

Signale und Systeme

Aufgaben und Lösungen

Prof. Dr.-Ing. Michael Heizmann, Prof. Dr.-Ing. Uwe Kiencke,
Prof. Dr.-Ing. Fernando Puente León, Dr.-Ing. Holger Jäkel, Dr.-Ing. Philipp Nenninger,
Dr.-Ing. Ralf Schernewski, Dr.-Ing. Sebastian Vater, Dr.-Ing. Thomas Weickert,
M. Sc. Benjamin Jäschke, M. Sc. Fabian Leven, Dipl.-Ing. Matthias Michelsburg,
Dipl.-Ing. Andreas Sandmair, M. Sc. David Uhlig

Aktuelle Betreuung: M. Sc. Fabian Leven, M. Sc. David Uhlig

Version vom 20. November 2020

Wintersemester 20/21

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Industrielle Informationstechnik (IIT)
Hertzstraße 16
76187 Karlsruhe
<http://www.iit.kit.edu/sus.php>

Inhaltsverzeichnis

Übung 1	1
Aufgabe 1: Energiesignal	1
Aufgabe 2: Legendre-Polynome	1
Aufgabe 3: Approximation durch ein Orthonormalsystem	4
Übung 2	9
Aufgabe 4: Fourier-Reihe	9
Aufgabe 5: Fourier-Transformation	10
Aufgabe 6: Zusammenhang zwischen der Fourier-Reihe und der Fourier-Transformation	11
Aufgabe 7: Eigenschaften der Fourier-Transformation	13
Aufgabe 8: Fourier-Transformation – Zuordnungen	15
Aufgabe 9: Faltung im Zeit- und Frequenzbereich	16
Aufgabe 10: Faltung – Zuordnungen	17
Übung 3	19
Aufgabe 11: Systemeigenschaften	19
Aufgabe 12: Impulsantwort und Stabilität	21
Aufgabe 13: Laplace-Transformation	21
Aufgabe 14: Laplace-Rücktransformation mittels Residuensatz und Partialbruchzerlegung	22
Aufgabe 15: Zeitkontinuierliches System - Differentialgleichung	23
Übung 4	27
Aufgabe 16: Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems	27
Aufgabe 17: Minimalphasen- und Allpassanteil	28
Aufgabe 18: Zeitkontinuierliches System - Signalflussplan	28
Aufgabe 19: RLC-Schaltung	30
Aufgabe 20: Pol-/Nullstellendiagramm	33
Aufgabe 21: Zeitkontinuierliche Systeme – Zuordnungen	34
Übung 5	37
Aufgabe 22: Abtasttheorem	37
Aufgabe 23: Rekonstruktionsfilter 1	37
Aufgabe 24: Unterabtastung und Nyquistband	38
Aufgabe 25: Signal nach Unterabtastung	39
Aufgabe 26: Änderung des Spektrums nach Unterabtastung	40
Aufgabe 27: Rekonstruktionsfilter 2	41
Aufgabe 28: DFT von Zeitfolgen	42
Aufgabe 29: Leckeffekt bei der DFT	45
Aufgabe 30: Auflösung im Frequenzbereich	46
Übung 6	47
Aufgabe 31: DFT – Zuordnungen	47

Aufgabe 32: Differenzengleichung	48
Aufgabe 33: z-Transformation cosh	48
Aufgabe 34: Inverse z-Transformation	49
Aufgabe 35: Inverse z-Transformation mittels dem Residuensatz	51
Übung 7	53
Aufgabe 36: Stabilität und Minimalphasigkeit	53
Aufgabe 37: Zeitdiskretes System- Blockschaltdiagramm	54
Aufgabe 38: Zeitdiskrete Darstellung aus Übertragungsfunktion	57
Aufgabe 39: Zeitdiskretes LTI-System	59
Aufgabe 40: Zeitdiskrete Systeme – Zuordnungen	61

1. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 03.11.2020 bis 10.11.2020

Aufgabe 1: Energiesignal

Prüfen Sie, ob es sich bei dem Signal

$$x(t) = e^{-t} \cdot \sin(2\pi ft) \cdot \sigma(t)$$

um ein Energiesignal handelt.

Lösung

Wegen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t} \sin(2\pi ft) \sigma(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |e^{-t} \sin(2\pi ft)|^2 dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |e^{-t}|^2 dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

handelt sich bei dem Signal um ein Energiesignal.

Aufgabe 2: Legendre-Polynome

Gegeben sind die Funktionen $B_k(x) = x^k$ mit $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $x \in [-1, 1]$.

- Zeigen Sie allgemein, dass die Funktionen $\{B_k(x)\}_k$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ kein Orthonormalsystem bilden.
- Durch das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ erhält man die orthonormalisierten Polynome $P_k(x)$, welche auch Legendre-Polynome genannt werden. Bestimmen Sie $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$.

Lösung

- Für ein Orthonormalsystem muss gelten, dass die Innenprodukte zweier verschiedener Funktionen verschwinden, und dass die Norm gleich eins ist, d.h.

$$\langle B_i, B_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Das Innenprodukt für Energiesignale — man sieht sofort, dass die Energie der Funktionen $B_i(x)$ innerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ beschränkt ist — bestimmt sich zu

$$\begin{aligned}\langle B_i, B_j \rangle &= \int_{-1}^1 x^i \cdot x^j \, dx = \int_{-1}^1 x^{i+j} \, dx = \frac{1}{i+j+1} \cdot x^{i+j+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i+j \text{ ungerade} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{für } i+j \text{ gerade} \end{cases}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, dass $\{B_i(x)\}_i$ kein Orthonormalsystem bildet. Z. B. ist

$$\langle B_0(x), B_2(x) \rangle = \frac{2}{3} \neq 0!$$

- b) Die Funktion $B_i(x)$ werden mit dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren in ein Orthonormalsystem überführt. Hierbei ist $L_0(x)$ die orthogonale Hilfsfunktion und $P_0(x)$ die orthonormale Basisfunktion (Legendre-Polynom).

- Festlegen der 1. Hilfsfunktion

$$L_0(x) = B_0(x) = 1$$

- Bestimmen der Norm:

$$\|L_0(x)\|^2 = \int_{-1}^1 L_0(x) \cdot L_0(x) \, dx = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2$$

- Die normierte Basis wird dann zu:

$$P_0(x) = \frac{L_0(x)}{\|L_0(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Bestimmung der 2. Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}L_1(x) &= B_1(x) - \langle B_1(x), P_0(x) \rangle \cdot P_0(x) \\ &= x - \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \, dx = x - \frac{1}{2} \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_{-1}^1 = x\end{aligned}$$

- Normierung:

$$\|L_1(x)\|^2 = \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

- 2. Basisfunktion:

$$P_1(x) = \frac{L_1(x)}{\|L_1(x)\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

- Bestimmung der 3. Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= B_2(x) - \langle B_2(x), P_0(x) \rangle \cdot P_0(x) - \langle B_2(x), P_1(x) \rangle \cdot P_1(x) \\ &= x^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \, dx - \frac{3}{2} x \underbrace{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}_{0, \text{ da ungerade}} \\ &= x^2 - \frac{1}{2} \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-1}^1 = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Normierung:

$$\begin{aligned} \|L_2(x)\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx \\ &= \left. \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9} \right|_{-1}^1 = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

- 3. Basisfunktion:

$$P_2(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1)$$

Allgemein gilt (ohne Beweis):

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Aufgabe 3: Approximation durch ein Orthonormalsystem

- a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ durch eine Linearkombination der Legendre-Polynome bis zur zweiten Ordnung:

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^2 b_i P_i(x).$$

- b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ durch eine Linearkombination der normierten Fourier-Reihe.

Lösung

Die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

soll durch zwei Basissysteme approximiert werden. Da sowohl die normierte Fourier-Reihe als auch die Legendrepolynome ein Orthonormalsystem bilden, kann die Funktion $f(x)$ durch

$$\hat{f}(x) = \sum_k a_k \Phi_k(x)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = \langle f, \Phi_k \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \Phi_k^*(x) \, dx$$

dargestellt werden.

a) Die Legendre-Polynome bis zur 2. Ordnung lauten

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x \quad , \quad P_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1) \, .$$

Für die Koeffizienten folgt damit:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \langle f(x), P_0(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \\
 b_1 &= 0, \text{ da } P_1(x) \text{ eine ungerade Funktion ist.} \\
 b_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[3 \cdot \left(\frac{8x}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \left(\frac{2x^2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[3 \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \right) \cdot 2 - \frac{2}{\pi} \cdot 2 \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[\frac{12}{\pi} - \frac{96}{\pi^3} - \frac{4}{\pi} \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right).
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die approximierte Funktion $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(x) &= b_0 P_0(x) + b_2 P_2(x) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) \\
 &= \frac{2}{\pi} + \frac{5}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) (3x^2 - 1) \\
 &= \frac{15}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) x^2 - \frac{3}{\pi} + \frac{60}{\pi^3} \\
 &\approx -1,03x^2 + 0,98
 \end{aligned}$$

Abbildung L1 zeigt die Originalfunktion und die approximierte Funktion im Intervall $[-1, 1]$.

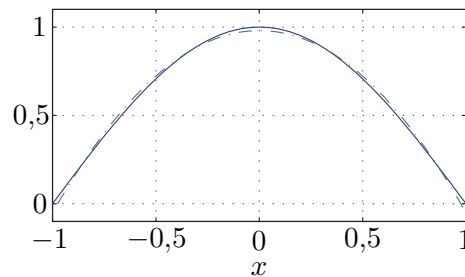


Abbildung L1: Originalfunktion (durchgezogene Linie) und approximierte Funktion (gestrichelte Linie)

b) Mit Hilfe der normierten Fourier-Funktionen

$$F_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j 2\pi k x / T}$$

der Periodendauer $T = 2 - (-2) = 4$ und der Zerlegung des Kosinus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2} \left(e^{j \frac{\pi}{2}x} + e^{-j \frac{\pi}{2}x} \right)$$

können die Koeffizienten a_k leicht durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden:

$$a_{-1} = 1, \quad a_1 = 1$$

2. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 10.11.2020 bis 24.11.2020

Weitere Hinweise:

Die Klausur zu Signale und Systeme gliedert sich üblicherweise in vier Aufgaben. Nach Abschluss dieser Übung sollten Sie in der Lage sein, Aufgabe 1 („Zeitkontinuierliche Signale“) zu bearbeiten. Eine Sammlung an Altklausuren finden Sie im ILIAS-Kurs.

Aufgabe 4: Fourier-Reihe

Gegeben ist die reelle Funktion

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } -\pi < t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $x(t)$ wird periodisch fortgesetzt und bildet die Funktion $y(t)$ mit der Periodendauer $T = 2\pi$ aus Abbildung 1. Es gilt $y(t) = e^{-t}$ für $-\pi < t \leq \pi$ und $y(t + n2\pi) = y(t)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

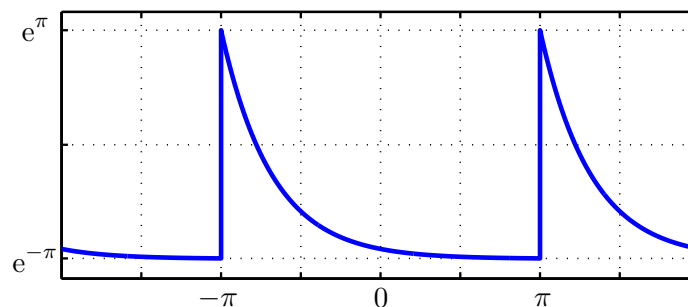


Abbildung 1: Die periodische Funktion $y(t)$.

- a) Bestimmen Sie die **komplexen** Fourier-Koeffizienten c_k der periodischen Funktion $y(t)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

Lösung

- a) Es gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} e^{-j2\pi \frac{k}{2\pi} t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-1-jk)t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-1-jk} e^{(-1-jk)t} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-1-jk} \left(e^{(-1-jk)\pi} - e^{(1+jk)\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+jk} (-1)^k \left(e^{\pi} - e^{-\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+jk} (-1)^k \sinh(\pi) .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Fourier-Transformation

Die Funktion $Y(\cdot)$ ist die Fourier-Transformierte der Funktion $y(\cdot)$.

- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion Y (diesmal als Funktion der Zeit t) und stellen Sie diese als Funktion von y (diesmal als Funktion der Frequenz f) dar.
- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von $y(t) = \delta(t - \alpha)$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben **a)** und **b)** die Fourier-Transformierte von $y(t) = e^{-j2\pi\alpha t}$.

Lösung

a)

$$\mathcal{F}\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \cdot e^{j2\pi(-f)t} dt = y(-f)$$

Die zweimalige Anwendung der Fourier-Transformation liefert folglich das gespiegelte ursprüngliche Signal.

b)

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi\alpha f}$$

Dies folgt direkt aus der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses.

- c)** Mit den Eigenschaften aus **a)** und **b)** folgt:

$$\mathcal{F}\{e^{-j2\pi\alpha t}\} = \delta(-f - \alpha) = \delta(f + \alpha)$$

Aufgabe 6: Zusammenhang zwischen der Fourier-Reihe und der Fourier-Transformation

Eine periodische Funktion $y_p(t)$ wird mittels

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t - kT)$$

aus einer auf ein Grundintervall der Länge T zeitbegrenzten Funktion $y(t)$ gebildet. Es soll der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_k der Fourier-Reihe der periodischen Funktion $y_p(t)$, der Fourier-Transformierten $Y_p(f)$ und der Fourier-Transformierten $Y(f)$ untersucht werden. Besonders interessiert hier, wie ...

- a) $Y_p(f)$ aus c_k ,
- b) c_k aus $Y(f)$,
- c) $Y(f)$ aus $Y_p(f)$,
- d) $Y_p(f)$ aus $Y(f)$,

entsteht. (Annahme: Das Grundintervall liegt zwischen $-\frac{T}{2}$ bis $+\frac{T}{2}$.)

Lösung

- a) Die Darstellung der periodischen Funktion $y_p(t)$ durch eine Fourier-Reihe wird durch

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T}t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T}t} dt$$

angegeben. Damit kann man die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} Y_p(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T}t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t(\frac{k}{T} - f)} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

der periodischen Funktion $y_p(t)$ bestimmen. Hierbei handelt es sich um ein Linienspektrum, d.h. es treten nur Dirac-Impulse auf. Die Gewichtungen der Dirac-Impulse sind proportional zu den Koeffizienten der Fourier-Reihe.

- b) Vergleicht man die Fourier-Transformierte der auf das Grundintervall begrenzten Funktion $y(t)$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt, \quad (\text{L1})$$

mit der Bestimmungsgleichung der Fourier-Koeffizienten,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T}t} dt,$$

so erhält man sofort die Gleichung

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot Y\left(\frac{k}{T}\right),$$

die den Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten c_k und der Fourier-Transformierten $Y(f)$ beschreibt.

- c) Durch Erweiterung der Gleichung (L1),

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_p(t) \cdot r_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = Y_p(f) * T \cdot \text{si}(\pi fT), \end{aligned}$$

erhält man die Gleichung, welche die Berechnung von $Y(f)$ aus $Y_p(f)$ ermöglicht. Sie entspricht der Faltung der Dirac-Impulse von $Y_p(f)$ mit einer $\frac{\sin x}{x}$ -Funktion.

- d) Setzt man das Ergebnis von Teilaufgabe **b)** in das Ergebnis von Teilaufgabe **a)** ein, so erhält man die Gleichung

$$Y_p(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y\left(\frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

welche die Berechnung von $Y_p(f)$ aus $Y(f)$ ermöglicht.

Aufgabe 7: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Leiten Sie die Fourier-Transformierte von $\sin(2\pi f_0 t)$ aus

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

durch

- a) Differentiation
- b) Verschiebung

her.

Lösung

a) Wegen

$$\frac{d}{dt} \cos(2\pi f_0 t) = (-2\pi f_0) \sin(2\pi f_0 t)$$

folgt durch Fourier-Transformation und Anwendung der Differentiationseigenschaft

$$(j 2\pi f) \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = (-2\pi f_0) \mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\}$$

und somit

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{-j}{2} \frac{f}{f_0} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{-j}{2} \left(\frac{f}{f_0} \delta(f + f_0) + \frac{f}{f_0} \delta(f - f_0) \right).$$

Berücksichtigt man, dass der Dirac-Impuls $\delta(x - x_0)$ überall, bis auf die Stelle $x = x_0$, den Wert Null annimmt, so müssen hier die Stellen $f = -f_0$ und $f = f_0$ genauer untersucht und die Vorfaktoren der Dirac-Impulse bestimmt werden.

