 0$.
- Nach Eigenschaft 7) muss eine Nullstelle bei $s = j$ liegen. Da diese auch nur als konjugiert komplexes Paar auftreten, liegt zusätzlich eine Nullstelle bei $s = -j$.
- Es bleibt noch eine Polstelle übrig, welche nach 4) bei $s = -2$ liegt.

c) Insgesamt ergibt sich so die Übertragungsfunktion

$$G(s) = k \frac{(s+j)(s-j)}{(s+2)(s+2+j)(s+2-j)} = k \frac{(s^2+1)}{(s+2)(s^2+4s+5)} .$$

5. Übung

Lösung 5.1

- Aufgrund des Abtasttheorems muss hier die Abtastfrequenz zweimal größer als die höchste, im Signal vorkommende Frequenz, d.h. $f_A \geq 40$ kHz. Hier wird also $f_A = 44$ kHz gewählt.
- Rekonstruktionsfilter G_1 schneidet vom eigentlichen Signal $y(t)$ die Frequenzanteile zwischen 18 kHz und 20 kHz weg. Filter G_3 lässt hingegen auch Spektralanteile, die nicht zum eigentlichen Signal $y(t)$ gehören, ungefiltert durch. Lediglich Filter G_2 erfüllt die Anforderungen
- Das Spektrum sieht man in Bild L4.

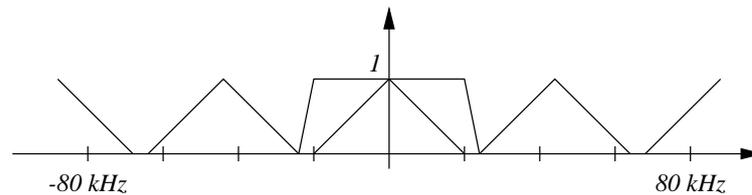


Abbildung L4: Spektrum

Lösung 5.2

Durch Aufzeichnen der Spektren wird klar, dass nur bei $f_A = 25$ kHz der Frequenzbereich in das Nyquistband gespiegelt wird.

Lösung 5.3

- Entgegen des Abtasttheorems können auch Signale, die Frequenzanteile ab der halben Abtastfrequenz besitzen, abgetastet werden. Dabei werden gerade diese Frequenzanteile in das Nyquistband gespiegelt.

Die Abtastfrequenz beträgt nach Voraussetzung $\frac{4}{9}$ der Mittenfrequenz des Bandpasssignals.

$$f_A = \frac{4}{9}f_0$$

Die Mittenfrequenz beträgt also $\frac{9}{4}$ der Abtastfrequenz.

$$f_0 = \frac{9}{4}f_A = 2 \cdot f_A + \frac{1}{4}f_A$$

Hieraus folgt, dass die Mittenfrequenz auf die Frequenz $\frac{f_A}{4}$ ins Nyquistband gespiegelt wird. Um eine Überschneidung zu verhindern, muss deshalb die Bandbreite kleiner als die halbe Abtastfrequenz sein.

$$B < \frac{f_A}{2} = \frac{2}{9}f_0$$

- b) Das Spektrum des zeitdiskreten Signals x_n wird mit Hilfe der Definitionsgleichung für die zeitdiskrete Fourier-Transformation berechnet.

$$\begin{aligned} X_*(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n t_A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot (-j)^n \cdot e^{-j2\pi f n t_A} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-j2\pi f n t_A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot e^{-j2\pi \left(f + \frac{1}{4t_A}\right) n t_A} \\ &= Y_*\left(f + \frac{f_A}{4}\right) \end{aligned}$$

Das Spektrum wird also um

$$\frac{f_A}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}f_0 = \frac{1}{9}f_0$$

nach links geschoben.

- c) Durch die zeitkontinuierliche Tiefpassfilterung werden alle Frequenzanteile außerhalb des Frequenzbandes $[-\frac{f_A}{4}, \frac{f_A}{4}]$ weggefiltert. Hierbei ist zu beachten, dass das entstehende zeitkontinuierliche Signal komplex ist.

Bild L5 zeigt die Ergebnisse der einzelnen Schritte.

