

Sys

Energiesignale: • Endliche Energie: $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty$
 • Norm: $\|y(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}$ • Innenprodukt: $\langle y_1(t), y_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(t) y_2^*(t) dt$
Leistungssignal: • mittl. Leistung ist endlich: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt < \infty$
 • Norm: $\|y(t)\| = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt}$ • Innenprodukt: $\langle y_1(t), y_2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_1(t) y_2^*(t) dt$

Orthonormales Fetsystem: Bed. für Orthonormalität: $\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Schmidt'sches Orthonormalisierung: Geg. $B_i(x), i=1,2,3$

1. Berechnung der Hilfsfunktion: $L_i = B_i(x) - \sum_{n=0}^{i-1} \langle B_i(x), P_n(x) \rangle \cdot P_n(x)$
2. Normierung der Hilfsfkt.: $P_i(x) = \frac{L_i(x)}{\|L_i(x)\|} = \frac{L_i(x)}{\sqrt{\langle L_i(x), L_i(x) \rangle}}$ → neue Basis!

Approximierung: geg: $f(x), P_i(x)$ ges: $\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^N b_i P_i(x)$ (2.)

$b_i = \langle f(x), P_i(x) \rangle$ (1.)

Faltung: Im Zeitbereich: $x(t) * y(t) = \langle x(t-\tau), y^*(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y^*(\tau) d\tau$
 Im Frequenzbereich: $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$

Dirac-Impuls: $y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) y(t) dt$
Kurz: gibt Anteil der Signale an, die auf eine Schwingung (Frequenz: $\frac{1}{T_0}$)

Komplexe Fourier-Reihe: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t}$ mit: $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt$
Reelle Fourier-Reihe: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi \frac{k}{T_0} t) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{T_0} t)$ (Für jede Fkt. hat man best. a_k und b_k)

Ableitung: $\frac{dy(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f Y(f)$ • $a_k \cos(2\pi \frac{k}{T_0} t) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{T_0} t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(2\pi k \frac{t}{T_0} + \arctan(\frac{b_k}{a_k}))$
Verschiebung: • $\mathcal{F}\{y(t-\tau)\} = \mathcal{F}\{y(t)\} e^{-j2\pi f \tau}$ • $\mathcal{F}\{y(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathcal{F}\{y(t)\} \delta(f-f_0)$
 • $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ • $y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow Y(f) = \delta(f-f_0)$ • $Y(-f) = Y^*(f)$
 • $\mathcal{F}\{y(at)\} = \frac{1}{|a|} Y(\frac{f}{a})$

Rechteck! • $r_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \leftrightarrow Y(f) = T \text{sinc}(fT)$

Zeitkontinuierliche Systeme

- $y_e(t) \rightarrow [S] \rightarrow y_a(t) \quad y_a(t) = S\{y_e(t)\}$
- LTI-System:** $y_a(t) = y_e(t) * g(t)$
 - Linearität:** $S\{m y_1(t) + n y_2(t)\} = m S\{y_1(t)\} + n S\{y_2(t)\}$ (Superposition und skalare Multiplikation)
 - Zeitinvarianz:** System unabhängig von Zeitpunkt: $S\{y_e(t-t_0)\} = y_a(t-t_0)$
 - Kausalität:** Ausgang hängt nur von vergangenen und aktuellen Eingangswerten ab
 - Stabilität:** Auf ein beschränktes Eingangssignal reagiert das System mit beschränktem Ausgangssignal
 $y_e(t) < M < \infty \Rightarrow y_a(t) < M < \infty$ (BIBO-Stabilität)
- (Linearität und Zeitinvarianz müssen erfüllt sein): System lässt sich durch eine Funktion beschreiben. (LTI)

Zeitdiskrete Signale

Darstellung: • Folge: $y_n = y(n \cdot t_A)$ • Impulsreihe: $y_s(t) = y(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n t_A)$
Abtastfrequenz: $f_A = \frac{1}{t_A}$ Abtastzeit
Abtasttheorem: • Bed., dass sich das Signal nicht zu schnell zwischen Abtastpunkten ändert

Bsp: $y(t) = \sin(40\pi t)$
 $\Rightarrow f = 20 \text{ Hz}$
 $f_A > 2 \cdot f$
 $f_A > 40 \text{ Hz}$
 $t_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{40 \text{ Hz}} = 25 \mu\text{s}$