Es ergeben sich daraus die Faktoren $\frac{-f_0}{f_0} = -1$ bzw. $\frac{f_0}{f_0}$ und die Lösung zu

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{-j}{2} (-1 \cdot \delta(f + f_0) + 1 \cdot \delta(f - f_0))$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{j}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)).$$

b) Es gilt

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mit

$$\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{1}{4f_0}\right)\right)$$

folgt daraus durch Fourier-Transformation und mit der Verschiebungseigenschaft

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = e^{-j \frac{2\pi f}{4f_0}} \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = e^{-j \frac{\pi f}{2f_0}} \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)].$$

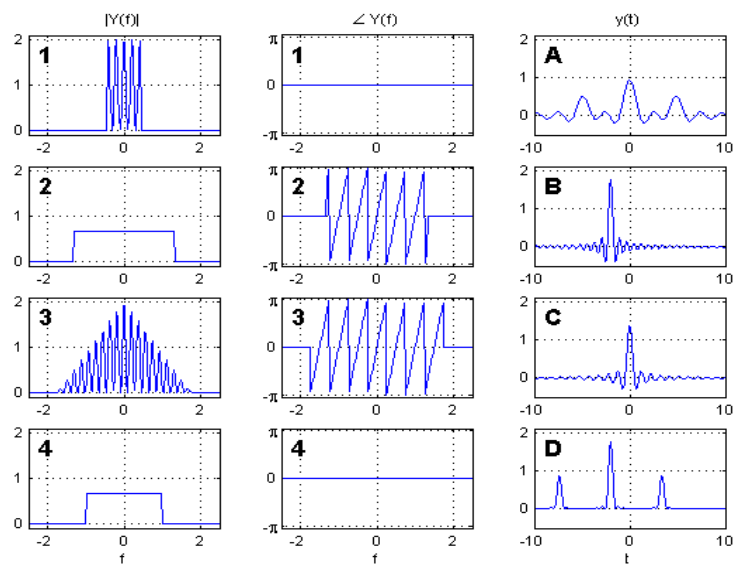
Mit den Betrachtungen von Aufgabenteil a) ergeben sich hier die Faktoren $e^{-j \frac{\pi}{2} \frac{-f_0}{f_0}} = j$ und $e^{-j \frac{\pi}{2} \frac{f_0}{f_0}} = -j$ und somit

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)].$$

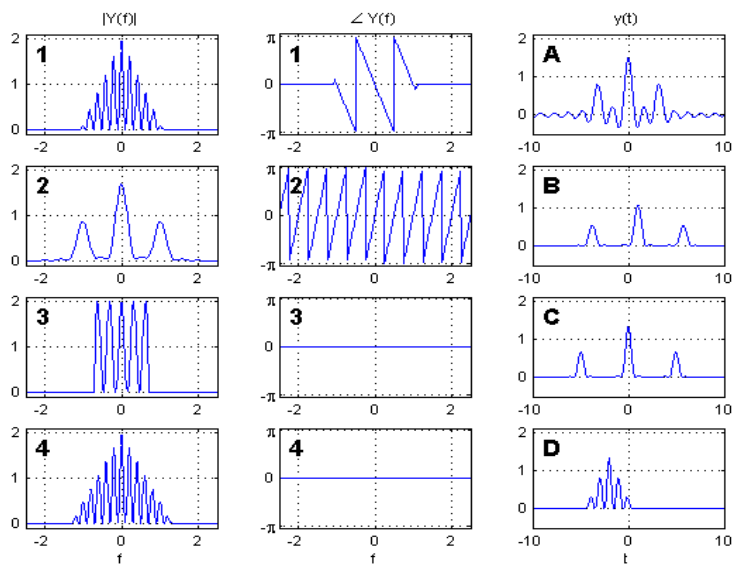
Aufgabe 8: Fourier-Transformation – Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Spektren die richtige Zeitfunktion zu.

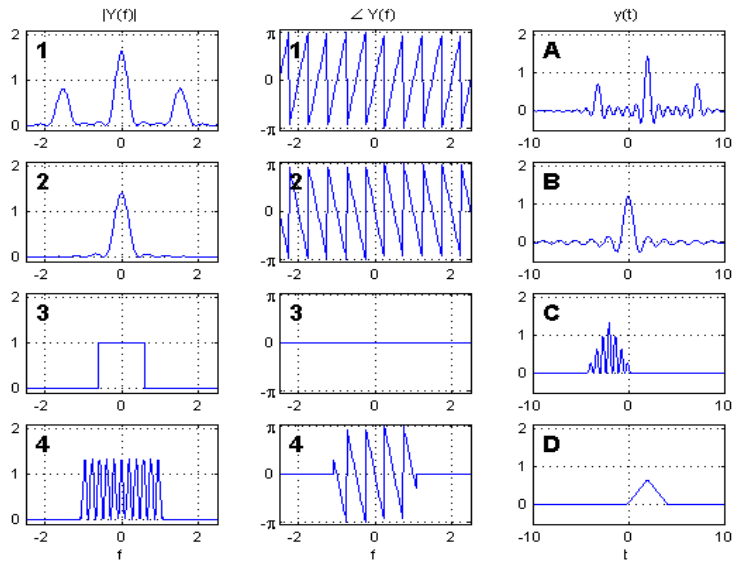
a)



b)



c)



Lösung

- a) 1-A; 2-B; 3-D; 4-C;
- b) 1-B; 2-D; 3-A; 4-C;
- c) 1-C; 2-D; 3-B; 4-A;

Aufgabe 9: Faltung im Zeit- und Frequenzbereich

Bestimmen Sie die Faltung der Funktion

$$y(t) = r_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

mit sich selbst durch Berechnung

- a) im Zeitbereich und
- b) über den Weg im Frequenzbereich.

Lösung

- a) Die Berechnung der Faltung im Zeitbereich erfolgt mit Hilfe der Faltungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 y(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot y(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(\tau) \cdot r_T(t - \tau) \, d\tau \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_T(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_T(\tau - t) \, d\tau \quad \left| \begin{array}{l} \nu = \tau - t \\ d\nu = d\tau \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-T/2-t}^{T/2-t} r_T(\nu) \, d\nu \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \geq T \\ T+t & \text{für } -T < t \leq 0 \\ T-t & \text{für } 0 < t < T \end{cases} = T \cdot d_{2T}(t) .
\end{aligned}$$

- b) Die Berechnung der Faltung über den Frequenzbereich entspricht der inversen Fourier-Transformation des Produkts der beiden Fourier-Transformierten:

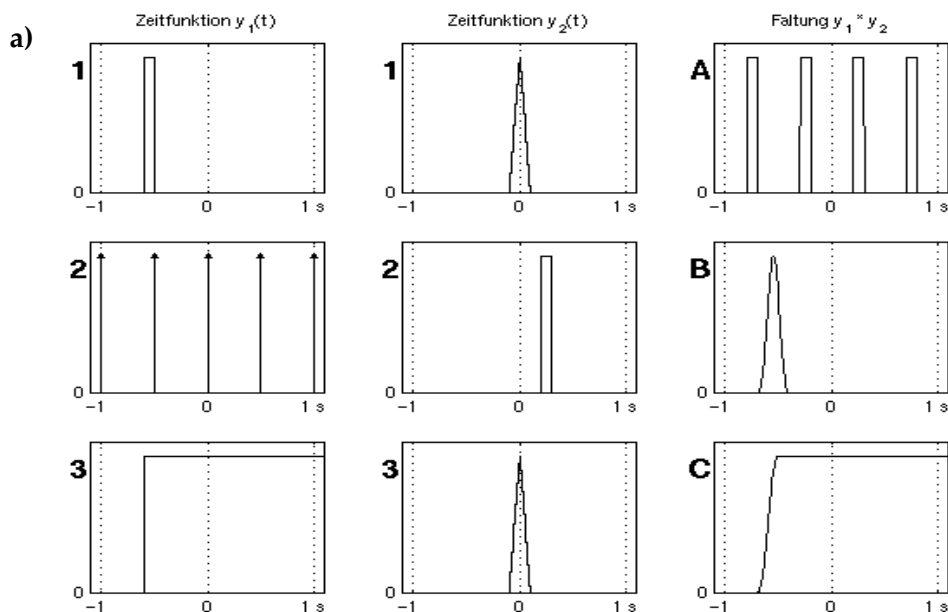
$$\begin{aligned}
y(t) * y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}\{y(t)\} \cdot \mathcal{F}\{y(t)\} \} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \{ T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \{ T^2 \cdot \text{si}^2(\pi f T) \} = T \cdot d_{2T}(t) .
\end{aligned}$$

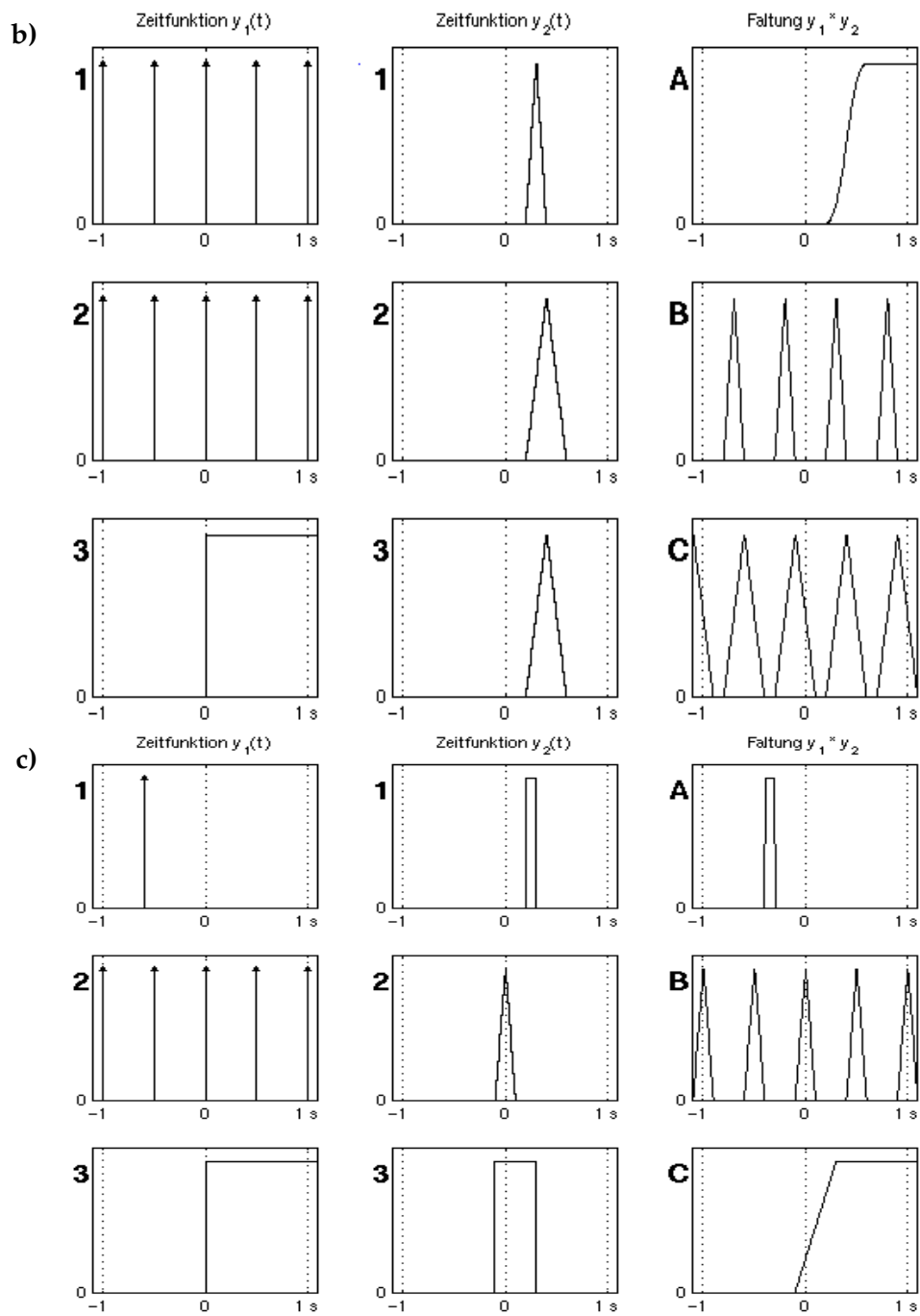
Dabei wird die Korrespondenztabelle der Fourier-Transformation verwendet. Zur Erinnerung:

$$\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x} .$$

Aufgabe 10: Faltung – Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Funktionen das richtige Faltungsprodukt zu.





Lösung

- a) 1-B; 2-A; 3-C;
- b) 1-B; 2-C; 3-A;
- c) 1-A; 2-B; 3-C;

3. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 24.11.2020 bis 08.12.2020

Aufgabe 11: Systemeigenschaften

- a) Untersuchen Sie die folgenden Systeme auf Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität. Das Eingangssignal ist jeweils mit x , das Ausgangssignal mit y bezeichnet.

(1) $y(t) = \cos(x(t-1)) \quad t, x, y \in \mathbb{R}$

(2) $y(t) = ax(t) - b \frac{dy(t)}{dt} \quad a, b, t, x, y \in \mathbb{R}$

(3) $y(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau \quad t, x, y, T \in \mathbb{R}$

(4) $y(t) = at^2 + x(t+3) \quad a, t, x, y \in \mathbb{R}$

- b) Diskutieren Sie, ob die Systeme (1)-(4) BIBO stabil sind, bzw. unter welchen Bedingungen sie BIBO stabil sind.

Lösung

- a) (1) Linearität: $\cos(mx(t-1)) \neq m \cos(x(t-1))$ ✗
 Zeitinvarianz: $y(t-t_0) = \cos(x(t-t_0-1))$ ✓
 Kausalität: $y(t)$ hängt nur von vergangenen Werten von $x(t)$ ab. ✓
- (2) Linearität: Die Ein- und Ausgangs-Funktionen werden nur mit Skalaren multipliziert.
 Die Differentiation ist ebenfalls linear. ✓
 Zeitinvarianz: Alle Funktionen hängen nur von Argument t ab. ✓
 Kausalität: $y(t)$ hängt nur von aktuellen und vergangenen Werten von $x(t)$ und $y(t)$ ab. ✓
- (3) Linearität: $S\{mx_1(t) + nx_2(t)\} = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} mx_1(\tau) + nx_2(\tau) d\tau$
 $= m \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x_1(\tau) d\tau + n \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x_2(\tau) d\tau = mS\{x_1(t)\} + nS\{x_2(t)\}$ ✓
- Zeitinvarianz: $\int_{t-t_0-\frac{T}{2}}^{t-t_0+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau-t_0) d\tau$ ✓
- Kausalität: Im Integral werden zukünftige Werte von $x(t)$ verwendet. ✗
- (4) Linearität: $mS\{x(t)\} = m(at^2 + x(t+3)) \neq at^2 + mx(t+3) = S\{mx(t)\}$ ✗
 Zeitinvarianz: $y(t-t_0) = a(t-t_0)^2 + x(t-t_0+3) \neq at^2 + x(t-t_0+3)$ ✗
 Kausalität: Es werden zukünftige Werte von $x(t)$ zur Bestimmung von $y(t)$ verwendet. ✗

Insgesamt ergibt sich folgende Zuordnung:

System	linear	zeitinvariant	kausal
(1)	nein	ja	ja
(2)	ja	ja	ja
(3)	ja	ja	nein
(4)	nein	nein	nein

- b) (1) BIBO stabil, da $|\cos x| \leq 1$

(2) BIBO stabil für $b \geq 0$. Für $b = 0$ ist dies aus der Differentialgleichung ersichtlich. Für $b \neq 0$ erkennt man dies an der Lage der Polstelle der Übertragungsfunktion in der linken bzw. rechten offenen Halbebene: $G(s) = \frac{a}{1+bs} = \frac{a/b}{s-(-1/b)}$

(3) BIBO stabil, da Integration über endliches Intervall

(4) Nicht BIBO stabil, da für jedes beschränkte $x(t)$ mit $t \rightarrow \pm\infty$ gilt: $y(t) \rightarrow \infty$.