Lösung 5.4

Aus der zeitkontinuierlichen Darstellung des abgetasteten Signals

$$y_*(t) = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n t_A)$$

folgt mit Hilfe der Fourier-Transformierten

$$Y_*(f) = Y(f) * f_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_A) = f_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(f - k f_A)$$

eine andere Darstellung

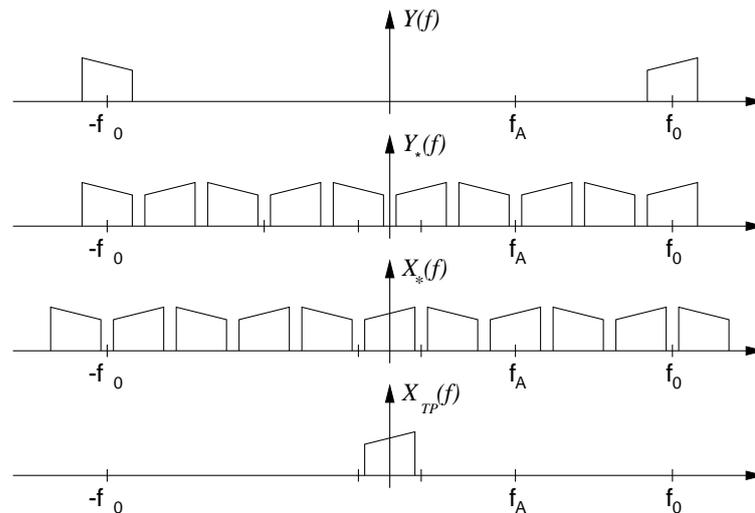


Abbildung L5: Spektrum des Signals im Orginalzustand, nach Unterabtastung, nach Modulation und nach Tiefpassfilterung

$$y_*(t) = f_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi k f_A \cdot t}$$

des abgetasteten Signals. Verringert sich die Abtastfrequenz auf

$$f_{A,2} = \frac{f_A}{N}$$

so wird das nun abgetastete Signal durch

$$y_{*,2}(t) = \frac{f_A}{N} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi \frac{k f_A}{N} t}$$

angegeben. Mit der Substitution $k = N \cdot l + m$, $m = 0 \dots N - 1$ folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} y_{*,2}(t) &= \frac{f_A}{N} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} y(t) \cdot e^{j2\pi \left(l f_A + \frac{m f_A}{N} \right) t} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m f_A}{N} t} \cdot f_A \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi l f_A \cdot t} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m f_A}{N} t} \cdot y_*(t) \end{aligned}$$

der Zusammenhang

$$Y_{*,2}(f) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} Y_*(f - m \cdot \frac{f_A}{N})$$

beider Spektren. Es entsteht also $Y_{*,2}(f)$ durch Überlagerung verschobener Versionen von $Y_*(f)$.

Lösung 5.5

Das Signal besteht aus einem Gleichanteil und zwei Schwingungen mit den Frequenzen $f_1 = 1$ Hz und $f_2 = 20$ Hz. Hieraus folgt aus dem Abtasttheorem die Bedingung für die Abtastfrequenz $f_A > 40$ Hz und die Bedingung für die Abtastzeit $t_A < 25$ ms.

Lösung 5.6

- a) Ein System mit der Impulsantwort $g_1(t)$ nennt man Hilbert-Transformator. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G_1(f) = \begin{cases} -j & , f > 0 \\ 0 & , f = 0 \\ j & , f < 0 \end{cases}$$

- b) – e) Die Spektren sind in Bild L6 dargestellt.

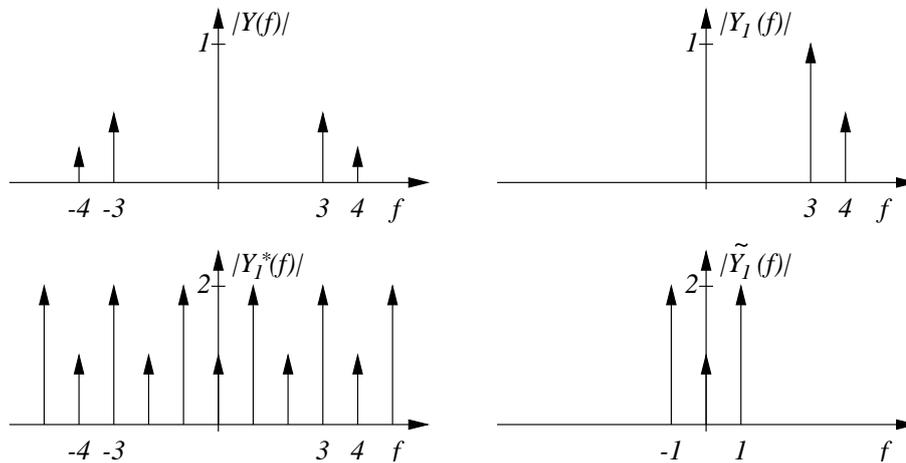


Abbildung L6: Spektren des Abtastsystems

6. Übung

Lösung 6.1

- a) Mit der Folge $y_n = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte zu