Satz: Signal $y(t)$ sei bandbegrenzt. $\Rightarrow Y(f) = 0$ für $|f| \geq B$
 $\Rightarrow y(t)$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , durch $y(t_n) = y(n \cdot t_A) = y_n$ festgelegt, die sie in zeitlichen Abständen $t_A = \frac{1}{f_A}$ annimmt
 $\Rightarrow f_A > 2B \Rightarrow$ Signal wird durch $\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t_n) \frac{\sin(\pi f_A(t-t_n))}{\pi f_A(t-t_n)}$ rekonstruiert
 $Y_s(f) = \frac{1}{t_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - \frac{n}{t_A})$

Rekonstruktion: $\hat{Y}(f) = Y_s(f) \cdot t_A \cdot \text{rect}(f) \leftrightarrow \hat{y}(t) = y_s(t) * \mathcal{F}^{-1}\{t_A \cdot \text{rect}(f)\}$
 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t_n) \text{sinc}(f_A(t-t_n))$
Aliasing (Bandüberlappungsfehler): $\hat{Y}(f) = Y_s(f) \cdot G(f)$
 $\hat{y}(t) = y_s(t) * g(t)$ [entspricht Multiplikation im Frequenzbereich]

Rekonstruktion: Durch Faltung mit Rekonstruktionsfilter:
 • Idealer Tiefpass: Spektrum von $Y_s(f)$ wird auf Nyquist-Band begrenzt: $[-\frac{f_0}{2}, \frac{f_0}{2}]$

Rekonst.: Multiplikation mit Rechteckfilter $G(f)$ über Nyquist-Band $\hat{=}$ Faltung mit sinc-Fkt im Zeitbereich
 $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \text{sinc}(f_A(t-t_n))$

• Halteglied 0. Ordnung: • Hält letzten Abtastwert, bis neuer verfügbar ist $\rightarrow$ Treppenfunktion
 • Gut für langsam ändernde Signale $\rightarrow$ mit Überabtastung verwechslbar
Rekonst.: Impulsantwort: $g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ • Frequenzgang: $G(f) = t_A \cdot \text{sinc}(\pi f t_A) \cdot e^{-j\pi f t_A}$
 $\hookrightarrow$ starke Verzerrung innerhalb Nyquist-Band
 • Signalanteile oberhalb der Nyquist-Frequenz $\frac{f_0}{2}$

• Linearer Interpolator: • verbindet Abtastwerte mit geraden Linien
 • akkurat (Man gibt Signal verzögert wieder)
 Impulsantwort: $g(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{t_A}, & -t_A \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{t_A}, & 0 \leq t < t_A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ • $G(f) = t_A \frac{\text{sinc}^2(\pi f t_A)}{(\pi f t_A)^2} = t_A \text{sinc}^2(f t_A)$

Unterabtastung: Man wählt f_A so, dass kein Aliasing auftritt: $f_A = \frac{f_0 - f_0^{\text{neg}}}{r}$
 Symm. Spektrum: (f_0^{neg} auf $f=0$) $\rightarrow f_A = \frac{f_0}{r}$, $f_{A,\text{min}} > B \Rightarrow r \leq r = \frac{f_0}{B}$
 Unsymm. Spektrum (f_0^{neg} auf $f = \frac{f_0}{2}$) $f_A = \frac{4 f_0}{4r+1}$ $f_{A,\text{min}} > 2B \Rightarrow r \leq r = \frac{f_0}{2B} - \frac{1}{4}$

Überabtastung (reduziert Aufwand):
 Analysefilter: • Nyquist-Band wird um Faktor r aufgeweitet: $f_A' = r f_A = r 2 f_B$ $r \gg 1$
 • Anti-Aliasing-Filterung: 1. einfacher Anti-Aliasing-Filter mit geringer Flankensteilheit
 2. gefilterte Signal wird mit deutlich höherer Abtastfrequenz abgetastet (f_A')
 3. res. Signal y_s wird mit mit zeitdiskreten Filter hoher Flankensteilheit auf Nyquist-Band beschränkt
 4. Abtastfrequenz wird wieder auf $f_A = 2 f_B$ reduziert.

dynamisch: Antwort $y_a(t)$ hängt vom augenblicklichen Eingang und von vergangenem Wert ab
 ↳ Gedächtnis der Dauer T