Aufgabe 12: Impulsantwort und Stabilität

Geben Sie **jeweils** an, wann die folgenden Impulsantworten ein stabiles LTI-System charakterisieren.

$$g_1(t) = \cos(t)\sigma(t) \quad , \quad g_2(t) = e^{\alpha t} \sigma(t) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösung

Ein System ist genau dann stabil, wenn die Impulsantwort absolut integrierbar ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, dt < \infty.$$

Somit kann das erste System nicht stabil sein, da

$$\int_0^{\infty} |\cos(t)| \, dt = \infty$$

ist. Zur Untersuchung des zweiten Systems ist wegen $|e^x| = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, die Integrierbarkeit von $e^{\alpha t}$ in $[0, \infty)$ entscheidend. Aus diesem Grund ist das System genau dann stabil, wenn $\alpha < 0$ gilt. Instabilität liegt für $\alpha \geq 0$ vor.

Aufgabe 13: Laplace-Transformation

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{7}{15} e^{-3t} \right) \sigma(t)$$

mit Hilfe

a) des Integrals $Y(s) = \int_{0-}^{\infty} y(t) e^{-st} \, dt$

b) der Korrespondenztabelle.

Lösung

a)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{0-}^{\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{7}{15} e^{-3t} \right) e^{-st} \, dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{3} e^{-st} - \frac{1}{5} e^{-(s-2)t} - \frac{7}{15} e^{-(s+3)t} \, dt \\ &= \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s-2} \right) e^{-(s-2)t} + \frac{7}{15} \left(\frac{1}{s+3} \right) e^{-(s+3)t} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \underbrace{\frac{\frac{1}{5}}{(s-2)} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-2)t}}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re}\{s\} > 2} + \underbrace{\frac{\frac{7}{15}}{(s+3)} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+3)t}}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re}\{s\} > -3} + \frac{2}{3} \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{5}}{(s-2)} - \frac{\frac{7}{15}}{(s+3)} \\
&= \frac{2}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{1}{s-2} - \frac{7}{15} \frac{1}{s+3} \\
&= \frac{\frac{2}{3}(s-2)(s+3) - \frac{1}{5}s(s+3) - \frac{7}{15}s(s-2)}{s(s-2)(s+3)} \\
&= \frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s}
\end{aligned}$$

b) Aus der Korrespondenztabelle ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{1}{s-2} - \frac{7}{15} \frac{1}{s+3} \\
&= \frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14: Laplace-Rücktransformation mittels Residuensatz und Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mittels des Residuensatzes die kausale Zeitfunktion zu der Laplace-Transformierten

$$X(s) = \frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s}.$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Partialbruchzerlegung von $X(s)$.

Lösung

Da es sich per Aufgabenstellung um eine kausale Zeitfunktion handelt, finden die folgenden Berechnungen für $t \geq 0$ statt. Es gilt nach dem Residuensatz

$$x(t) = \sum \operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty}\},$$

wobei

$$\operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty}\} = \lim_{s \rightarrow s_{\infty}} (s - s_{\infty}) X(s) e^{st}$$

gilt. Aus

$$\frac{s-4}{s^3 + s^2 - 6s} = \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)}$$

lassen sich die Polstellen $s_{\infty 1} = 0$, $s_{\infty 2} = 2$ und $s_{\infty 3} = -3$ ablesen. Mit diesen Polstellen ergibt sich für die Zeitfunktion:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(\operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty} = 0\} + \operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty} = 2\} + \operatorname{Res}\{X(s) e^{st}, s_{\infty} = -3\} \right) \sigma(t) \\
&= \left(\lim_{s \rightarrow 0} \left[(s-0) \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow 2} \left[(s-2) \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)} e^{st} \right] \right. \\
&\quad \left. + \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s+3) \frac{s-4}{s(s-2)(s+3)} e^{st} \right] \right) \sigma(t)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{7}{15} e^{-3t} \right) \sigma(t)$$

Über die Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{-\frac{1}{5}}{s-2} + \frac{-\frac{7}{15}}{s+3}$$

und damit dasselbe Zeitsignal gemäß der Korrespondenztabelle.

Aufgabe 15: Zeitkontinuierliches System - Differentialgleichung

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches, kausales LTI-System, welches bei dem Eingangssignal $y_e(t)$ und dem Ausgangssignal $y_a(t)$ durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}_a(t) + 5\dot{y}_a(t) + 4y_a(t) = y_e(t)$$

beschrieben ist.

- a) Berechnen Sie **jeweils** eine Zustandsraumdarstellung dieses Systems, indem Sie
 - i) die Herleitung aus der Vorlesung (Buch) **nachvollziehen**.
 - ii) die Zustandsgrößen $z_1(t) = y_a(t)$, $z_2(t) = \dot{y}_a(t)$ verwenden.
- b) Geben Sie mittels der Differentialgleichung für das System einen Signalflussplan an.
- c) Berechnen Sie aus einer der Zustandsraumdarstellungen nach a) die Übertragungsfunktion. Nehmen Sie hierfür verschwindende Anfangswerte an.
- d) Wie lautet die Impulsantwort des Systems?
- e) Berechnen Sie über das Faltungsintegral die Reaktion des Systems auf das Eingangssignal $y_e(t) = e^{-t} \sigma(t)$.
- f) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems aus der Impulsantwort.

Lösung

- a) i) Aus $\ddot{y}_a(t) = y_e(t) - 4y_a(t) - 5\dot{y}_a(t)$ folgt nach dem Buch (6. Aufl.: S. 145f., 7. Aufl.: S. 158f.)

$$\dot{z}_0(t) = y_e(t) - 4y_a(t)$$

$$\ddot{z}_1(t) = y_e(t) - 4y_a(t) - 5\dot{y}_a(t) \implies \dot{z}_1(t) = z_0(t) - 5y_a(t).$$

Wegen

$$\ddot{y}_a(t) = \ddot{z}_1(t) \implies y_a(t) = z_1(t)$$

folgt somit:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{B}} y_e(t) \\ y_a(t) &= \underbrace{(0, 1)}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t) + \underbrace{(0)}_{\mathbf{D}} y_e(t) \end{aligned}$$

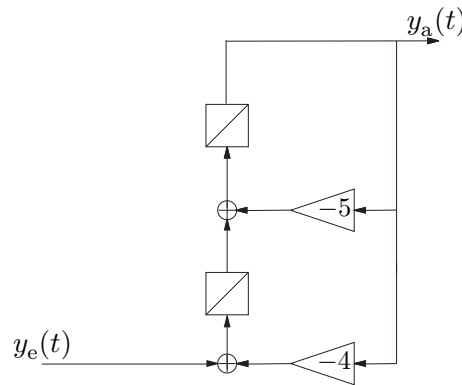
- ii) Durch Einsetzen folgt $\dot{z}_2(t) + 5z_2(t) + 4z_1(t) = y_e(t)$ und somit aufgrund von $\dot{z}_1(t) = z_2(t)$ die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{B}} y_e(t) \\ y_a(t) &= \underbrace{(1, 0)}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t) + \underbrace{(0)}_{\mathbf{D}} y_e(t)\end{aligned}$$

- b) Durch zweimalige, informale Integration der Differentialgleichung folgt

$$y_a(t) = \int \int y_e(t) - 4 \int \int y_a(t) - 5 \int y_a(t)$$

und daraus das folgende Flussverhalten:



- c) Aus der Zustandsraumdarstellung folgt

$$\mathbf{Y}_a(s) = \left(\mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \mathbf{Y}_e(s).$$

Durch Ausrechnen ergibt sich:

$$\begin{aligned}G(s) &= (0, 1) \begin{pmatrix} s & 4 \\ -1 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1) \frac{1}{s(s+5)+4} \begin{pmatrix} s+5 & -4 \\ 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, 1) \frac{1}{s(s+5)+4} \begin{pmatrix} s+5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+5)+4}\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Differentialgleichung erkennt man unter Beachtung der verschwindenden Anfangswerte die Richtigkeit der Rechnung.

- d) Aus $G(s)$ folgt durch den Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+4}$$

und damit über Korrespondenztabelle

$$g(t) = \frac{1}{3} e^{-t} \sigma(t) - \frac{1}{3} e^{-4t} \sigma(t).$$

e) Durch Rechnung:

$$\begin{aligned}y_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_e(\tau) g(t-\tau) \, d\tau = \left(\int_0^t e^{-\tau} \frac{1}{3} \left(e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)} \right) \, d\tau \right) \sigma(t) \\&= \left(\frac{1}{3} \int_0^t \left(e^{-t} - e^{-4t+3\tau} \right) \, d\tau \right) \sigma(t) \\&= \frac{1}{3} \left[e^{-t} \tau - \frac{1}{3} e^{-4t} e^{3\tau} \right]_0^t \sigma(t) \\&= \left(\frac{1}{3} t e^{-t} - \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-4t} \right) \sigma(t)\end{aligned}$$

f) Wegen $h(t) = g(t) * \sigma(t)$ ist die Sprungantwort

$$\begin{aligned}h(t) &= \left(\int_0^t \frac{1}{3} e^{-\tau} - \frac{1}{3} e^{-4\tau} \, d\tau \right) \sigma(t) = \left[\frac{1}{3} (-1) e^{-\tau} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4\tau} \right]_0^t \sigma(t) \\&= \left(-\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{-4t} + \frac{1}{4} \right) \sigma(t).\end{aligned}$$

4. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 08.12.2020 bis 22.12.2020

Weitere Hinweise:

Die Klausur zu Signalen und Systemen gliedert sich üblicherweise in vier Aufgaben. Nach Abschluss dieser Übung sollten Sie in der Lage sein, Aufgabe 2 („Zeitkontinuierliche Systeme“) zu bearbeiten. Eine Sammlung an Altklausuren finden Sie im ILIAS-Kurs.

Aufgabe 16: Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems mit der Impulsantwort

$$g(t) = (8t \cdot e^{-2t} - 4t^2 \cdot e^{-2t}) \sigma(t)$$

und skizzieren Sie den Pol-Nullstellenplan.

Lösung

Die Systemfunktion $G(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort. Mit der Korrespondenz

$$\frac{1}{n!} t^n e^{\alpha t} \circ \bullet \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$$

ergibt sich

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)^2} - \frac{8}{(s+2)^3} = \frac{8(s+2) - 8}{(s+2)^3} = \frac{8(s+1)}{(s+2)^3}.$$

Der Pol-Nullstellenplan ist in Abbildung L2 zu sehen.

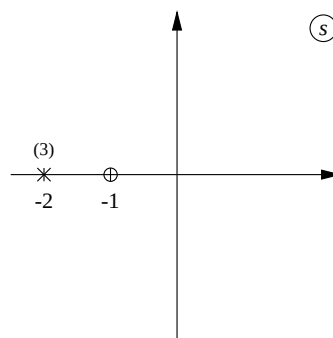


Abbildung L2: Pol-Nullstellenplan der Systemfunktion

Aufgabe 17: Minimalphasen- und Allpassanteil

- a) Zerlegen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-2)(s-3)}{(s^2+2s+2)(s+5)}$$

in ihren Minimalphasen- und ihren Allpass-Anteil. Ist der Allpassanteil stabil? Kann diese Aussage verallgemeinert werden? (**Begründung!**)

Lösung

- a) Die Zerlegung lautet:

$$G(s) = \underbrace{\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s^2+2s+2)(s+5)}}_{G_M(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s-2)(s-3)}{(s+2)(s+3)}}_{G_A(s)}$$

Die Pole der Übertragungsfunktionen sind für den Allpass $s_{A,\infty,1} = -2, s_{A,\infty,2} = -3$ und für das Minimalphasensystem $s_{M,\infty,1} = -5, s_{M,\infty,2/3} = -1 \pm j$.

Die Pole des Allpassanteils entsprechen den **negierten** Nullstellen von $G(s)$, welche nicht in der linken Halbebene liegen. Somit haben alle Polstellen des Allpasses **bei solch einer Zerlegung** stets einen negativen Realteil und der Allpassanteil ist stabil.

Aufgabe 18: Zeitkontinuierliches System - Signalflussplan

In Abbildung 2 ist der Signalflussplan eines Systems S_1 mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

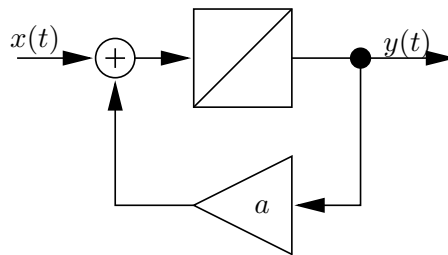
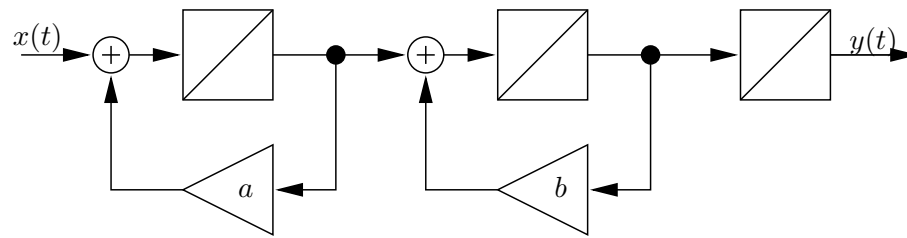


Abbildung 2: Signalflussplan des Systems S_1 .

- Bestimmen Sie aus dem Signalflussplan des Systems S_1 dessen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ des Systems S_1 .
- Wie lauten die Pol- und Nullstellen des Systems S_1 .
- Ist das System S_1 stabil? Begründen Sie Ihre Angabe!
- Geben Sie die Impulsantwort des Systems S_1 an.

In Abbildung 3 ist der Signalflussplan eines Systems S_2 mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt.

Abbildung 3: Signalflussplan des Systems S_2 .

- f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ des Systems S_2 .
- g) Wie lauten Pol- und Nullstellen des Systems S_2 .
- h) Ist das System S_2 stabil? Begründen Sie Ihre Angabe!

Lösung

- a) Das Ausgangssignal $y(t)$ ist die integrierte Summe des Eingangssignals $x(t)$ und des mit a multiplizierten Ausgangssignals. Differenziert man, so folgt

$$\dot{y}(t) = x(t) + a \cdot y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{y}(t) - a \cdot y(t) = x(t)$$

als Differentialgleichung des Systems S_1 .

- b) Die Systemfunktion ergibt sich durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung:

$$sY(s) - aY(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s - a) = X(s) \quad \Rightarrow \quad G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s - a}.$$

- c) Das System S_1 besitzt keine Nullstellen und eine Polstelle bei $s_{1,\infty} = a$.
- d) Ein zeitkontinuierliches System ist dann stabil, wenn alle Polstellen in der linken s -Halbebene liegen, d.h. wenn gilt:

$$\operatorname{Re}\{s_{1,\infty}\} = \operatorname{Re}\{a\} = a < 0.$$

- e) Die Impulsantwort ist die Laplace-Rücktransformierte der Systemfunktion

$$g_1(t) = e^{at} \cdot \sigma(t).$$

- f) Das System S_2 entsteht durch zweimaliges Hintereinanderschalten des Systems S_1 mit verschiedenen Koeffizienten und Anhängen eines Integrators. Beim Hintereinanderschalten von Teilsystemen werden die Systemfunktionen der Teilsysteme multipliziert. Hieraus folgt die Systemfunktion des Systems S_2 :

$$G_2(s) = \frac{1}{s - a} \cdot \frac{1}{s - b} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s - a)(s - b)s}$$

- g) Auch das System S_2 besitzt keine Nullstellen, dafür drei Polstellen bei

$$s_{2,\infty,1} = a \quad s_{2,\infty,2} = b \quad s_{2,\infty,3} = 0.$$

- h) Das System S_2 ist nicht stabil, da die dritte Polstelle $s_{2,\infty,3}$ nicht in der linken offenen s -Halbebene liegt.

Aufgabe 19: RLC-Schaltung

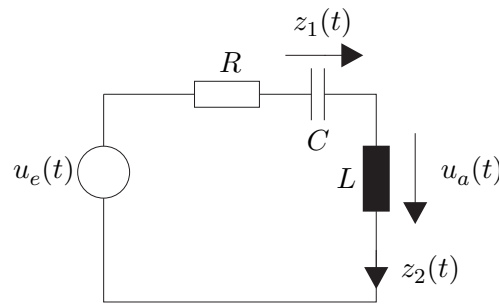


Abbildung 4: RLC-Schaltung.

Gegeben sei die in Abbildung 4 skizzierte Schaltung mit $R, L, C \in \mathbb{R}^+$. Zu Beginn der Betrachtung befindet sich das System in Ruhe.