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^7 y_n \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{8}} = 2 + e^{-j\pi k \frac{4}{8}} + e^{-j\pi k \frac{12}{8}} \\ &= 2 + e^{-j\pi k \frac{4}{8}} + e^{+j\pi k \frac{4}{8}} = 2 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$Y_k = (4, 2, 0, 2, 4, 2, 0, 2).$$

- b) Mit der Folge $y_n = (2, 0, 3, 0)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte zu:

$$Y_k = 2 + 3 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{4}} = 2 + 3 \cdot e^{j\pi k} = 2 + 3 \cdot (-1)^k$$

Hieraus folgt

$$Y_k = (5, -1, 5, -1).$$

- c) Mit der Folge $y_n = (1, 2, 3, 4)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte zu:

$$\begin{aligned} Y_k &= 1 + 2 \cdot e^{-j2\pi k \frac{1}{4}} + 3 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{4}} + 4 \cdot e^{-j2\pi k \frac{3}{4}} \\ &= 1 + 2 \cdot e^{-j2\pi k \frac{1}{4}} + 3 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{4}} + (2 + 2) \cdot e^{j2\pi k \frac{1}{4}} \\ &= 1 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 3 \cdot (-1)^k + 2 \cdot j^k \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$Y_k = (10, -2 + 2j, -2, -2 - 2j).$$

d) Mit der Folge $y_n = e^{j2\pi\alpha\frac{n}{N}}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$ wird die diskrete Fourier-Transformierte berechnet.

$$\begin{aligned}
 Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(\alpha-k)\frac{n}{N}} \\
 &= \left\{ \text{mit der geometrischen Reihe: } \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}, q \neq 1 \right\} \\
 &= \frac{1 - e^{j2\pi(\alpha-k)}}{1 - e^{j2\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)}} = \frac{e^{j\pi(\alpha-k)}}{e^{j\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)}} \cdot \frac{e^{-j\pi(\alpha-k)} - e^{j\pi(\alpha-k)}}{e^{-j\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)} - e^{j\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)}} \\
 &= e^{j\pi(\alpha-k)(1-\frac{1}{N})} \cdot \frac{e^{j\pi(\alpha-k)} - e^{-j\pi(\alpha-k)}}{e^{j\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)} - e^{-j\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)}} \\
 &= e^{j\pi\frac{1}{N}(\alpha-k)(N-1)} \cdot \frac{\sin(\pi(\alpha-k))}{\sin(\frac{\pi}{N}(\alpha-k))}
 \end{aligned}$$

Der Zähler verschwindet für alle k , während der Nenner nur für

$$k = \alpha + mN, m \in \mathbb{Z}$$

verschwindet. Dies ist auch genau die Stelle für welche die Formel der geometrischen Reihe nicht anwendbar ist. In diesem Fall $k = \alpha + Nm$ lautet die DFT:

$$\begin{aligned}
 Y_{\alpha+mN} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(\alpha-(\alpha+mN))\frac{n}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi mn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die DFT:

$$Y_k = \begin{cases} N & \text{für } k = \alpha + m \cdot N, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Signal besitzt nur eine Spektrallinie bei $k = \alpha + m_0 \cdot N$, wobei m_0 so gewählt wird, dass $0 \leq k \leq N-1$ gilt (Periodizität).

e) Mit der Folge $y_n = \cos(2\pi\alpha\frac{n}{N})$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte:

$$\begin{aligned}
 Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(2\pi\alpha\frac{n}{N}\right) \cdot e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi\alpha\frac{n}{N}} + e^{-j2\pi\alpha\frac{n}{N}} \right) \cdot e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{n}{N}(\alpha-k)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{n}{N}(\alpha+k)}
 \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der 2π -Periodizität der trigonometrischen Funktionen addiert man ein ganzzahliges Vielfaches von 2π im Exponenten, d.h. mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Wie im Aufgabenteil zuvor sind dann $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ so zu wählen, dass $0 \leq k \leq N - 1$ gilt (Periodizität).