Impulsantwort: Antwort $g(t)$ auf Dirac-Impuls: $g(t) = S\{\delta(t)\}$

Bei LTI-System: $y_a(t) = y_e(t) * g(t)$
 • Kausal, wenn Impulsantwort für $t < 0$ verschwindet: $S \text{ kausal} \Leftrightarrow g(t) = 0, t < 0$
 • Stabil, wenn $g(t)$ absolut integrierbar ist: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$

Frequenzgang: LTI-System mit komplexer Schwingung mit Frequenz f_0 : $y_e(t) = A e^{j 2 \pi f_0 t}$ antwortet mit Signal derselben Frequenz
 ↳ Komplex

Frequenzgang des Systems: komplexer Proportionalitätsfaktor zw. y_e und y_a ist die Fourier-Transf. $G(f)$ oder Impulsantwort $g(t)$ bei Frequenz f_0

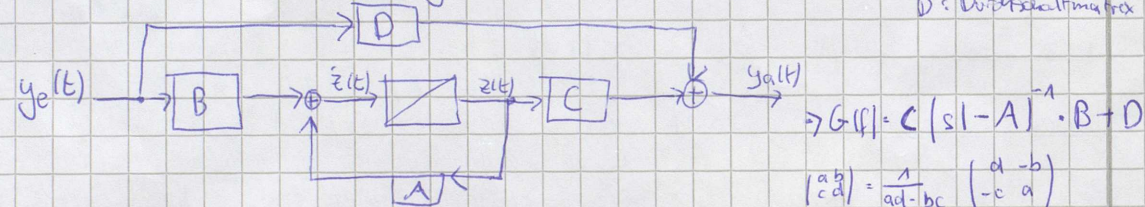
Amplitudengang: $|G(f)|$ Phasengang: $\arg(G(f))$

4.2. Beschreibung durch Differentialgleichungen

LTI-System: DGL $\rightarrow$ lineare DGL: $\sum_{v=0}^n a_v y_a^{(v)}(t) = \sum_{u=0}^m b_u y_e^{(u)}(t)$

Zustandsraumgleichung: Zustandsgleichung: $\dot{z}(t) = f(z(t), y_e(t), t)$
 Ausgangsgleichung: $y_a(t) = g(z(t), y_e(t), t)$

Zustandsraumdarstellung (LTI): $\dot{z}(t) = A \cdot z(t) + B y_e(t)$ mit $\begin{cases} A: \text{Systemmatrix} \\ B: \text{Stoßmatrix} \\ C: \text{Beobachtungsmatrix} \\ D: \text{Durchschaltmatrix} \end{cases}$
 $y_a(t) = C \cdot z(t) + D y_e(t)$



Zweiseitige Laplace-Transformation

$$y(t) \leftrightarrow Y(s) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-(s + j 2 \pi f)t} dt$$

$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t) e^{-\alpha t}\}$ Konvergenzbereich umfasst stets eine Strafe parallel zur j -Achse.

Fourier-Transf. zeitdiskreter Signale (DTFT)

$$y_n = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n t_n) \quad \circ \rightarrow Y_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j 2 \pi f n t_n}$$

$$\text{inverse Fourier-Transformation: } y_n = t_n \int_{-\frac{1}{2t_n}}^{\frac{1}{2t_n}} Y_*(f) e^{j 2 \pi f n t_n} df$$

(DFT) Diskrete Fourier-Transformation

Problem: Rechner kann nur endliche viele Abtastwerte y_n verarbeiten.
 • Frequenz f muss diskretisiert werden.

$\rightarrow y_n$ kann nur während Intervall T_0 beobachtet werden

$\rightarrow N$ Abtastwerte $T_0 = N \cdot t_n$

$$\Rightarrow \text{DTFT-Näherung: } Y_*(f) \approx \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j 2 \pi f n t_n}$$

Frequenzdiskretisierung: $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{f_A}{N}$
 mit $f = k \cdot \frac{f_A}{N}$
 $\Rightarrow \text{DFT: } Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j 2 \pi k n \frac{1}{N}}$, $k = 0, \dots, N-1$
 $y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j 2 \pi k n \frac{1}{N}}$

$$\begin{cases} y_{-n}^* \leftrightarrow Y_n^* \\ y_n \leftrightarrow Y_{-n} \end{cases}$$