- Berechnen Sie mit Hilfe der Zustandsgrößen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ die Differentialgleichungen, die das System charakterisieren.
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$. Gehen Sie davon aus, dass sich das System zu Beginn in Ruhe befindet. Zeichnen Sie den Signalflussplan in ARMA-Form.
- Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! Berechnen Sie den stationären Endwert von $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$!
- Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems!
- Für welche Werte der Parameter R, L und C enthält die Sprungantwort Schwingungen?
- Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems für die Zahlenwerte $R = 100$, $L = 100 \cdot 10^{-3}$ und $C = 300 \cdot 10^{-6}$.

Lösung

- An einer Kapazität gilt mit $Q_C = CU_C$ der Zusammenhang

$$I_C = \dot{Q}_C = C\dot{U}_C.$$

Für die Spannung an einer Induktivität gilt

$$U_S = L \cdot \dot{I}_S.$$

Angewandt auf die obige Schaltung erhält man die Gleichungen

$$z_2(t) = C\dot{z}_1(t) \Rightarrow \dot{z}_1(t) = \frac{1}{C}z_2(t), \quad u_a(t) = L \cdot \dot{z}_2(t) \Rightarrow \dot{z}_2(t) = \frac{1}{L}u_a(t). \quad (\text{L2})$$

Zusammen mit der Maschengleichung

$$u_e(t) = Rz_2(t) + z_1(t) + u_a(t)$$

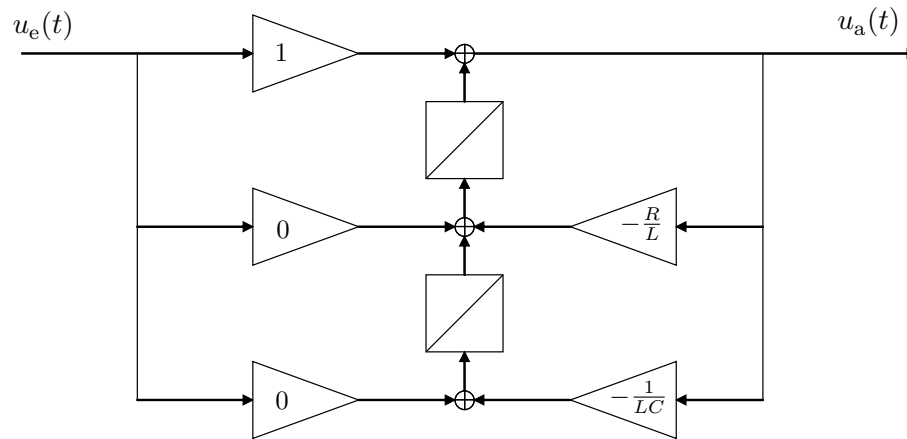


Abbildung L3: Signalflussplan in ARMA-Form

ist damit das System vollständig beschrieben. Setzt man die beiden Gleichungen (L2) ineinander ein erhält man den Zusammenhang

$$u_a(t) = LC \cdot \ddot{z}_1(t) \Rightarrow \ddot{z}_1(t) = \frac{1}{LC} u_a(t).$$

Bildet man die zweite Ableitung der Maschengleichung und setzt die übrigen Gleichungen ein, erhält man schließlich die Differentialgleichung

$$\ddot{u}_e = \frac{R}{L} \dot{u}_a(t) + \frac{1}{LC} u_a(t) + \ddot{u}_a(t), \quad (\text{L3})$$

die nur noch das Eingangs- und das Ausgangssignal beinhaltet.

b) Die Laplace-Transformation von Gleichung (L3) ergibt

$$\begin{aligned} s^2 U_e(s) &= \frac{R}{L} s U_a(s) + \frac{1}{LC} U_a(s) + s^2 U_a(s) \\ &= \left(\frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} + s^2 \right) U_a(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

Der zugehörige Signalflussplan ist in Abbildung L3 zu sehen.

c) Die Pole liegen bei

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}.$$

Fallunterscheidung reelle/komplexe Pole:

a) Fall: $R^2 C - 4L \geq 0 \Rightarrow$ Reelle Pole, Betrachtung des Pols "weiter rechts".

$$\begin{aligned} s_{\infty} &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}} \stackrel{!}{<} 0 \\ \Rightarrow \frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C} &< \frac{R^2 C}{4L^2 C} \\ \Rightarrow -4L &< 0 \\ \Rightarrow L &> 0 \quad \text{immer erfüllt.} \end{aligned}$$

b) Fall: $R^2C - 4L < 0 \Rightarrow$ komplexe Pole, nur Betrachtung des Realteils.

$$\operatorname{Re}\{s_\infty\} = -\frac{R}{2L} < 0 \quad \text{immer erfüllt.}$$

Damit ist das System immer stabil.

Mit dem Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = 0.$

d) Für die Sprungantwort erhält man:

$$h(t) = S\{\sigma(t)\} = S\left\{\int_0^t \delta(\tau) d\tau\right\} = \int_0^t S\{\delta(\tau)\} d\tau = \int_0^t g(t) d\tau$$

•
|
○

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{A}{s - s_{\infty 1}} + \frac{B}{s - s_{\infty 2}}.$$

Mit den Polstellen von oben ergibt sich:

$$\Rightarrow A = \frac{s_{\infty 1}}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}}, \quad B = \frac{s_{\infty 2}}{s_{\infty 2} - s_{\infty 1}}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}} \left(\frac{s_{\infty 1}}{s - s_{\infty 1}} - \frac{s_{\infty 2}}{s - s_{\infty 2}} \right)$$

•
|
○

$$h(t) = \frac{1}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}} \left[s_{\infty 1} e^{s_{\infty 1}t} - s_{\infty 2} e^{s_{\infty 2}t} \right] \sigma(t)$$

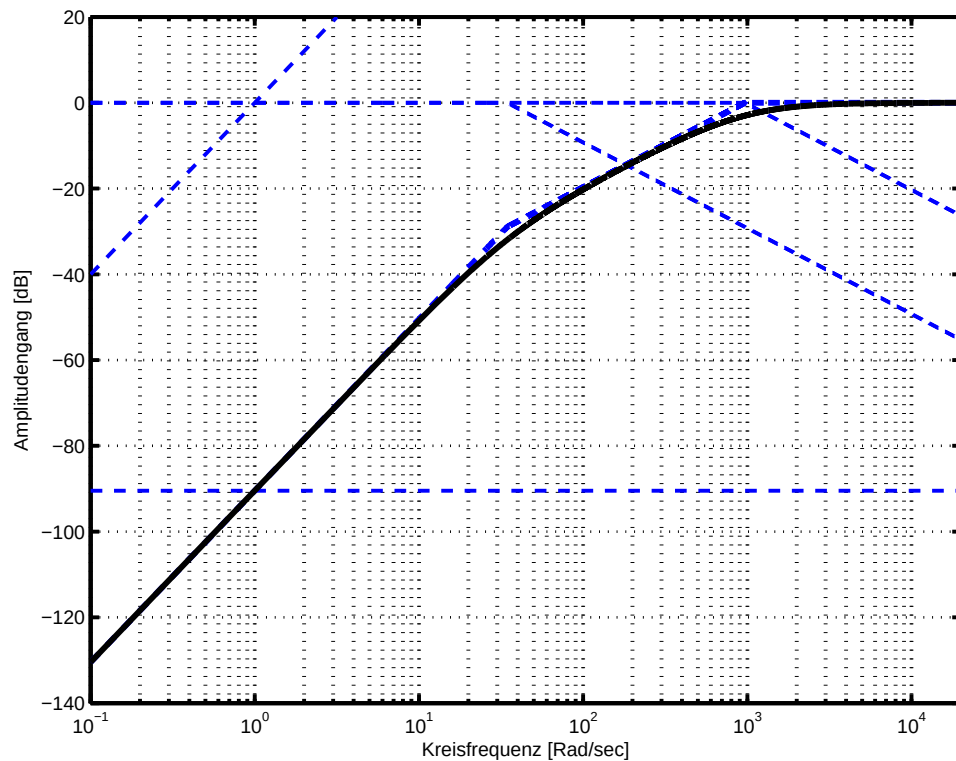
$$= \frac{1}{\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cosh \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} t - R \sinh \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} t \right).$$

e) Damit die Sprungantwort schwingt, müssen die Exponenten der Exponentialfunktion komplex sein. Dies ist für $R^2C - 4L < 0$ der Fall. In diesem Fall wird aus den Funktionen $\sinh(t)$ und $\cosh(t)$ ein $\sin(t)$ bzw. $\cos(t)$.

f) Erstellen des Bodediagramms:

$$G(s) = \frac{s^2}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2})} = \frac{1}{s_{\infty 1}s_{\infty 2}} \frac{s^2}{\left(\frac{s}{s_{\infty 1}} - 1\right)\left(\frac{s}{s_{\infty 2}} - 1\right)}.$$

Die beiden Pole ergeben sich zu $s_{\infty 1} \approx -34,5$, $s_{\infty 2} \approx -965,5$. Der konstante Faktor liefert im Bode-Diagramm einen konstanten Offset $20 \log \left| \frac{1}{s_{\infty 1}s_{\infty 2}} \right| \approx -90,5$. Die doppelte Nullstelle bei $\omega = 0$ ergibt im Bode-Diagramm des Amplitudengangs eine Gerade mit 40 dB/Dekade Steigung, die bei $\omega = 10^0$ die Frequenzachse schneidet. Jeder der Pole ergibt eine Linie, die bis zur entsprechenden Knickfrequenz $|s_{\infty 1}| \approx -34,5$, $|s_{\infty 2}| \approx -965,5$ konstant null ist und dann mit -20 dB/Dekade abfällt. Die Superposition all dieser Linien ergibt den approximierten Frequenzgang:



Aufgabe 20: Pol-/Nullstellendiagramm

Von einem zeitkontinuierlichen, reellen LTI-System $G(s)$ seien folgende Eigenschaften bekannt:

1. Es existieren insgesamt fünf Pol-/Nullstellen (zusammen).
 2. $\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| = 0$.
 3. Das System ist stabil.
 4. Der Betrag des Realteils aller Polstellen ist jeweils 2.
 5. Der Imaginärteil einer Polstelle ist 1.
 6. Das System ist minimalphasig.
 7. $|G(j)| = 0$.
- a) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm.
 - b) Begründen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen. Nutzen Sie dafür die Nummerierung der oben genannten Eigenschaften.
 - c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ an.

Lösung

a) Das Pol-/Nullstellendiagramm ist in Abbildung L4 zu sehen.

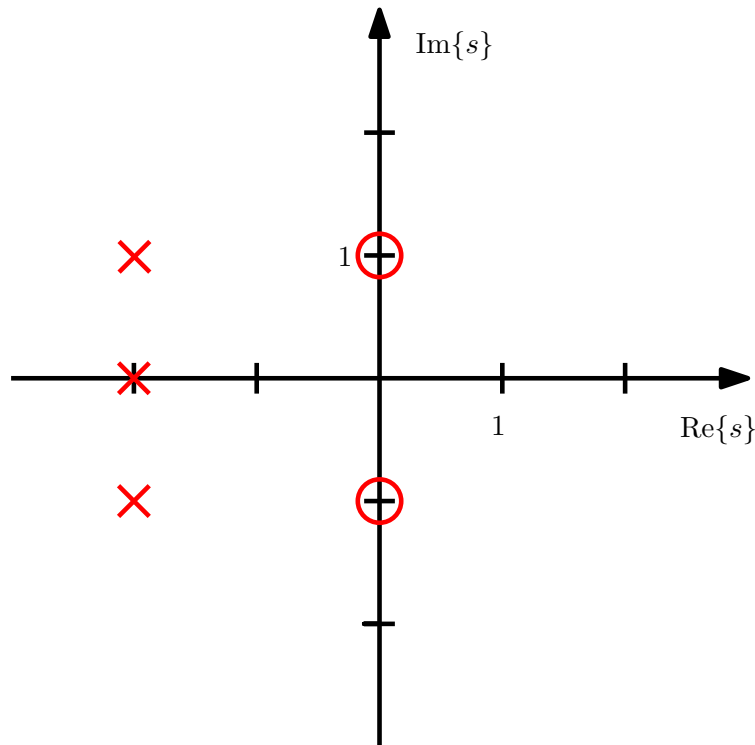


Abbildung L4: Pol-/Nullstellendiagramm.

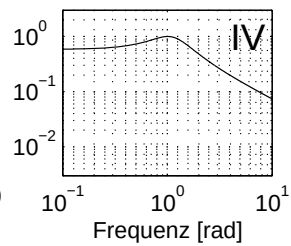
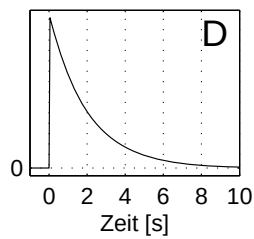
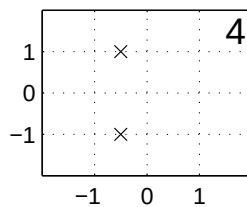
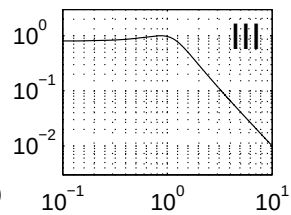
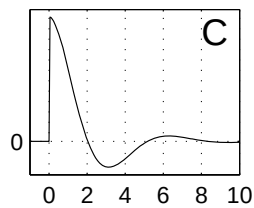
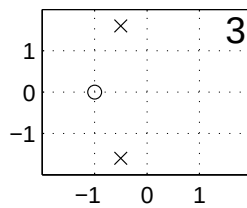
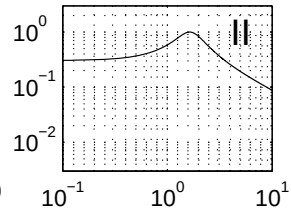
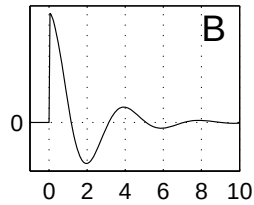
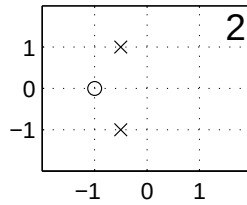
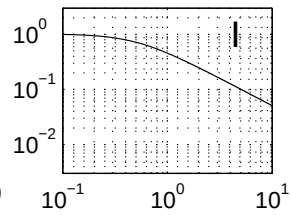
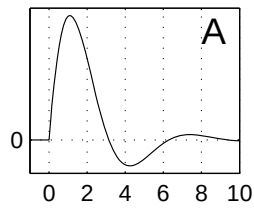
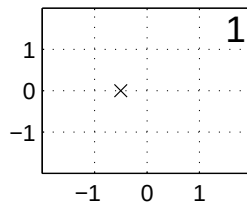
- b)
- Nach Eigenschaft 2) muss es mindestens eine Polstelle mehr als Nullstellen geben. Zusammen mit 1) erlaubt dies drei, vier oder fünf Polstellen.
 - Nach Eigenschaft 3) müssen alle Polstellen links der imaginären Achse liegen.
 - Eigenschaften 4) und 5) definieren die Lage eines Polstellenpaares bei $s = -2 \pm j$. (Polstellenpaar, da reelles System)
 - Nach Eigenschaft 6) gilt für die Nullstellen $\operatorname{Re}\{s_0\} \leq 0$.
 - Nach Eigenschaft 7) muss eine Nullstelle bei $s = j$ liegen. Da diese auch nur als konjugiert komplexes Paar auftreten, liegt zusätzlich eine Nullstelle bei $s = -j$.
 - Es bleibt noch eine Polstelle übrig, welche nach 4) bei $s = -2$ liegt.
- c) Insgesamt ergibt sich so die Übertragungsfunktion