$$\begin{aligned}
 Y_k &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(\frac{n}{N}(\alpha-k)-m_1n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{n}{N}(\alpha+k)-(m_2+1)n)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{n}{N}(\alpha-k-m_1N)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{n}{N}(\alpha+k-(m_2+1)N)} \\
 &= \frac{N}{2} \delta_{\alpha-k-m_1N} + \frac{N}{2} \delta_{k+\alpha-(m_2+1)N} \\
 &= \frac{N}{2} \delta_{k-\alpha+m_1N} + \frac{N}{2} \delta_{k-N+\alpha-m_2N} \\
 &= \begin{cases} \frac{N}{2} & k = \alpha - m_1N \\ \frac{N}{2} & k = N - \alpha + m_2N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,
 \end{aligned}$$

f) Mit $\alpha = 0$ ergibt sich aus der Zeitfolge aus Teilaufgabe d) die Zeitfolge

$$y_n = 1.$$

Hieraus folgt

$$Y_k = N \cdot \delta(k).$$

Lösung 6.2

Für die abgetasteten Signalwerte folgt $x_n = \sin(\pi n/3)$ und somit:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{n=0}^5 \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) e^{-j\pi\frac{kn}{3}} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^5 \left(e^{j\frac{\pi n}{3}} - e^{-j\frac{\pi n}{3}} \right) e^{-j\frac{\pi kn}{3}} \\
 &= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^5 \left[\exp\left(-j\frac{\pi(k-1)}{3}n\right) - \exp\left(-j\frac{\pi(k+1)}{3}n\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \underbrace{\sum_{n=0}^5 \exp\left(-j2\frac{\pi(k-1)}{6}n\right)}_{S1} - \frac{1}{2j} \underbrace{\sum_{n=0}^5 \exp\left(-j2\frac{\pi(k+1)}{6}n\right)}_{S2}
 \end{aligned}$$

Hier sind nun je nach Wert der Variable k im Bereich $0 \leq k \leq 5$ drei Fälle zu unterscheiden:

1. $k = 1$: Es folgt $S1 = 6, S2 = 0$ und somit $X_1 = -3j$.
2. $k = 5$: Es folgt $S1 = 0, S2 = 6$ und somit $X_5 = 3j$.
3. $k = 0, 2, 3, 4$: Es folgt $S1 = S2 = 0$ und somit $X_k = 0$.

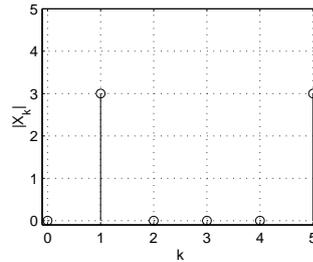


Abbildung L7: **Erklärung:** Wegen $6f_0t_A = 1$ entsteht im ersten Aufgabenteil kein Leckeffekt, da die Schwingfrequenz im Raster der Abtastfrequenz liegt. Bei einer 5-Punkte DFT folgt $f_0t_A 5 = 5/6 = 1 - 1/6$ und somit, vgl. Vorlesung, $a \neq 0$, was zu einem Leckeffekt führt. Die „Peaks“, die eigentlich auf der Schwingfrequenz liegen, verteilen sich auf die benachbarten Frequenzen.

Lösung 6.3

Aus der Frequenzauflösung

$$\Delta f = \frac{1}{t_A N} = \frac{f_A}{N}$$

erhält man

$$N = \frac{f_A}{\Delta f} = \frac{5,4 \text{ Hz}}{0,001 \text{ Hz}} = 5400 \text{ Punkte}$$

die Anzahl der abzutastenden Punkte. Zur Spektralanalyse mit Hilfe einer FFT muss die Anzahl der Punkte eine Zweierpotenz sein. Ist die Anzahl der Punkte keine Zweierpotenz und man möchte eine bestimmte Frequenzauflösung nicht unterschreiten, so nimmt man die nächst höhere Zweierpotenz:

$$N_{FFT} = 8192.$$

Hieraus ergibt sich

$$N_{FFT} \cdot t_A = \frac{N_{FFT}}{f_A} = \frac{8192}{5,4 \text{ Hz}} = 1517 \text{ s} = 25 \text{ min } 17 \text{ s}$$

die Beobachtungszeit.