Faltung: $x_n * y_n \leftrightarrow X_k \cdot Y_k$
 Hinzufügen von Nullen zu x_n und y_n auf Länge N
 ↳ so ist Leakageffekt

Eigenschaften: • DFT setzt implizit y_n und Y_k periodisch fort: $y_n = y_{n+LN}$
 $Y_k = Y_{k+LN}$

• DFT beschreibt Signal im Bereich $-\frac{f_A}{2}$ bis $\frac{f_A}{2}$

• y_n sind Abtastwerte von $y(t)$

Abweichung wegen: - Aliasing
 - Leakageffekt

Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

• identische Rechnung wie DFT, nur weniger Rechenoperationen, Sortierung der Werte

Auflösen im Zeit- und Frequenzbereich

$$t_n = \frac{1}{f_A}, \quad T_0 = N \cdot t_n = \frac{N}{f_A} \Rightarrow \text{Frequenzauflösung: } \Delta f = \frac{1}{T_0}$$

Bsp. geg. $y(t)$ mit $f \in [2 \text{ kHz}, 20 \text{ kHz}]$, $\Delta f_{\text{wünsch}} = 0,1 \text{ kHz}$ $N = \frac{f_A}{\Delta f}$

Lsg: 1. $T_0 \geq \frac{1}{\Delta f} = 10 \text{ s}$ $\Rightarrow N = T_0 \cdot f_A \geq 500$
 2. $f_A \geq 2 f_{\text{max}} = 40 \text{ kHz}$ $\Rightarrow$ wähle N um FFT anzuwenden

DFT einer Schwingung ohne Leakageffekt: Verhältnis von Schwingungsfrequenz

Verhältnis von Schwingfrequenz f_0 und Auflösung Δf ganzzahlig: $\frac{f_0}{\Delta f} = n \in \mathbb{N}$

mit Leakageffekt: $\frac{f_0}{\Delta f}$ nicht ganzzahlig

Zero-Padding: Problem: Beobachtungsintervall nicht beliebig groß $\rightarrow$ Lösung: Signalverlängerung: Anhängen von Nullen
 $\rightarrow$ feinere Frequenzauflösung
 $\rightarrow$ Quasikontinuierliche Spektren lassen sich berechnen

Einseitige Laplace-Transformation

$$y(t) \leftrightarrow Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j2\pi f$$

→ Wird bei kausalen Funktionen verwendet, da diese = 0 für $t < 0$

$$\text{Bsp: } y(t) = e^{-\alpha t} \rightarrow Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{1}{s+\alpha} \left[e^{-(s+\alpha)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$\text{Konvergenz? } \operatorname{Re}\{s+\alpha\} > 0 \Rightarrow \sigma > -\alpha$$

Inverse Laplace-Transformation

$$Y(s) \leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds$$

Eigenschaften:

$$\text{Linearität: } \mathcal{L}\left\{\sum_i a_i y_i(t)\right\} = \sum_i a_i \mathcal{L}\{y_i(t)\}$$

$$\text{Verschiebung im Zeitbereich: } t_0 > 0: \mathcal{L}\{y(t-t_0)\} = e^{-st_0} \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$t_0 < 0: \mathcal{L}\{y(t-t_0)\} = e^{st_0} \left[\mathcal{L}\{y(t)\} - \int_0^{-t_0} y(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right]$$

$$\text{Verschiebung im Frequenzbereich: } Y(s+b) = \mathcal{L}\{y(t) e^{-bt}\}$$

$$\text{Differenzierung im Zeitbereich: } \mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

$$\text{Skalierung: } \mathcal{L}\{y(at)\} = \frac{1}{a} Y\left(\frac{s}{a}\right)$$

Faltung: Multiplikation im Zeitbereich $\hat{=}$ Faltung der Laplace-Transformierten.

$$y_1(t) \cdot y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s) * Y_2(s)\}$$

$$\mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} = Y_1(s) \cdot Y_2(s)$$

Grenzwertsatz 1: Anfangswertsatz: Falls $\mathcal{L}\{y(t)\}$ existiert, folgt $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = y(0-) + \Delta y = y(0+)$

Endwertsatz: $\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = y(\infty)$ Bed.: $y(\infty)$ existiert und ist endlich