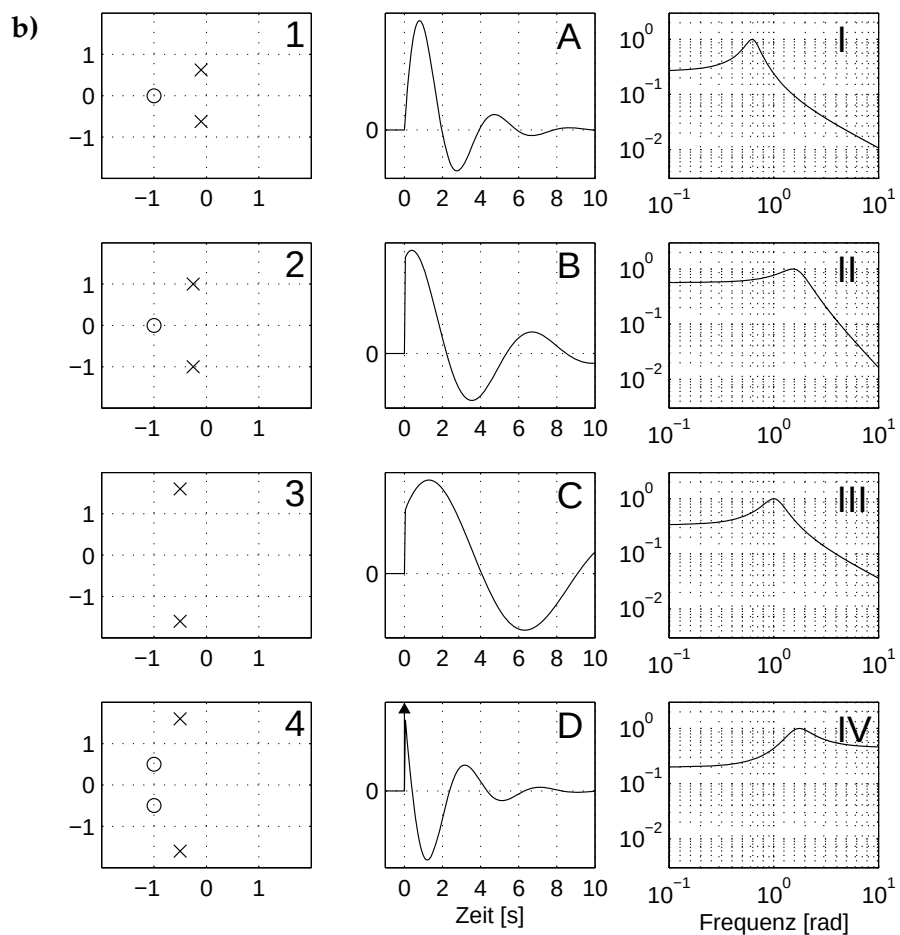
$$G(s) = k \frac{(s+j)(s-j)}{(s+2)(s+2+j)(s+2-j)} = k \frac{(s^2+1)}{(s+2)(s^2+4s+5)} .$$

Aufgabe 21: Zeitkontinuierliche Systeme – Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Pol-/Nullstellen-Diagrammen (arabische Zahlen) die richtigen Impulsantworten (große Buchstaben) und Amplitudengänge (römische Zahlen) zu.

a)





Lösung

- a) 1-D-I
 2-C-IV
 3-B-II
 4-A-III
- b) 1-C-I
 2-B-III
 3-A-II
 4-D-IV

5. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 22.12.2020 bis 19.01.2021

Weitere Hinweise:

Die Klausur zu Signale und Systeme gliedert sich üblicherweise in vier Aufgaben. Nach Abschluss dieser Übung sollten Sie in der Lage sein, Aufgabe 3 („Zeitdiskrete Signale“) zu bearbeiten. Eine Sammlung an Altklausuren finden Sie im ILIAS-Kurs.

Aufgabe 22: Abtasttheorem

Wie muss die Abtastzeit t_A gewählt werden, damit bei der Abtastung des Signals

$$y(t) = 1 + \cos(2 \text{ Hz} \pi t) + 2 \sin(40 \text{ Hz} \pi t)$$

die Bedingung des Abtasttheorems erfüllt wird?

Lösung

Das Signal besteht aus einem Gleichanteil und zwei Schwingungen mit den Frequenzen $f_1 = 1 \text{ Hz}$ und $f_2 = 20 \text{ Hz}$. Hieraus folgt aus dem Abtasttheorem die Bedingung für die Abtastfrequenz $f_A > 40 \text{ Hz}$ und die Bedingung für die Abtastzeit $t_A < 25 \text{ ms}$.

Aufgabe 23: Rekonstruktionsfilter 1

Ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$ wird mit der Abtastfrequenz f_A ideal zu $y_*(t)$ abgetastet und anschließend mit einem Rekonstruktionsfilter mit dem Frequenzgang $G(f)$ rekonstruiert. Dabei soll das ursprüngliche Signal wiedergewonnen werden. Das bandbegrenzte Signal $y(t)$, das ab einer Frequenz von 20 kHz keine Spektralanteile mehr besitzt, lässt sich durch das Spektrum in Abbildung 5 beschreiben.

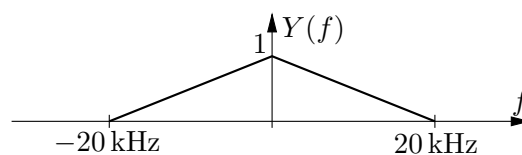


Abbildung 5: Spektrum des Signals

Für die Abtastfrequenz f_A stehen folgende Frequenzen zur Verfügung:

$$(i) f_A = 36 \text{ kHz} \quad (ii) f_A = 44 \text{ kHz} \quad (iii) f_A = 64 \text{ kHz}$$

- a) Wählen Sie aus den drei gegebenen Abtastfrequenzen die niedrigste aus, so dass eine exakte Rekonstruktion des ursprünglichen Signals $y(t)$ möglich ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

Als Rekonstruktionsfilter mit dem Frequenzgang $G(f)$ stehen die Frequenzgänge in Abbildung 6 zur Verfügung.

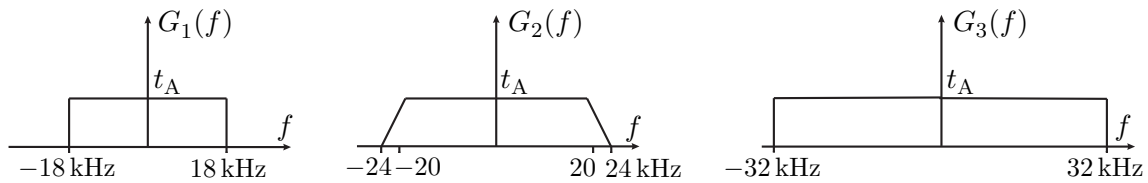


Abbildung 6: Rekonstruktionsfilter

- b) Entscheiden Sie sich für eines der gegebenen Interpolationsfilter G_1 , G_2 oder G_3 , mit dem eine exakte Rekonstruktion mit der in Teilaufgabe a) gewählten Abtastfrequenz gelingt. Begründen Sie Ihre Wahl.
- c) Skizzieren Sie für Ihre Wahl der Abtastfrequenz aus Teilaufgabe a) und des Rekonstruktionsfilters aus Teilaufgabe b) das Spektrum des abgetasteten Signals $y_*(t)$ und den Frequenzgang des Rekonstruktionsfilters für $|f| < 80$ kHz.

Lösung

- a) Aufgrund des Abtasttheorems muss hier die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz, d.h. $f_A \geq 40$ kHz. Hier wird also $f_A = 44$ kHz gewählt.
- b) Rekonstruktionsfilter G_1 schneidet vom eigentlichen Signal $y(t)$ die Frequenzanteile zwischen 18 kHz und 20 kHz weg. Filter G_3 lässt hingegen auch Spektralanteile, die nicht zum eigentlichen Signal $y(t)$ gehören, ungefiltert durch. Lediglich Filter G_2 erfüllt die Anforderungen.
- c) Das Spektrum ist in Abbildung L5 dargestellt.

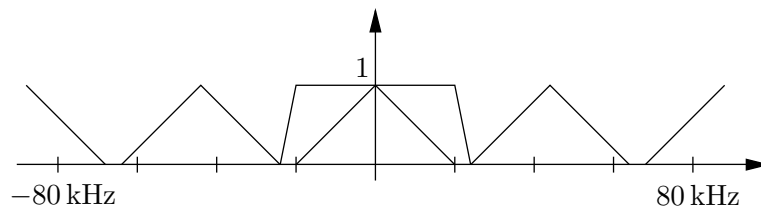


Abbildung L5: Spektrum.

Aufgabe 24: Unterabtastung und Nyquistband

Ein reelles Signal besitzt im Frequenzband von 101 bis 112 kHz Spektralanteile. Bilden folgende Abtastfrequenzen diesen Frequenzbereich in das Nyquistband ab?

- 1) 15 kHz 2) 20 kHz 3) 25 kHz 4) 30 kHz

Lösung

Durch Aufzeichnen der Spektren wird klar, dass nur bei $f_A = 25$ kHz der Frequenzbereich in das Nyquistband abgebildet wird.

Aufgabe 25: Signal nach Unterabtastung

Ein Bandpasssignal $y(t)$ mit der Mittenfrequenz f_0 und der Bandbreite B soll durch Unterabtastung demoduliert werden. Die Spektren sind im Folgenden jeweils im Bereich $-f_0 \leq f \leq f_0$ zu zeichnen.

- Das Signal $y(t)$ wird mit der Frequenz $f_A = \frac{4}{9}f_0$ abgetastet. Zeichnen Sie das Spektrum des abgetasteten Signals y_n . Welche Bedingung muss gelten, damit es zu keiner Überschneidung von Teilspektren kommt?
- Das abgetastete Signal y_n wird nun mit der Funktion $m_n = (-j)^n$ moduliert:

$$x_n = y_n \cdot m_n = y_n \cdot (-j)^n$$

Zeichnen Sie das Spektrum von x_n .

- Zum Schluss wird das Signal x_n mit einem idealen Tiefpass mit der Grenzfrequenz $\frac{f_A}{4}$ gefiltert. Dieser Tiefpass dient als Rekonstruktionsfilter. Zeichnen Sie das Spektrum von x_n nach der Filterung.

Lösung

- Mit Hilfe der Unterabtastung können geeignete Signale, die Frequenzanteile ab der halben Abtastfrequenz besitzen, korrekt abgetastet werden.

Die Abtastfrequenz beträgt nach Voraussetzung $\frac{4}{9}$ der Mittenfrequenz des Bandpasssignals.

$$f_A = \frac{4}{9}f_0$$

Die Mittenfrequenz beträgt also $\frac{9}{4}$ der Abtastfrequenz.

$$f_0 = \frac{9}{4}f_A = 2 \cdot f_A + \frac{1}{4}f_A$$

Hieraus folgt, dass die Mittenfrequenz auf die Frequenz $\frac{f_A}{4}$ ins Nyquistband gespiegelt wird. Um eine Überschneidung zu verhindern, muss deshalb die Bandbreite kleiner als die halbe Abtastfrequenz sein.

$$B < \frac{f_A}{2} = \frac{2}{9}f_0$$

- Das Spektrum des zeitdiskreten Signals x_n wird mit Hilfe der Definitionsgleichung für die zeitdiskrete Fourier-Transformation berechnet.

$$\begin{aligned} X_*(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n t_A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot (-j)^n \cdot e^{-j2\pi f n t_A} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-j2\pi f n t_A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot e^{-j2\pi \left(f + \frac{1}{4t_A}\right) n t_A} \\ &= Y_*\left(f + \frac{f_A}{4}\right) \end{aligned}$$

Das Spektrum wird also um

$$\frac{f_A}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}f_0 = \frac{1}{9}f_0$$

nach links geschoben.

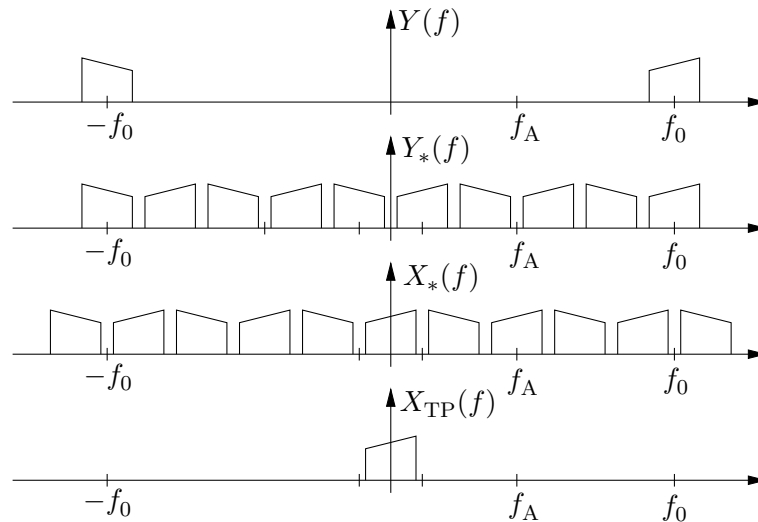


Abbildung L6: Spektrum des Signals im Originalzustand, nach Unterabtastung, nach Modulation und nach Tiefpassfilterung.

- c) Durch die zeitkontinuierliche Tiefpassfilterung werden alle Frequenzanteile außerhalb des Frequenzbandes $[-\frac{f_A}{4}, \frac{f_A}{4}]$ weggefiltert. Hierbei ist zu beachten, dass das entstehende zeitkontinuierliche Signal komplex ist.

Abbildung L6 zeigt die Ergebnisse der einzelnen Schritte.

Aufgabe 26: Änderung des Spektrums nach Unterabtastung

Ein Signal $y(t)$ wird mit der Frequenz $f_A = 1/t_A$ abgetastet. Anschließend wird jedoch nur jeder N -te Wert der Abtastwertefolge $y(n)$ weiterverarbeitet, d.h. die verarbeitete Folge besitzt die Abtastfrequenz $f_{A,2} = \frac{f_A}{N}$.

Untersuchen Sie, wie das Spektrum des langsam abgetasteten Signals mit dem des schnell abgetasteten Signals zusammenhängt.

Lösung

Aus der zeitkontinuierlichen Darstellung des abgetasteten Signals

$$y_*(t) = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_A)$$

folgt mit Hilfe der Fourier-Transformierten

$$Y_*(f) = Y(f) * f_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_A) = f_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(f - kf_A)$$

eine andere Darstellung

$$y_*(t) = f_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi kf_A t}$$

des abgetasteten Signals. Verringert sich die Abtastfrequenz auf

$$f_{A,2} = \frac{f_A}{N}$$

so wird das nun abgetastete Signal durch

$$y_{*,2}(t) = \frac{f_A}{N} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi \frac{k f_A}{N} t}$$

angegeben. Mit der Substitution $k = N \cdot l + m$ mit $m = 0 \dots N - 1$ folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} y_{*,2}(t) &= \frac{f_A}{N} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} y(t) \cdot e^{j2\pi \left(l f_A + \frac{m f_A}{N} \right) t} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m f_A}{N} t} \cdot f_A \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi l f_A \cdot t} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m f_A}{N} t} \cdot y_*(t) \end{aligned}$$

der Zusammenhang

$$Y_{*,2}(f) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} Y_* \left(f - m \cdot \frac{f_A}{N} \right)$$

beider Spektren. Es entsteht also $Y_{*,2}(f)$ durch Überlagerung verschobener Versionen von $Y_*(f)$.

Aufgabe 27: Rekonstruktionsfilter 2

Das Signal

$$y(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi f_2 t) \quad , \quad f_1 = 3 \text{ Hz} , \quad f_2 = 4 \text{ Hz}$$

werde mit der Anordnung in Abbildung 7 abgetastet und anschließend rekonstruiert.

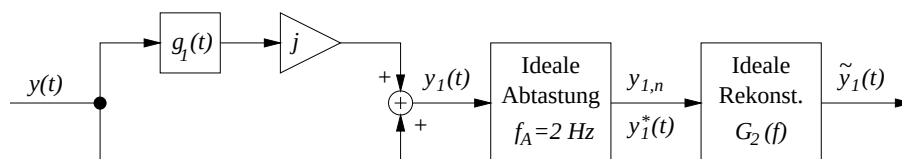


Abbildung 7: Abtastsystem.

Dabei durchläuft das Signal $y(t)$ ein LTI-System mit der Impulsantwort $g_1(t) = 1/(\pi t)$ und wird mit der imaginären Einheit j multipliziert. Das Resultat wird mit dem ursprünglichen Signal $y(t)$ überlagert. Das entstehende Signal $y_1(t)$ wird zunächst ideal mit der Abtastfrequenz $f_A = 2 \text{ Hz}$ abgetastet und dann mit einem zeitkontinuierlichen Rekonstruktionsfilter mit der Übertragungsfunktion

$$G_2(f) = \begin{cases} 1 & , |f| < 1,5 \text{ Hz} \\ 0 & , |f| \geq 1,5 \text{ Hz} \end{cases}$$

rekonstruiert.

- a) Wie heißt ein System mit der Impulsantwort $g_1(t)$? Geben Sie $G_1(f)$ •—○ $g_1(t)$ an!