Lösung 6.4

- a) 1-A; 2-B; 3-D; 4-C
- b) 1-A; 2-D; 3-C; 4-B

7. Übung

Lösung 7.1

- a) Das System S ist aufgrund des Terms y_{n+2}^2 nicht linear.
- b) Das System S ist wegen des zeitabhängigen Koeffizienten 2^n von y_{n+1} zeitvariant.
- c) Das System S ist kausal, da y_{n+2} nur von vergangenen Werten abhängt.

Lösung 7.2

Man rechnet

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \cosh(\alpha n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}{2} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^\alpha / z)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 1 / (e^\alpha z)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^\alpha / z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1 / (e^\alpha z)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - 1 / e^\alpha} = \frac{z(z - 1 / e^\alpha) + z(z - e^\alpha)}{2(z - e^\alpha)(z - 1 / e^\alpha)} = \frac{2z^2 - z(e^\alpha + 1 / e^\alpha)}{2(z - e^\alpha)(z - 1 / e^\alpha)} \\ &= \frac{2z^2 - 2z(\cosh(\alpha))}{2(z^2 - z(e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1)} = \frac{z(z - \cosh(\alpha))}{z^2 - 2z \cosh(\alpha) + 1} \end{aligned}$$

Dies gilt in dem Bereich $\{|z| > e^\alpha\} \cap \{|z| > 1 / e^\alpha\}$. Somit in $\{|z| > \max\{e^\alpha, e^{-\alpha}\}\} = \{|z| > e^{|\alpha|}\}$. Skizze des Konvergenzgebietes ist klar.

Lösung 7.3

Durch Partialbruchzerlegung erhält man $X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-1}$.

Konvergenzgebiet $|z| > 2$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &\bullet \circ (2^n + 1) \sigma_n \end{aligned}$$

Konvergenzgebiet $1 < |z| < 2$:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + z \frac{1}{z - 2} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{z}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{z}{2} \sum_{k=-\infty}^0 2^k z^{-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{k'=-\infty}^{-1} 2^{k'+1} z^{-k'} \\
 &\circ \bullet \sigma_n - 2^n \sigma_{-n-1}
 \end{aligned}$$

Konvergenzgebiet $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= -z \frac{1}{1 - z} - \frac{z}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \\
 &= -z \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
 &= -z \sum_{k=-\infty}^0 z^{-k} - \frac{z}{2} \sum_{k=-\infty}^0 2^k z^{-k} \\
 &= - \sum_{k'=-\infty}^{-1} z^{-k'} - \sum_{k'=-\infty}^{-1} 2^{k'} z^{-k'} \\
 &\bullet \circ (-1 - 2^n) \sigma_{-n-1}
 \end{aligned}$$

Lösung 7.4

Die Pole von $X(z)$ sind gegeben durch $z_{\infty,1/2} = 1 \pm 2j$. Für die Folgenglieder gilt die Berechnungsformel

$$x_n = \sum_i \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, z_{\infty,i}\}, \quad n \geq 0.$$

Ist $n \geq 1$ so hat $X(z)z^{n-1}$ die gleichen Pole wie $X(z)$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
 x_n &= \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, 1 + 2j\} + \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, 1 - 2j\} \\
 &= \frac{(z^2 - z)z^{n-1}}{(z - (1 - 2j))} \Big|_{z=1+2j} + \frac{(z^2 - z)z^{n-1}}{(z - (1 + 2j))} \Big|_{z=1-2j} \\
 &= \frac{(-4 + 2j)(1 + 2j)^{n-1} + (4 + 2j)(1 - 2j)^{n-1}}{4j} \\
 &= \frac{1}{2} ((1 + 2j)^n + (1 - 2j)^n)
 \end{aligned}$$

Für den Fall $n = 0$ ist 0 ebenfalls ein Pol und man erhält

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(z^2 - z)}{z(z - (1 - 2j))} \Big|_{z=1+2j} + \frac{(z^2 - z)}{z(z - (1 + 2j))} \Big|_{z=1-2j} + \frac{(z^2 - z)}{(z^2 - 2z + 5)} \Big|_{z=0} \\ &= \dots = 1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgen die Werte

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left((1 + 2j)^2 + (1 - 2j)^2 \right) = -3.$$