Rücktransformation mittels Residuensatzes: $y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} Y(s) e^{st} dt = \sum_{k=1}^M \operatorname{Res}\{Y(s) e^{st}; s_{\text{Pole}}\}$

$$\text{Bsp: } Y(s) = \frac{3s^2 - 2s + 1}{s^3 - s^2 + s - 1} \quad 4. \text{ Pole (NS des Nenners): } s_{\text{Pole}1} = -j, s_{\text{Pole}2} = j, s_{\text{Pole}3} = 1$$

$$2. \text{ Residuensatz: } y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} Y(s) e^{st} dt = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}\{Y(s) e^{st}; s_{\text{Pole}k}\}$$

$$3. \text{ Residuum einfache Polstellen: } \operatorname{Res}\{Y(s) e^{st}; s_{\text{Pole}k}\} = \lim_{s \rightarrow s_{\text{Pole}k}} (s - s_{\text{Pole}k}) Y(s) e^{st}$$

$$\Rightarrow y(t) = (e^{-jt} + e^{jt} + e^t - 2\cos t + e^t) \cdot \sigma(t)$$

Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung $Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$

$$\text{Bsp: } Y(s) = \frac{3s^2 - 2s + 1}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{A}{s+j} + \frac{B}{s-j} + \frac{C}{s-1} \quad \text{Koeff. vgl.: } A=B=C=1$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+j} + \frac{1}{s-j} + \frac{1}{s-1} \quad \Leftrightarrow y(t) = e^{-jt} + e^{jt} + e^t - 2\cos t + e^t$$

Zeitdiskrete Signale

Eigenschaften:

- Linearität: $\mathcal{S}\{c_1 y_{e1,n} + c_2 y_{e2,n}\} = c_1 \mathcal{S}\{y_{e1,n}\} + c_2 \mathcal{S}\{y_{e2,n}\}$
- Zeitinvarianz: $y_{a,n} = \mathcal{S}\{y_{e,n}\} \Rightarrow y_{a,n-n_0} = \mathcal{S}\{y_{e,n-n_0}\}$ (Antwort mit zeitlicher Verschiebung)
- Kausal: Antwort nicht abhängig von zukünftigen Werten
- dynamisch: $y_{a,n}$ abh. von Augenblick und von vergangenen/zukünft. Werten (Gedächtnis)
- (BIBO) • Stabil: beschränktes $y_{e,n} \Rightarrow$ beschränktes $y_{a,n}$

$$\text{Zeitdiskreter Dirac-Impuls: } \delta_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Impulsantwort: } g_n = \mathcal{S}\{\delta_n\}$$

$$\text{Faltung: } x_n * y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{n-i} y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_{n-i}$$

$$\text{LTI-System: } y_{a,n} = y_{e,n} * g_n \quad (\text{dadurch vollst. definiert})$$

FIR-System: zeitdiskretes System mit endlicher Impulsantwort IIR-System: unendlich lange Impulsantwort

Eigenschaften bei LTI: Kausal, wenn Impulsantwort g_n für neg. Indizes verschwindet: $g_n = 0, n < 0$
stabil, wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty$

Frequenzgang: Proportionalitätsfaktor zw. Ein/Ausgang bei f_0 : $y_a(f) \leftrightarrow g_n$

Beschreibung durch DGL's: Zustandsraum: $z_{n+1} = A \cdot z_n + B \cdot y_{e,n}$
 $y_{a,n} = C \cdot z_n + D \cdot y_{e,n}$
System Steue Beobachter Durchschalt

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

$$(2 \times 2 \text{ Matrix})^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a-d-bc} \begin{pmatrix} d-b \\ -c-a \end{pmatrix}$$

Z-Transformation

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n}$$

Immer Konvergenzgebiet angeben!

$$\hookrightarrow \text{Kreisring: } r^- < |z| < r^+$$

bei diskreten y_n : $Y(z) = Y^+ + Y^- - y_0$

$$\text{mit } Y^+ = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \quad Y^- = \sum_{n=-\infty}^{-1} y_n z^{-n}$$

$$\text{inverse Z-Transfo: } y_n = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(s) s^{n-1} ds$$

→ math. pos. geschlossener Weg im Inneren des Konvergenzgebietes von $Y(z)$

Bsp. Best. des Konvergenzradius

$$y_n = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases} \Rightarrow Y^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a}$$

$$Y^- = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{b}\right)^n = \frac{b}{b-z} \rightarrow \text{konv. für } |z| > |a| \text{ und } |z| < |b|$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)} \quad \text{Konvergenz: } |a| < |z| < |b|$$