- b) Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $y(t)$!
- c) Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $y_1(t)$!
- d) Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $y_1^*(t)$!
- e) Skizzieren Sie den Betrag des Spektrums von $\tilde{y}_1(t)$!

Lösung

- a) Ein System mit der Impulsantwort $g_1(t)$ nennt man Hilbert-Transformator. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G_1(f) = \begin{cases} -j & , f > 0 \\ 0 & , f = 0 \\ j & , f < 0 \end{cases} .$$

- b) – e) Die Spektren sind in Abbildung L7 dargestellt.

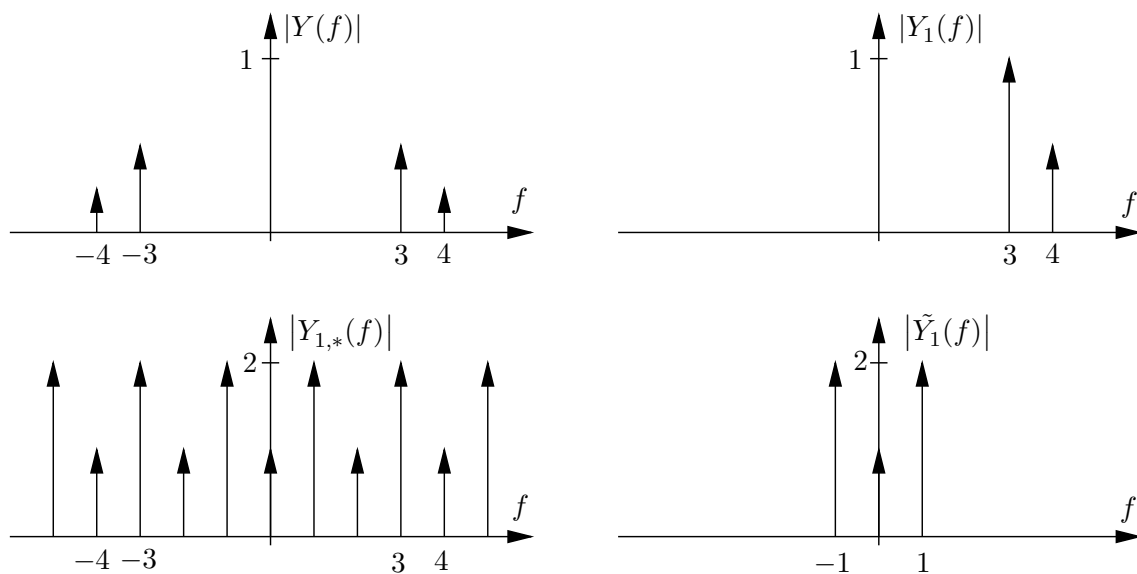


Abbildung L7: Spektren des Abtastsystems

Aufgabe 28: DFT von Zeitfolgen

Berechnen Sie jeweils zur Folge y_n die diskrete Fourier-Transformierte (DFT) Y_k für die Indizes $k = 0, \dots, N-1$.

- a) $y_n = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- b) $y_n = (2, 0, 3, 0)$
- c) $y_n = (1, 2, 3, 4)$
- d) $y_n = e^{j2\pi\alpha n/N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, N fest
- e) $y_n = \cos(2\pi\alpha n/N)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, N fest
- f) $y_n = 1$, N fest

Lösung

- a) Mit der Folge $y_n = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte zu

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^7 y_n \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{8}} = 2 + e^{-j\pi k \frac{4}{8}} + e^{-j\pi k \frac{12}{8}} \\ &= 2 + e^{-j\pi k \frac{4}{8}} + e^{+j\pi k \frac{4}{8}} = 2 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$Y_k = (4, 2, 0, 2, 4, 2, 0, 2).$$

- b) Mit der Folge $y_n = (2, 0, 3, 0)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte zu:

$$Y_k = 2 + 3 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{4}} = 2 + 3 \cdot e^{j\pi k} = 2 + 3 \cdot (-1)^k.$$

Hieraus folgt

$$Y_k = (5, -1, 5, -1).$$

- c) Mit der Folge $y_n = (1, 2, 3, 4)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte zu:

$$\begin{aligned} Y_k &= 1 + 2 \cdot e^{-j2\pi k \frac{1}{4}} + 3 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{4}} + 4 \cdot e^{-j2\pi k \frac{3}{4}} \\ &= 1 + 2 \cdot e^{-j2\pi k \frac{1}{4}} + 3 \cdot e^{-j2\pi k \frac{2}{4}} + (2 + 2) \cdot e^{j2\pi k \frac{1}{4}} \\ &= 1 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 3 \cdot (-1)^k + 2 \cdot j^k. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$Y_k = (10, -2 + 2j, -2, -2 - 2j).$$

- d) Mit der Folge $y_n = e^{j2\pi\alpha \frac{n}{N}}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$ wird die diskrete Fourier-Transformierte berechnet:

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(\alpha-k) \frac{n}{N}} \\ &= \left\{ \text{mit der geometrischen Reihe: } \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}, q \neq 1 \right\} \\ &= \frac{1 - e^{j2\pi(\alpha-k)}}{1 - e^{j2\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)}} = \frac{e^{j\pi(\alpha-k)}}{e^{j\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)}} \cdot \frac{e^{-j\pi(\alpha-k)} - e^{j\pi(\alpha-k)}}{e^{-j\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)} - e^{j\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)}} \\ &= e^{j\pi(\alpha-k)(1-\frac{1}{N})} \cdot \frac{e^{j\pi(\alpha-k)} - e^{-j\pi(\alpha-k)}}{e^{j\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)} - e^{-j\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)}} \\ &= e^{j\pi \frac{1}{N}(\alpha-k)(N-1)} \cdot \frac{\sin(\pi(\alpha-k))}{\sin(\frac{\pi}{N}(\alpha-k))}. \end{aligned}$$

Der Zähler verschwindet für alle k , während der Nenner nur für

$$k = \alpha + mN, m \in \mathbb{Z}$$

verschwindet. Dies ist auch genau die Stelle für welche die Formel der geometrischen Reihe nicht anwendbar ist. In diesem Fall $k = \alpha + Nm$ lautet die DFT:

$$\begin{aligned} Y_{\alpha+mN} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(\alpha-(\alpha+mN))\frac{n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi mn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N . \end{aligned}$$

Damit folgt für die DFT:

$$Y_k = \begin{cases} N & \text{für } k = \alpha + m \cdot N, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Das Signal besitzt nur eine Spektrallinie bei $k = \alpha + m_0 \cdot N$, wobei m_0 so gewählt wird, dass $0 \leq k \leq N - 1$ gilt (Periodizität).

- e) Mit der Folge $y_n = \cos\left(2\pi\alpha\frac{n}{N}\right)$ ergibt sich die diskrete Fourier-Transformierte:

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(2\pi\alpha\frac{n}{N}\right) \cdot e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi\alpha\frac{n}{N}} + e^{-j2\pi\alpha\frac{n}{N}} \right) \cdot e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{n}{N}(\alpha-k)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{n}{N}(\alpha+k)} . \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der 2π -Periodizität der trigonometrischen Funktionen addiert man ein ganzzahliges Vielfaches von 2π im Exponenten, d.h. mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Wie im Aufgabenteil zuvor sind dann $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ so zu wählen, dass $0 \leq k \leq N - 1$ gilt (Periodizität).

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{n}{N}(\alpha-k)-m_1n\right)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\left(\frac{n}{N}(\alpha+k)-(m_2+1)n\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{n}{N}(\alpha-k-m_1N)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{n}{N}(\alpha+k-(m_2+1)N)} . \end{aligned}$$

Die weitere Vereinfachung der Ausdrücke erfolgt gemäß dem Vorgehen in der vorherigen Teilaufgabe. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{N}{2} \delta_{\alpha-k-m_1N} + \frac{N}{2} \delta_{k+\alpha-(m_2+1)N} \\ &= \frac{N}{2} \delta_{k-\alpha+m_1N} + \frac{N}{2} \delta_{k-N+\alpha-m_2N} \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2} & k = \alpha - m_1N \\ \frac{N}{2} & k = N - \alpha + m_2N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \end{aligned}$$

- f) Mit $\alpha = 0$ ergibt sich aus der Zeitfolge aus Teilaufgabe d) die Zeitfolge

$$y_n = 1 .$$

Hieraus folgt

$$Y_k = N \cdot \delta(k) .$$

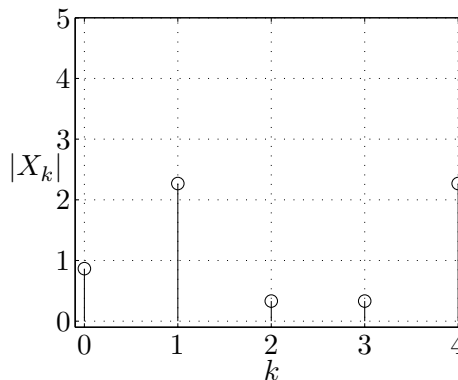
Aufgabe 29: Leckeffekt bei der DFT

Verwenden Sie die Formel

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-j 2\pi k n / N) = \begin{cases} N & , k = l \cdot N, l \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

zur Berechnung der 6-Punkt-DFT für die Zeitwerte $x_n = \sin(2\pi f_0 n t_A)$, wobei für die Abtastzeit gilt: $t_A = \frac{1}{6f_0}$. Skizzieren Sie den Betrag der erhaltenen DFT im Bereich $0 \leq k \leq 5$.

Würde man eine DFT der Länge 5 benutzen, so ergäbe sich das folgende Betragsspektrum der DFT: Erklären Sie die Unterschiede der beiden Spektren (DFT der Länge 5 und 6).



Lösung

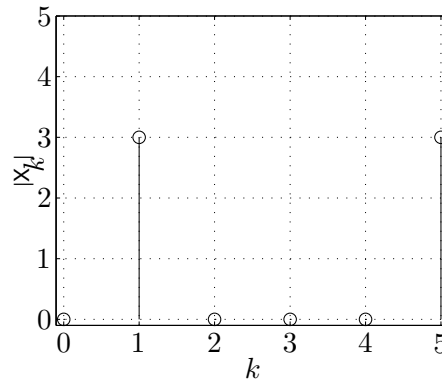
Für die abgetasteten Signalwerte folgt $x_n = \sin(\pi n / 3)$ und somit:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^5 \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) e^{-j \pi \frac{kn}{3}} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^5 \left(e^{j \frac{\pi n}{3}} - e^{-j \frac{\pi n}{3}} \right) e^{-j \pi \frac{kn}{3}} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^5 \left[\exp\left(-j \frac{\pi(k-1)}{3} n\right) - \exp\left(-j \frac{\pi(k+1)}{3} n\right) \right] \\ &= \frac{1}{2j} \underbrace{\sum_{n=0}^5 \exp\left(-j 2 \frac{\pi(k-1)}{6} n\right)}_{S1} - \frac{1}{2j} \underbrace{\sum_{n=0}^5 \exp\left(-j 2 \frac{\pi(k+1)}{6} n\right)}_{S2} \end{aligned}$$

Hier sind nun je nach Wert der Variable k im Bereich $0 \leq k \leq 5$ drei Fälle zu unterscheiden:

1. $k = 1$: Es folgt $S1 = 6, S2 = 0$ und somit $X_1 = -3j$.
2. $k = 5$: Es folgt $S1 = 0, S2 = 6$ und somit $X_5 = 3j$.
3. $k = 0, 2, 3, 4$: Es folgt $S1 = S2 = 0$ und somit $X_k = 0$.

Erklärung: Wegen $6f_0 t_A = 1$ entsteht im ersten Aufgabenteil kein Leckeffekt, da die Schwingfrequenz im Raster der Abtastfrequenz liegt. Bei einer 5-Punkte DFT folgt $f_0 t_A 5 = 5/6 = 1 - 1/6$ und somit, vgl. Vorlesung, $a \neq 0$, was zu einem Leckeffekt führt. Die „Peaks“, die eigentlich auf der Schwingfrequenz liegen, verteilen sich auf die benachbarten Frequenzen.



Aufgabe 30: Auflösung im Frequenzbereich

Bei Wolkenkratzern müssen Gebäuderesonanzen im Bereich von 0,8 Hz bis 1,0 Hz vermieden werden, da sonst Fenster zu Bruch gehen können. Deshalb ist es für Gebäudetechniker wichtig, die exakten Resonanzfrequenzen zu kennen. Dazu werden am Gebäude Aufnehmer angebracht, deren Signale digital ausgewertet werden. Nun wird sofort nach der A/D-Wandlung eine FFT durchgeführt. Wieviel Punkte $N = 2^n$ muss die FFT bei der Abtastfrequenz $f_A = 5,4$ Hz umfassen, damit die Frequenzauflösung feiner als 0,001 Hz ist? Wie lange muss das Signal dabei beobachtet werden?

Lösung

Aus der Frequenzauflösung

$$\Delta f = \frac{1}{t_A N} = \frac{f_A}{N}$$

erhält man die Anzahl

$$N = \frac{f_A}{\Delta f} = \frac{5,4 \text{ Hz}}{0,001 \text{ Hz}} = 5400$$

der abzutastenden Punkte. Zur Spektralanalyse mit Hilfe einer FFT muss die Anzahl der Punkte eine Zweierpotenz sein. Ist die Anzahl der Punkte keine Zweierpotenz und man möchte eine bestimmte Frequenzauflösung nicht unterschreiten, so nimmt man die nächst höhere Zweierpotenz:

$$N_{\text{FFT}} = 8192.$$

Hieraus ergibt sich die Beobachtungszeit zu

$$N_{\text{FFT}} \cdot t_A = \frac{N_{\text{FFT}}}{f_A} = \frac{8192}{5,4 \text{ Hz}} = 1517 \text{ s} = 25 \text{ min } 17 \text{ s}.$$

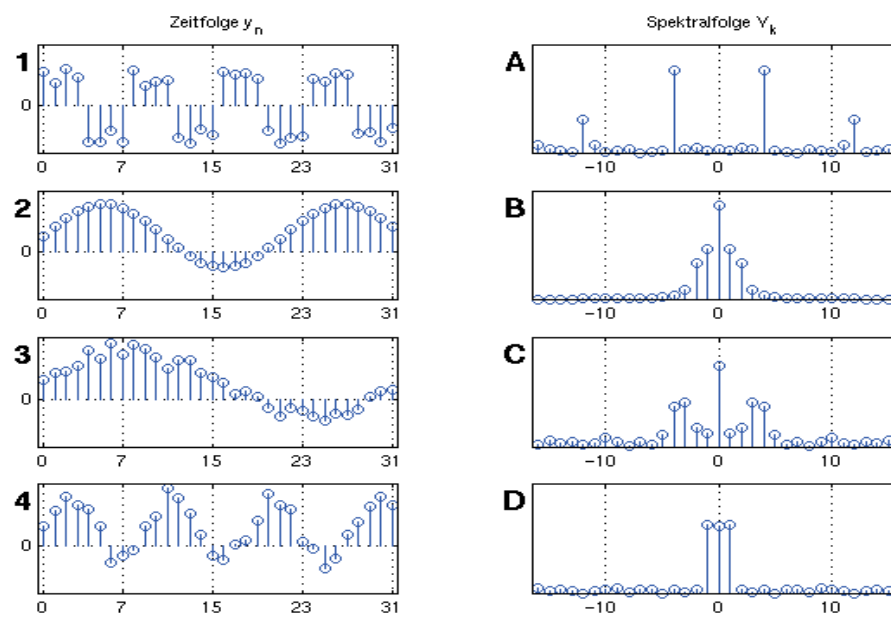
6. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 19.01.2021 bis 02.02.2021

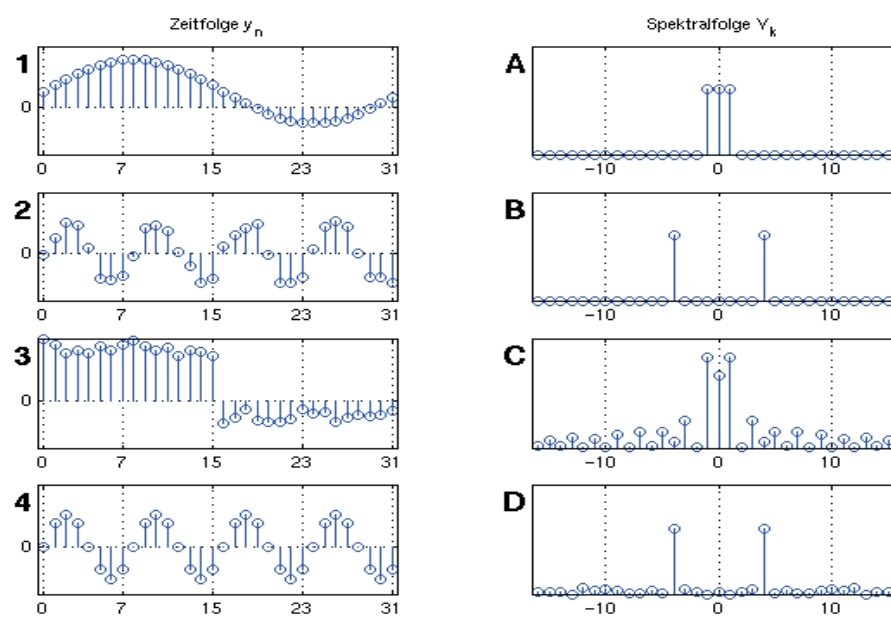
Aufgabe 31: DFT – Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Zeitfolgen die richtigen Spektralfolgen zu.

a)



b)



Lösung

- a) 1-A; 2-B; 3-D; 4-C
b) 1-A; 2-D; 3-C; 4-B

Aufgabe 32: Differenzengleichung

Ein zeitdiskretes System S wird durch die Differenzengleichung

$$y_n - 2^n \cdot y_{n+1} + 3 \cdot y_{n+2}^2 = 4 \cdot u_n - 2 \cdot u_{n+1}$$

beschrieben. Begründen Sie im Folgenden jeweils Ihre Aussagen!