Andererseits folgt aus der Gleichung

$$\frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 5} \stackrel{!}{=} x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \dots$$

durch Auflösen

$$1 - z^{-1} = (x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \dots) (1 - 2z^{-1} + 5z^{-2})$$

und es ergeben sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 \\ -1 &= -2x_0 + x_1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ 0 &= 5x_0 - 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 0 - 5 + 2 = -3. \end{aligned}$$

Lösung 7.5

- a) Bei einem stabilen, zeitdiskreten System müssen die Pole der Übertragungsfunktion innerhalb des Einheitskreises liegen.

$$z_\infty = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} - c}$$

Durch Fallunterscheidung für die Wurzel erhält man:

i. $c \leq \frac{1}{64} \Rightarrow z_\infty \in \mathbb{R}$

$$|z_\infty| < 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1}{64} - c} \right| < 1 \Leftrightarrow c > -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} < c \leq \frac{1}{64}$$

ii. $c > \frac{1}{64} \Rightarrow z_\infty \in \mathbb{C}$

$$|z_\infty| = \left| -\frac{1}{8} \pm j \sqrt{c - \frac{1}{64}} \right|$$

$$|z_\infty| < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{64} + c - \frac{1}{64}} < 1 \Leftrightarrow c < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} < c < 1$$

Fasst man beide Ergebnisse zusammen, so erhält man:

$$-\frac{3}{4} < c < 1$$

b) Für die Stabilität hier gilt der gleiche Zusammenhang, wie bei a).

$$-\frac{3}{4} < c < 1$$

Bei einem minimalphasigen System müssen die Nullstellen der Übertragungsfunktion innerhalb oder auf dem Einheitskreis liegen. Hier wird die entsprechende Rechnung wie bei a) durchgeführt.

$$-\frac{3}{4} \leq b \leq 1$$

c) Mit $c = -\frac{3}{64}$ folgen die beiden Polstellen $z_\infty = -\frac{3}{8}$ und $z_\infty = \frac{1}{8}$. Durch Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$G_1(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{8})(z + \frac{3}{8})} = \frac{A}{z - \frac{1}{8}} + \frac{B}{z + \frac{3}{8}}$$

mit

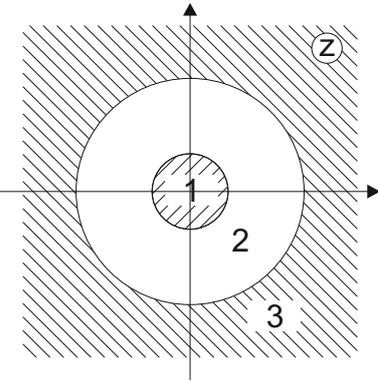
$$A = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{3}{8}} = 2 \quad B = \frac{1}{-\frac{3}{8} - \frac{1}{8}} = -2$$

ergibt sich mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(z) = \frac{2}{z - \frac{1}{8}} - \frac{2}{z + \frac{3}{8}}$$

die Impulsantwort über Transformationstabellen

$$g_{1,n} = 2 \left(\left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} - \left(-\frac{3}{8} \right)^{n-1} \right) \sigma_{n-1}$$



8. Übung

Lösung 8.1

- a) Führt man oberhalb des oberen Verzögerungsgliedes die Zustandsgröße z_n ein, so erhält man die beiden Differenzgleichungen

$$z_n = x_n + z_{n-1} - z_{n-2} \quad y_n = 5z_n - z_{n-1}$$

bzw. deren z -Transformierte

$$Z(z)(1 - z^{-1} + z^{-2}) = X(z) \quad Y(z) = Z(z)(5 - z^{-1}).$$

Setzt man $Z(z)$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so erhält man die Beziehung zwischen $Y(z)$ und $X(z)$.

$$Y(z) = \frac{5 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} X(z) \tag{L4}$$

Durch Rücktransformation erhält man die Differenzgleichung

$$y_n - y_{n-1} + y_{n-2} = 5x_n - x_{n-1}.$$

- b) Aus (L4) erhält man sofort die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{5z^2 - z}{z^2 - z + 1}$$

des Systems S .

- c) Die Pol- und Nullstellen berechnet man aus dem Zähler- bzw. Nennerpolynom.

$$z_{0,1} = 0 \quad z_{0,2} = \frac{1}{5} \quad z_{\infty} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- d) Hieraus ergibt sich das Pol-Nullstellen-Diagramm in Bild L9.
e) Das System ist nicht stabil, da die Pole nicht innerhalb des Einheitskreises liegen.