Eigenschaften: • Linearität: $\mathcal{Z}\{\sum_i c_i y_{i,n}\} = \sum_i c_i Y_i(z)$

$$\text{• Zeitumkehr: } \hat{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = Y\left(\frac{1}{z}\right) \quad (\text{Grenze: } \frac{1}{r^-} < |z| < \frac{1}{r^+})$$

$$\text{• Zeitverschiebung } (y_n \rightarrow y_{n-k}): \hat{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{n-k} z^{-n} = z^{-k} Y(z)$$

$$\text{Faltung: } x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}; \quad \mathcal{Z}\{x_n * y_n\} = X(z) \cdot Y(z)$$

Anfangswertsatz: $\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = y_0$ (für kausale Folgen!)

Endwertsatz: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z)$

Pol-/Nullstellenplan von G(s)

1. Nullstelle berechnen (Zähler = 0) Bsp. $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2} \Rightarrow N_0 = -1$
2. Polstellen (Nenner = 0) Bsp. $S_{01,2} = -2$
3. Koordinatensystem mit Achsen $\text{Re}\{s\}$, $\text{Im}\{s\}$
4. NS durch $\circ$ Symbol einzeichnen
5. PS durch $\times$ Symbol einzeichnen (Mehrfache Stelle durch (n) kennzeichnen)

Systemfunktion: $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt$

Systemfkt. $\uparrow$ Impulsantwort

Konvergenzgebiet angeben!

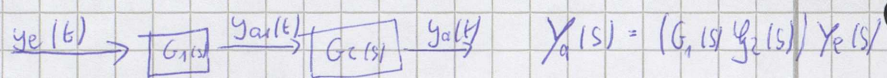
Stabilität: Ein LTI-System ist stabil, wenn alle Polstellen von $G(s)$ in der linken Halbebene liegen ($\text{Re}\{s_{0v}\} < 0$ für alle v)

Reellwertige Systeme: System, das auf reelles y_e mit reellem y_a antwortet

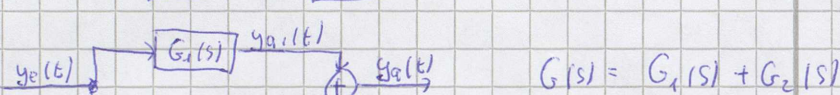
• LTI-System: $G^*(s) = G(s^*) \rightarrow$ reellwertig

Verknüpfung von Systemfunktionen

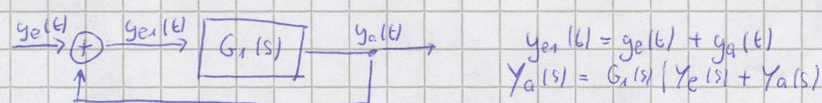
• Reihenschaltung:



• Parallelschaltung:



• Rückkopplung



Frequenzgang $G(f) = G(s)$ mit $s = j\omega$

Amplitudengang: $A(f) = |G(f)| = \sqrt{\text{Re}\{G(f)\}^2 + \text{Im}\{G(f)\}^2}$

Dämpfung: $a(f) = -20 \lg |G(f)|$ in dB

Phasengang, Phase: $\varphi(f) = \arg\{G(f)\} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{G(f)\}}{\text{Re}\{G(f)\}}\right)$

Gruppenlaufzeit: $T_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \varphi'(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}$

Signalflussplan

	Symbol	Zeitbereich	Laplacebereich
Integration	$\rightarrow \int \rightarrow$	$\int_{-\infty}^\infty x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
Verstärkung	$\rightarrow \triangle \rightarrow$	$a \times u$	$a X(s)$
Summation	$\rightarrow \oplus \rightarrow$	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$

Verzweigung

Bode-Diagramm

Logarithmierter Betrag und Phase über dem Logarithmus der Frequenz wird dargestellt

• reelle Polstelle: $-20 \lg |j\omega \frac{1}{s+1}| \xrightarrow{\omega \gg 1} -20 \lg |\omega| - 20 \lg |2\pi f|$

reelle NS: wie Polstelle, nur mit anderen VZ

Bsp. $G(s) = \frac{1}{s+1}$ Seite 184

Bsp. einfache Polstelle mit $|s_{01}| = 0,5$

Systemfunktion

Impulsantwort $g_n \rightarrow G(z)$ Systemfunktion

$G(z) = \frac{Y_a(z)}{Y_e(z)}$ - Bei LTI-Systemen Zähler und Nenner Polynom

LTI-System ist stabil, wenn alle Polstellen v. $G(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen: $|z_{0v}| < 1$