- a) Ist das System S linear?
b) Ist das System S zeitinvariant?
c) Ist das System S kausal?

Lösung

- a) Das System S ist aufgrund des Exponenten im Term y_{n+2}^2 nicht linear.
b) Das System S ist wegen des zeitabhängigen Koeffizienten 2^n vor y_{n+1} zeitvariant.
c) Mittels einer Indexverschiebung erhält man

$$y_{n-2} - 2^n \cdot y_{n-1} + 3 \cdot y_n^2 = 4 \cdot u_{n-2} - 2 \cdot u_{n-1}.$$

Man erkennt, dass das Ausgangssignal y_n nur von vergangenen Ein- und Ausgangssignalen abhängt. Das System S ist somit kausal.

Aufgabe 33: z-Transformation cosh

Geben Sie die z-Transformierte und deren Konvergenzgebiet der Folge

$$h_n = \cosh(\alpha n) \sigma_n$$

an und skizzieren Sie das Konvergenzgebiet in der z-Ebene.

Lösung

Man rechnet

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \cosh(\alpha n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}{2} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\alpha} / z)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 1 / (e^{\alpha} z)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{\alpha} / z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1 / (e^{\alpha} z)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - 1 / e^{\alpha}} = \frac{z(z - 1 / e^{\alpha}) + z(z - e^{\alpha})}{2(z - e^{\alpha})(z - 1 / e^{\alpha})} = \frac{2z^2 - z(e^{\alpha} + 1 / e^{\alpha})}{2(z - e^{\alpha})(z - 1 / e^{\alpha})} \end{aligned}$$

$$= \frac{2z^2 - 2z(\cosh(\alpha))}{2(z^2 - z(e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1)} = \frac{z(z - \cosh(\alpha))}{z^2 - 2z \cosh(\alpha) + 1}$$

Dies gilt in dem Bereich $\{|z| > e^\alpha\} \cap \{|z| > 1/e^\alpha\} = \{|z| > \max\{e^\alpha, e^{-\alpha}\}\} = \{|z| > e^{|\alpha|}\}$. Abbildung L8 zeigt das Konvergenzgebiet.

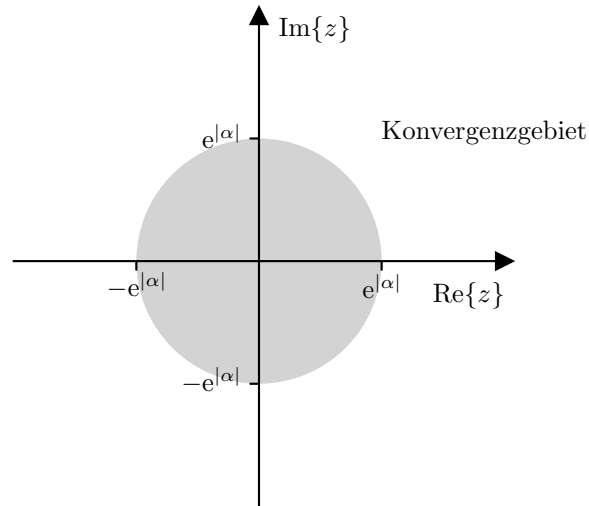


Abbildung L8: Konvergenzgebiet.

Aufgabe 34: Inverse z-Transformation

Berechnen Sie alle zu $X(z) = \frac{2z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}$ gehörenden Zeitfolgen und skizzieren Sie die Konvergenzgebiete.

Lösung

Durch Partialbruchzerlegung erhält man $X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-1}$.

Konvergenzgebiet $|z| > 2$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &\quad \circ \\ x_n &= (2^n + 1)\sigma_n \end{aligned}$$

Konvergenzgebiet $1 < |z| < 2$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + z \frac{1}{z-2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{z}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{z}{2} \sum_{k=-\infty}^0 2^k z^{-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{k'=-\infty}^{-1} 2^{k'+1} z^{-k'}
\end{aligned}$$



$$x_n = \sigma_n - 2^n \sigma_{-n-1}$$

Konvergenzgebiet $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
X(z) &= -z \frac{1}{1-z} - \frac{z}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= -z \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= -z \sum_{k=-\infty}^0 z^{-k} - \frac{z}{2} \sum_{k=-\infty}^0 2^k z^{-k} \\
&= - \sum_{k'=-\infty}^{-1} z^{-k'} - \sum_{k'=-\infty}^{-1} 2^{k'} z^{-k'}
\end{aligned}$$



$$x_n = (-1 - 2^n) \sigma_{-n-1}$$

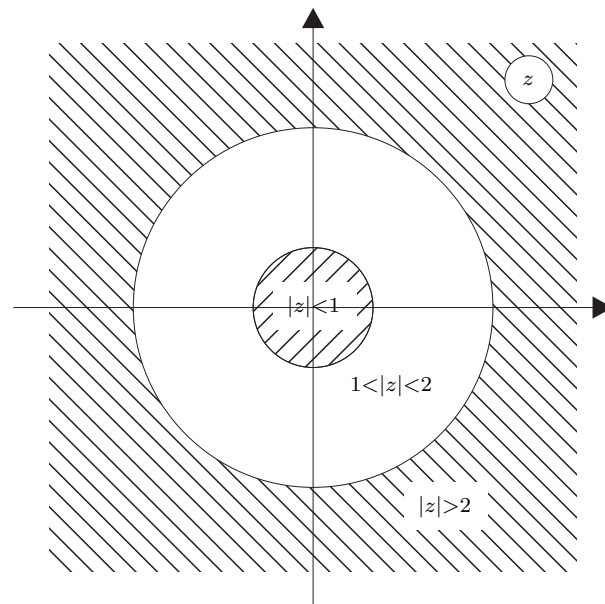


Abbildung L9: Konvergenzgebiete

Aufgabe 35: Inverse z-Transformation mittels dem Residuensatz

Berechnen Sie die zu der z-Transformierten

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 5}$$

gehörende **kausale** Zeitfolge mittels des **Residuensatzes**. Berechnen Sie anschließend die Werte für x_0 , x_1 , x_2 und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Polynomdivision bzw. Ausmultiplizieren mittels dem Reihenansatz.

Lösung

Die Pole von $X(z)$ sind gegeben durch $z_{\infty,1/2} = 1 \pm 2j$. Für die Folgenglieder gilt die Berechnungsformel

$$x_n = \sum_i \text{Res}\{X(z)z^{n-1}, z_{\infty,i}\}, n \geq 0.$$

Ist $n \geq 1$ so hat $X(z)z^{n-1}$ die gleichen Pole wie $X(z)$ und es folgt:

$$\begin{aligned} x_n &= \text{Res}\{X(z)z^{n-1}, 1+2j\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1}, 1-2j\} \\ &= \left. \frac{(z^2 - z)z^{n-1}}{(z - (1-2j))} \right|_{z=1+2j} + \left. \frac{(z^2 - z)z^{n-1}}{(z - (1+2j))} \right|_{z=1-2j} \\ &= \frac{(-4+2j)(1+2j)^{n-1} + (4+2j)(1-2j)^{n-1}}{4j} \\ &= \frac{1}{2} ((1+2j)^n + (1-2j)^n) \end{aligned}$$

Für den Fall $n = 0$ ist 0 ebenfalls ein Pol und man erhält

$$\begin{aligned} x_0 &= \left. \frac{(z^2 - z)}{z(z - (1-2j))} \right|_{z=1+2j} + \left. \frac{(z^2 - z)}{z(z - (1+2j))} \right|_{z=1-2j} + \left. \frac{(z^2 - z)}{(z^2 - 2z + 5)} \right|_{z=0} \\ &= \dots = 1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgen die Werte

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} ((1+2j)^2 + (1-2j)^2) = -3.$$

Andererseits folgt aus der Gleichung

$$\frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 5} \stackrel{!}{=} x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \dots$$

durch Auflösen

$$1 - z^{-1} = (x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \dots) (1 - 2z^{-1} + 5z^{-2})$$

und es ergeben sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 \\ -1 &= -2x_0 + x_1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ 0 &= 5x_0 - 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 0 - 5 + 2 = -3. \end{aligned}$$

7. Übung

Vorgeschlagener Bearbeitungszeitraum: 02.02.2021 bis 16.02.2021

Weitere Hinweise:

Die Klausur zu Signale und Systeme gliedert sich üblicherweise in vier Aufgaben. Nach Abschluss dieser Übung sollten Sie in der Lage sein, Aufgabe 4 („Zeitdiskrete Systeme“) zu bearbeiten. Eine Sammlung an Altklausuren finden Sie im ILIAS-Kurs.

Aufgabe 36: Stabilität und Minimalphasigkeit

- a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist das zeitdiskrete System

$$G_1(z) = \frac{1}{z^2 + 0,25z + c}$$

stabil?

- b) Für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ sowie $b \neq c$ ist das zeitdiskrete System

$$G_2(z) = \frac{z^2 + 0,25z + b}{z^2 + 0,25z + c}$$

stabil und minimalphasig?

Im Folgenden wird mit der Übertragungsfunktion $G_1(z)$ mit

$$c = -\frac{3}{64}$$

gerechnet.

- c) Bestimmen Sie die kausale Impulsantwort $g_{1,n}$.

Lösung

- a) Bei einem stabilen, zeitdiskreten System müssen die Pole der Übertragungsfunktion innerhalb des Einheitskreises liegen. Es gilt:

$$z_{\infty} = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} - c}.$$

Durch Fallunterscheidung für die Wurzel erhält man:

i. $c \leq \frac{1}{64} \Rightarrow z_{\infty} \in \mathbb{R}$

$$|z_{\infty}| < 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1}{64} - c} \right| < 1 \Leftrightarrow c > -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} < c \leq \frac{1}{64}$$

$$\text{ii. } c > \frac{1}{64} \Rightarrow z_\infty \in \mathbb{C}$$

$$|z_\infty| = -\frac{1}{8} \pm j \sqrt{c - \frac{1}{64}}$$

$$|z_\infty| < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{64} + c - \frac{1}{64}} < 1 \Leftrightarrow c < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} < c < 1$$

Fasst man beide Ergebnisse zusammen, so erhält man:

$$-\frac{3}{4} < c < 1.$$

b) Für die Stabilität gilt hier der gleiche Zusammenhang wie bei Teilaufgabe **a)**:

$$-\frac{3}{4} < c < 1.$$

Bei einem minimalphasigen System müssen die Nullstellen der Übertragungsfunktion innerhalb oder auf dem Einheitskreis liegen. Hier wird die entsprechende Rechnung wie bei Teilaufgabe **a)** durchgeführt:

$$-\frac{3}{4} \leq b \leq 1.$$

c) Mit $c = -\frac{3}{64}$ folgen die beiden Polstellen $z_\infty = -\frac{3}{8}$ und $z_\infty = \frac{1}{8}$. Durch Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$G_1(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{8})(z + \frac{3}{8})} = \frac{A}{z - \frac{1}{8}} + \frac{B}{z + \frac{3}{8}}$$

mit

$$A = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{3}{8}} = 2 \quad B = \frac{1}{-\frac{3}{8} - \frac{1}{8}} = -2$$

ergibt sich mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(z) = \frac{2}{z - \frac{1}{8}} - \frac{2}{z + \frac{3}{8}}$$

die Impulsantwort über Transformationstabellen

$$g_{1,n} = 2 \left(\left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} - \left(-\frac{3}{8} \right)^{n-1} \right) \sigma_{n-1}.$$

Aufgabe 37: Zeitdiskretes System- Blockschaltdiagramm

Ein reelles, kausales, zeitdiskretes System S wird durch das Blockschaltdiagramm in Abbildung 8 beschrieben.

a) Geben Sie eine Differenzengleichung an, die das System beschreibt!

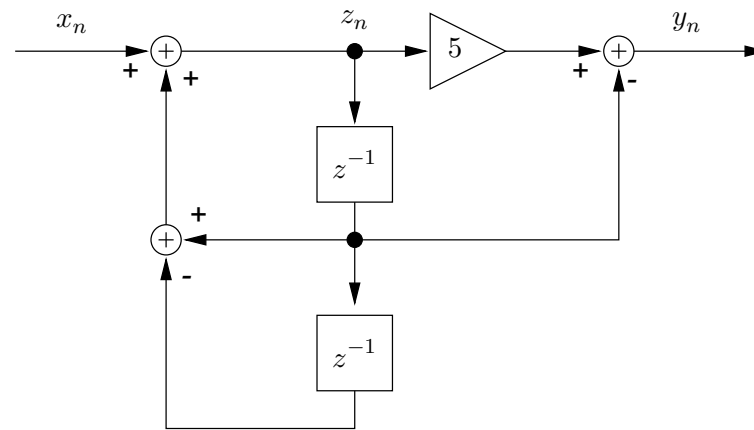


Abbildung 8: Zeitdiskretes System.

- b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des zeitdiskreten Systems S ! Geben Sie diese als Quotient zweier Polynome in z an!
- c) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$.
- d) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm der Übertragungsfunktion $G(z)$.
- e) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Aussage!
- f) Ist das System minimalphasig? Begründen Sie Ihre Aussage!

Das System wird mit dem Signal

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma_n$$

angeregt.

- g) Wie lautet das Ausgangssignal y_n des Systems S ? Geben Sie das Ergebnis mit reellen Zahlen an.

Lösung

- a) Führt man oberhalb des oberen Verzögerungsgliedes die Zustandsgröße z_n ein, so erhält man die beiden Differenzgleichungen

$$z_n = x_n + z_{n-1} - z_{n-2} \quad \text{und} \quad y_n = 5z_n - z_{n-1}$$

bzw. deren z-Transformierten

$$Z(z)(1 - z^{-1} + z^{-2}) = X(z) \quad \text{und} \quad Y(z) = Z(z)(5 - z^{-1}).$$

Setzt man $Z(z)$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so erhält man die Beziehung zwischen $Y(z)$ und $X(z)$.

$$Y(z) = \frac{5 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} X(z) \tag{L4}$$

Durch Rücktransformation erhält man die Differenzgleichung

$$y_n - y_{n-1} + y_{n-2} = 5x_n - x_{n-1}.$$

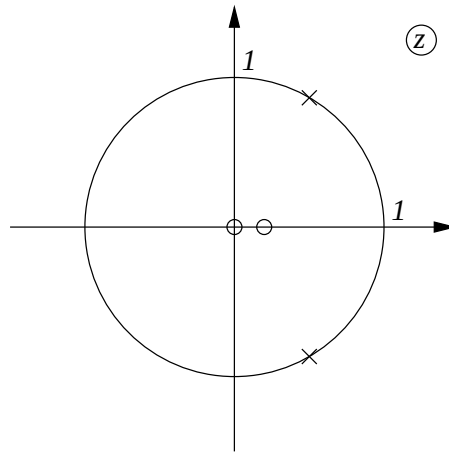


Abbildung L10: Pol-Nullstellen-Diagramm.