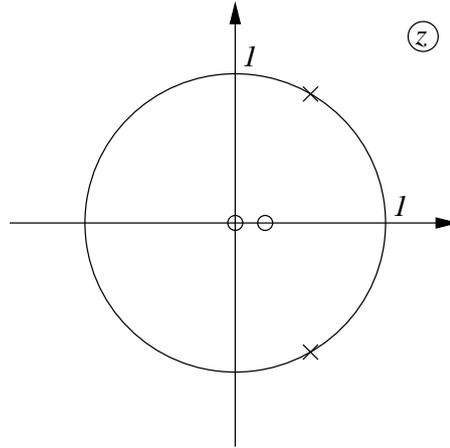


Abbildung L9: Pol-Nullstellen-Diagramm

- f) Das System ist nicht minimalphasig, da die Nullstellen zwar innerhalb des Einheitskreises liegen, das System allerdings nicht stabil ist. Laut Definition kann nur ein stabiles System Minimalphasensystem sein.
- g) Das Eingangssignal

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma_n \quad \circ \bullet \quad X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

erzeugt das Ausgangssignal:

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{5z^2 - z}{z^2 - z + 1} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} = z \left[\frac{A}{z + \frac{1}{2}} + \frac{Bz + C}{z^2 - z + 1} \right]$$

Dabei erhält man A durch

$$A = \frac{5z^2 - z}{z^2 - z + 1} \Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = 1.$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich:

$$z^2 - z + 1 + \left(z + \frac{1}{2}\right)(Bz + C) \stackrel{!}{=} 5z^2 - z = (1 + B)z^2 + \left(-1 + \frac{B}{2} + C\right)z + \left(1 + \frac{C}{2}\right)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $B = 4$ und $C = -2$. Aus der z -Transformierten

$$Y(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{4z(z - \frac{1}{2})}{z^2 - z + 1}$$

des Ausgangssignals y_n erhält man sofort das Ausgangssignal

$$y_n = \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n + 4 \cos \left(\frac{\pi}{3} n \right) \right] \cdot \sigma_n.$$

Lösung 8.2

a) Rechteckregel vorwärts:

$$G(s) = \frac{s+1}{0,1 \cdot s+1} = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10}$$

$$G_s(z) = G(s)|_{s=\frac{z-1}{t_A}} = 10 \cdot \frac{\frac{z-1}{t_A} + 1}{\frac{z-1}{t_A} + 10} = 10 \cdot \frac{z-1+t_A}{z-1+10t_A}$$

Die Nullstelle liegt bei

$$z_0 = 1 - t_A = 0,75$$

Die Polstelle liegt bei

$$z_\infty = 1 - 10t_A = -1,5$$

Das System ist also instabil, da $|z_\infty| \geq 1$.

b) Rechteckregel rückwärts:

$$G(s) = \frac{s+1}{0,1 \cdot s+1} = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10}$$

$$G_s(z) = G(s)|_{s=\frac{z-1}{zt_A}} = 10 \cdot \frac{\frac{z-1}{zt_A} + 1}{\frac{z-1}{zt_A} + 10}$$

$$= 10 \cdot \frac{z-1+zt_A}{z-1+10zt_A} = 10 \cdot \frac{(1+t_A)z-1}{(1+10t_A)z-1}$$

Die Nullstelle liegt bei

$$z_0 = \frac{1}{1+t_A} = \frac{4}{5}$$

Die Polstelle liegt bei

$$z_\infty = \frac{1}{1+10t_A} = \frac{2}{7}$$

Das System ist also stabil, da $|z_\infty| < 1$.

c) Trapezregel:

$$G(s) = \frac{s+1}{0,1 \cdot s+1} = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10}$$

$$G_s(z) = G(s)|_{s=\frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}} = 10 \cdot \frac{\frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1}{\frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 10}$$

$$= 10 \cdot \frac{2z-2+t_A z+t_A}{2z-2+10t_A z+10t_A} = 10 \cdot \frac{(2+t_A)z-(2-t_A)}{(2+10t_A)z-(2-10t_A)}$$

Die Nullstelle liegt bei

$$z_0 = \frac{2 - t_A}{2 + t_A} = \frac{1,75}{2,25} = \frac{7}{9}.$$

Die Polstelle liegt bei

$$z_\infty = \frac{2 - 10t_A}{2 + 10t_A} = \frac{-0,5}{4,5} = -\frac{1}{9}.$$

Das System ist also stabil, da $|z_\infty| < 1$.