- b) Aus (L4) erhält man sofort die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{5z^2 - z}{z^2 - z + 1}$$

des Systems S .

- c) Die Pol- und Nullstellen berechnet man aus dem Zähler- bzw. Nennerpolynom.

$$z_{0,1} = 0 \quad z_{0,2} = \frac{1}{5} \quad z_{\infty} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- d) Hieraus ergibt sich das Pol-Nullstellen-Diagramm in Abbildung L10.

- e) Das System ist nicht stabil, da die Pole nicht innerhalb des Einheitskreises liegen.

- f) Das System ist nicht minimalphasig, da die Nullstellen zwar innerhalb des Einheitskreises liegen, das System allerdings nicht stabil ist. Laut Definition kann nur ein stabiles System Minimalphasensystem sein.

- g) Das Eingangssignal

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma_n \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

erzeugt das Ausgangssignal

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{5z^2 - z}{z^2 - z + 1} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} = z \left[\frac{A}{z + \frac{1}{2}} + \frac{Bz + C}{z^2 - z + 1} \right].$$

Dabei erhält man A durch:

$$A = \frac{5z^2 - z}{z^2 - z + 1} \bigg|_{z = -\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = 1.$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich:

$$z^2 - z + 1 + \left(z + \frac{1}{2}\right)(Bz + C) = (1 + B)z^2 + \left(-1 + \frac{B}{2} + C\right)z + \left(1 + \frac{C}{2}\right)$$

$$\stackrel{!}{=} 5z^2 - z.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $B = 4$ und $C = -2$. Aus der z-Transformierten

$$Y(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{4z(z - \frac{1}{2})}{z^2 - z + 1}$$

des Ausgangssignals y_n erhält man sofort das Ausgangssignal

$$y_n = \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n + 4 \cos \left(\frac{\pi}{3} n \right) \right] \cdot \sigma_n.$$

Aufgabe 38: Zeitdiskrete Darstellung aus Übertragungsfunktion

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 1}{0,1 \cdot s + 1}$$

eines LTI-Systems. Berechnen Sie die diskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ und deren Pole und Nullstellen aus der kontinuierlichen Übertragungsfunktion mit Hilfe folgender Transformationsvorschriften:

- a) Rechteckregel vorwärts,
- b) Rechteckregel rückwärts,
- c) Trapezregel,
- d) Pol-Nullstellenübertragung bei stationärer Genauigkeit.

Die Abtastzeit beträgt $t_A = 0,25$.

Lösung

- a) Rechteckregel vorwärts:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s + 1}{0,1 \cdot s + 1} = 10 \cdot \frac{s + 1}{s + 10} \\ G_s(z) &= G(s)|_{s=\frac{z-1}{t_A}} = 10 \cdot \frac{\frac{z-1}{t_A} + 1}{\frac{z-1}{t_A} + 10} = 10 \cdot \frac{z - 1 + t_A}{z - 1 + 10t_A} \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei

$$z_0 = 1 - t_A = 0,75$$

Die Polstelle liegt bei

$$z_\infty = 1 - 10t_A = -1,5$$

Das System ist also instabil, da $|z_\infty| \geq 1$.

b) Rechteckregel rückwärts:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{s+1}{0,1 \cdot s+1} = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10} \\
 G_s(z) &= G(s)|_{s=\frac{z-1}{zt_A}} = 10 \cdot \frac{\frac{z-1}{zt_A}+1}{\frac{z-1}{zt_A}+10} \\
 &= 10 \cdot \frac{z-1+zt_A}{z-1+10zt_A} = 10 \cdot \frac{(1+t_A)z-1}{(1+10t_A)z-1}
 \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei

$$z_0 = \frac{1}{1+t_A} = \frac{4}{5}.$$

Die Polstelle liegt bei

$$z_\infty = \frac{1}{1+10t_A} = \frac{2}{7}.$$

Das System ist also stabil, da $|z_\infty| < 1$.

c) Trapezregel:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{s+1}{0,1 \cdot s+1} = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10} \\
 G_s(z) &= G(s)|_{s=\frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}} = 10 \cdot \frac{\frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}+10} \\
 &= 10 \cdot \frac{2z-2+t_A z+t_A}{2z-2+10t_A z+10t_A} = 10 \cdot \frac{(2+t_A)z-(2-t_A)}{(2+10t_A)z-(2-10t_A)}
 \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei

$$z_0 = \frac{2-t_A}{2+t_A} = \frac{1,75}{2,25} = \frac{7}{9}.$$

Die Polstelle liegt bei

$$z_\infty = \frac{2-10t_A}{2+10t_A} = \frac{-0,5}{4,5} = -\frac{1}{9}.$$

Das System ist also stabil, da $|z_\infty| < 1$.

d) Pol- Nullstellenübertragung:

$$G(s) = \frac{s+1}{0,1 \cdot s+1} = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10}$$

Die Nullstelle $s_0 = -1$ wird auf

$$z_0 = e^{-1 \cdot t_A} = e^{-t_A} \approx 0,779$$

übertragen. Die Polstelle $s_\infty = -10$ wird auf

$$z_\infty = e^{-10 \cdot t_A} \approx 0,082$$

übertragen. Hieraus ergibt sich die zeitdiskrete Übertragungsfunktion

$$G_s(z) = K \cdot \frac{z - 0,779}{z - 0,082}.$$

Den unbekannten Verstärkungsfaktor K erhält man aus der Randbedingung der stationären Genauigkeit:

$$\begin{aligned} G(s=0) &= 10 \cdot \frac{0+1}{0+10} = 1 \\ G_s(z=1) &= K \cdot \frac{1-0,779}{1-0,082} = 1 \\ K &= \frac{1-0,082}{1-0,779} = 4,15 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die diskrete Übertragungsfunktion zu

$$G_s(z) = 4,15 \cdot \frac{z - 0,779}{z - 0,082}.$$

Aufgabe 39: Zeitdiskretes LTI-System

Gegeben sei das in Abbildung 9 gezeigte zeitdiskrete LTI-System.

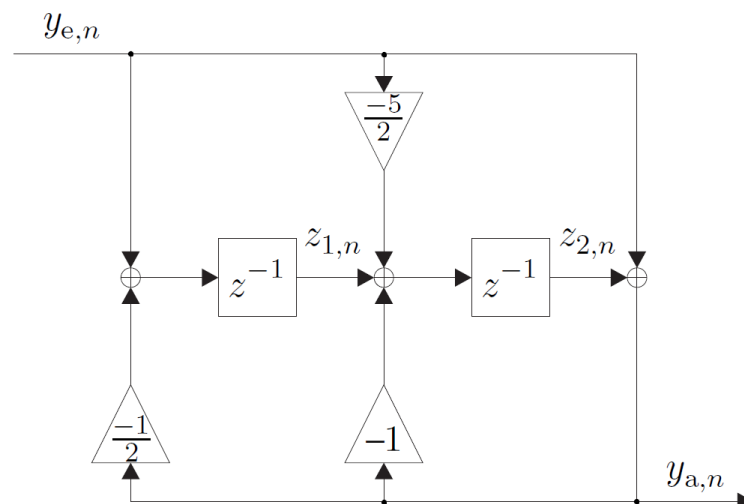


Abbildung 9: Zeitdiskretes System

- Berechnen Sie die Zustandsraumdarstellung des Systems mit den Zustandsgrößen $z_{1,n}$ und $z_{2,n}$!
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems!
- Stellen Sie das System durch seine Differenzengleichung dar!
- Untersuchen Sie das System auf Stabilität!

Lösung

a) Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}
 y_{a,n} &= z_{2,n} + y_{e,n} \\
 z_{1,n+1} &= y_{e,n} - \frac{1}{2}(z_{2,n} + y_{e,n}) \\
 &= -\frac{1}{2}z_{2,n} + \frac{1}{2}y_{e,n} \\
 z_{2,n+1} &= z_{1,n} - \frac{5}{2}y_{e,n} - z_{2,n} - y_{e,n} \\
 &= z_{1,n} - z_{2,n} - \frac{7}{2}y_{e,n} \\
 \mathbf{z}_{n+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} y_{e,n}
 \end{aligned} \tag{L5}$$

$$y_{a,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{z}_n + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} y_{e,n} \tag{L6}$$

b) Gesucht: Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{y_a(z)}{y_e(z)} .$$

Aus der Zustandsraumdarstellung (L5) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 z\mathbf{Z}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{Z}(z) + \mathbf{B}y_e(z) \\
 \Leftrightarrow [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{Z}(z) &= \mathbf{B}y_e(z) \\
 \Leftrightarrow \mathbf{Z}(z) &= [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}y_e .
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (L5) erhält man

$$\begin{aligned}
 y_a(z) &= \mathbf{C}\mathbf{Z}(z) + \mathbf{D}y_e(z) \\
 \Leftrightarrow y_a(z) &= \underbrace{[\mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]}_{G(z)} y_e(z) .
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte für diese Aufgabe führt zu

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left[z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & \frac{1}{2} \\ -1 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{z(z+1) + 1/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{z(z+1) + 1/2} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}z + z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 + z + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}{z^2 + z + \frac{1}{2}} .
 \end{aligned}$$

c) Die Differenzengleichung ergibt sich aus:

$$\frac{y_a(z)}{y_e(z)} = \frac{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}{z^2 + z + \frac{1}{2}}$$

$$y_a(z) \left(z^2 + z + \frac{1}{2} \right) = y_e(z) \left(z^2 - \frac{5}{2}z + 1 \right)$$

$$\bullet$$

$$\circ$$

$$y_{a,n+2} + y_{a,n+1} + \frac{1}{2}y_{a,n} = y_{e,n+2} - \frac{5}{2}y_{e,n+1} + y_{e,n}$$

$$y_{a,k} + y_{a,k-1} + \frac{1}{2}y_{a,k-2} = y_{e,k} - \frac{5}{2}y_{e,k-1} + y_{e,k-2}$$

$$y_{a,k} = -y_{a,k-1} - \frac{1}{2}y_{a,k-2} + y_{e,k} - \frac{5}{2}y_{e,k-1} + y_{e,k-2} \cdot$$

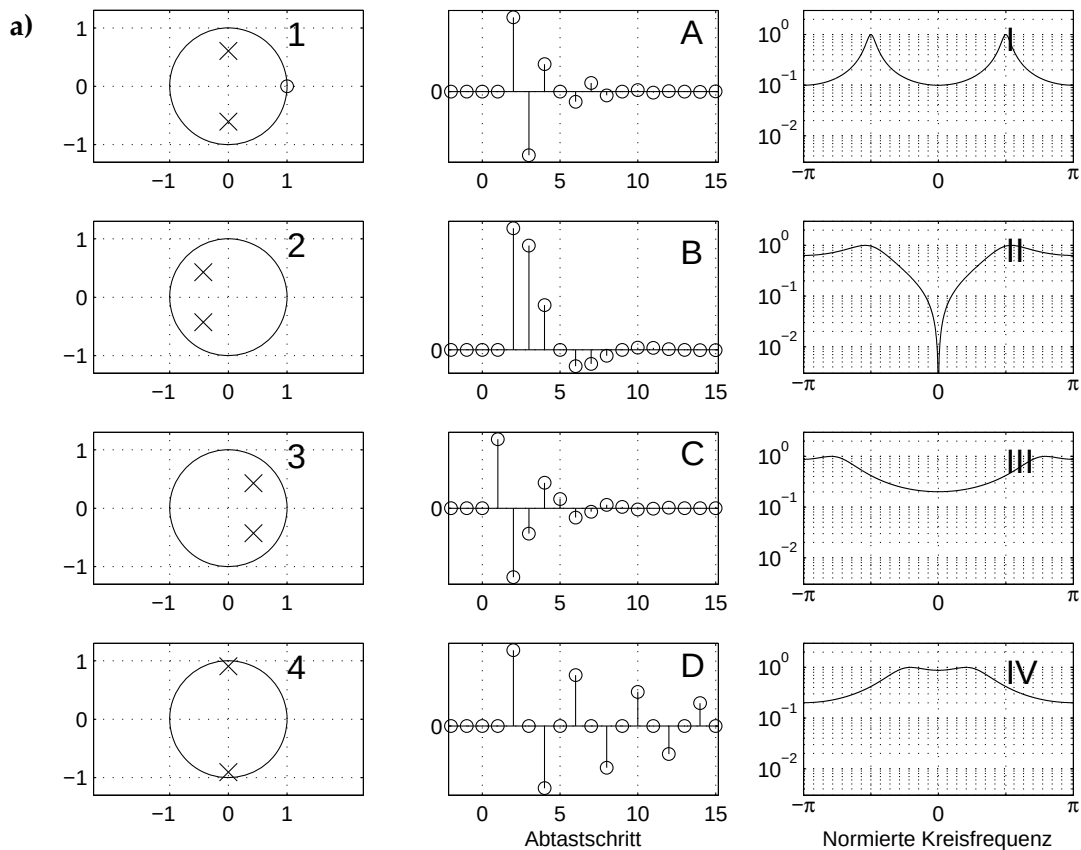
d) Stabilität:

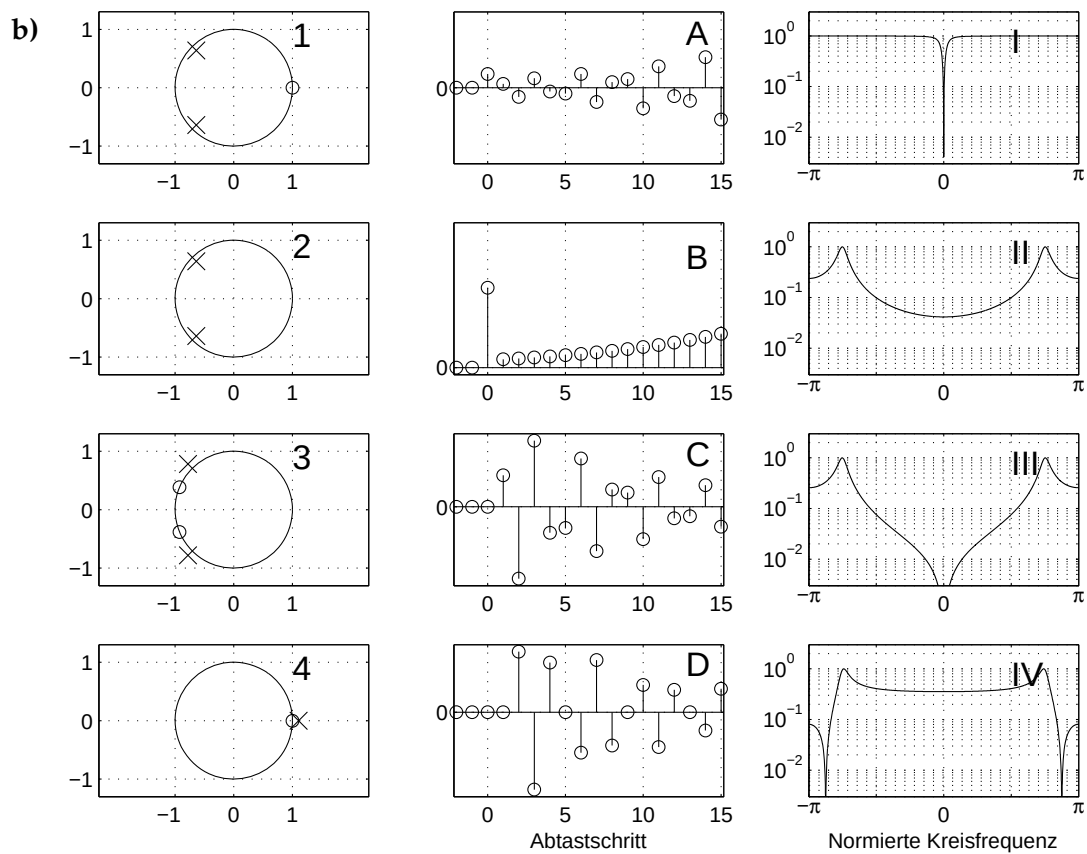
$$z_{\infty 1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{1}{2}$$

$$|z_{\infty 1,2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \text{stabil}$$

Aufgabe 40: Zeitdiskrete Systeme – Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Pol-/Nullstellen-Diagrammen die richtigen **Impulsantworten** und **Amplitudengänge** zu.





Lösung

- a) 1-C-II
2-A-III
3-B-IV
4-D-I
- b) 1-C-III
2-D-II
3-A-IV
4-B-I