d) Pol- Nullstellenübertragung:

$$G(s) = \frac{s + 1}{0,1 \cdot s + 1} = 10 \cdot \frac{s + 1}{s + 10}$$

Die Nullstelle $s_0 = -1$ wird auf

$$z_0 = e^{-1 \cdot t_A} = e^{-t_A} \approx 0,779$$

übertragen. Die Polstelle $s_\infty = -10$ wird auf

$$z_\infty = e^{-10 \cdot t_A} \approx 0,082$$

übertragen. Hieraus ergibt sich die zeitdiskrete Übertragungsfunktion

$$G_s(z) = K \cdot \frac{z - 0,779}{z - 0,082}.$$

Den unbekanntem Verstärkungsfaktor K erhält man aus der Randbedingung der stationären Genauigkeit:

$$\begin{aligned} G(s=0) &= 10 \cdot \frac{0 + 1}{0 + 10} = 1 \\ G_s(z=1) &= K \cdot \frac{1 - 0,779}{1 - 0,082} = 1 \\ K &= \frac{1 - 0,082}{1 - 0,779} = 4,15 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die diskrete Übertragungsfunktion zu

$$G_s(z) = 4,15 \cdot \frac{z - 0,779}{z - 0,082}.$$

Lösung 8.3

a)

$$\begin{aligned}
 y_{a,n} &= z_{2,n} + y_{e,n} \\
 z_{1,n+1} &= y_{e,n} - \frac{1}{2}(z_{2,n} + y_{e,n}) \\
 &= -\frac{1}{2}z_{2,n} + \frac{1}{2}y_{e,n} \\
 z_{2,n+1} &= z_{1,n} - \frac{5}{2}y_{e,n} - z_{2,n} - y_{e,n} \\
 &= z_{1,n} - z_{2,n} - \frac{7}{2}y_{e,n} \\
 \mathbf{z}_{n+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} y_{e,n}
 \end{aligned} \tag{L5}$$

$$y_{a,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} y_{e,n} \tag{L6}$$

b) Gesucht: Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{y_a(z)}{y_e(z)}$$

Aus Zustandsraumdarstellung (L5):

$$\begin{aligned}
 z\mathbf{Z}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{Z}(z) + \mathbf{B}y_e(z) \\
 \Leftrightarrow [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{Z}(z) &= \mathbf{B}y_e(z) \\
 \Leftrightarrow \mathbf{Z}(z) &= [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}y_e
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (L5) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 y_a(z) &= \mathbf{C}\mathbf{Z}(z) + \mathbf{D}y_e(z) \\
 \Leftrightarrow y_a(z) &= \underbrace{[\mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]}_{G(z)} y_e(z)
 \end{aligned}$$

Die Werte für diese Aufgabe einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= [0 \ 1] \left[z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} z & \frac{1}{2} \\ -1 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{z(z+1) + 1/2} [0 \ 1] \begin{bmatrix} z+1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{z(z+1) + 1/2} [1 \ z] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}z + z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 + z + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}{z^2 + z + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

c) Differenzengleichung ist gesucht.

$$\frac{y_a(z)}{y_e(z)} = \frac{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}{z^2 + z + \frac{1}{2}}$$

$$y_a(z) \left(z^2 + z + \frac{1}{2} \right) = y_e(z) \left(z^2 - \frac{5}{2}z + 1 \right)$$

•—○

$$y_{a,n+2} + y_{a,n+1} + \frac{1}{2}y_{a,n} = y_{e,n+2} - \frac{5}{2}y_{e,n+1} + y_{e,n}$$

$$y_{a,k} + y_{a,k-1} + \frac{1}{2}y_{a,k-2} = y_{e,k} - \frac{5}{2}y_{e,k-1} + y_{e,k-2}$$

$$y_{a,k} = -y_{a,k-1} - \frac{1}{2}y_{a,k-2} + y_{e,k} - \frac{5}{2}y_{e,k-1} + y_{e,k-2}$$

d) stabil?

$$z_{\infty 1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{1}{2}$$

$$|z_{\infty 1,2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \text{stabil}$$

Lösung 8.4

- a) 1-C-II
2-A-III
3-B-IV
4-D-I
- b) 1-C-III
2-D-II
3-A-IV
4-B-I