• Amplitudengang: $A(f) = |G(z=e^{j2\pi fT})|$ • Gruppenlaufzeit: $T_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{df}$

• Phasengang: $\varphi(f) = \angle G(z=e^{j2\pi fT})$

Minimalphasensystem: NS von $G(z)$ liegen in Einheitskreis: $|z_{0v}| \leq 1$

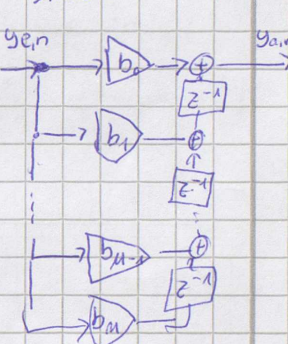
Allpass: $A(f) = 1, f \in \mathbb{R}$ (NS spiegelbildlich bzgl. Einheitskreis)
 $\rightarrow$ Beiträge zum A(f) kompensieren sich

$G(z) = G_m(z) \cdot G_A(z)$
 minim. $\rightarrow$ Allpass

FIR-System $n_1 = n_2$

Man erkennt auch: $a_{n_1} y_{e,n-n_1} = \sum_{\nu=n_1}^{n_1} b_\nu y_{e,n-\nu}$
 $\rightarrow$ Zur Berechnung von $y_{a,n-n_1}$ werden nur $y_{e,n-\nu}$ herangezogen $\rightarrow$ Nichtrekursives System
 $G(z) = \sum_{\nu=n_1}^{n_1} \frac{b_\nu}{a_{n_1}} z^{n_1-\nu}$ $g_n = \sum_{\nu=n_1}^{n_1} \frac{b_\nu}{a_{n_1}} \delta_{n+n_1-\nu}$

Struktur FIR



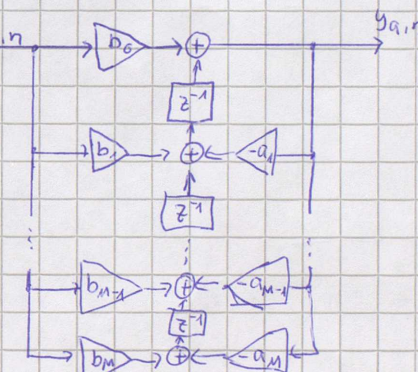
IIR-System $n_1 < n_2$

$g_n = A_0 \delta_n + \sum_{\nu=1}^M A_\nu z_{0v}^{n-1} \delta_{n-1}$ (Impulsant unendlich lang, wenn ein Pol ungleich Null)

$\rightarrow$ autoregressives System

$G(z) = \frac{\sum_{\nu=0}^M b_\nu z^{M-\nu}}{\sum_{\nu=0}^M a_\nu z^{M-\nu}}$

Struktur IIR



Impulsinvarianz

1. $g(t)$ wird mit t_n abgetastet: $g_n = g(n \cdot t_n)$
 2. Transfer. in z-Bereich

$G(s) \Rightarrow g(t) \Rightarrow g_n \Rightarrow G(z)$
 Bsp. $G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \sigma(t) \Rightarrow g_n = \frac{1}{T} e^{-nT/T} \Rightarrow G(z) = \frac{1}{T} \frac{z}{z - e^{-1/T}}$

Pol-/Nullstellenübertragung

• Pol/NS werden mit $z = e^{st_n}$ übertragen. $\rightarrow$ Gleiches Übertragungsverhalten.
 • NS im Unendlichen, $s_0 \rightarrow \infty$ werden auf $z_0 = -1$ übertragen

Bsp. $G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow s_{01} = -1/T \Rightarrow z_{01} = e^{-1/T} \Rightarrow G(z) = k \cdot \frac{z+1}{z - e^{-1/T}}$
 $G(s=0) = 1 = G(z=1) \Rightarrow k = \frac{1 - e^{-1/T}}{2} \Rightarrow G(z) = \frac{1 - e^{-1/T}}{2} \cdot \frac{z+1}{z - e^{-1/T}}$

Allpass

$P = \bar{P}$ Polynome

- System mit gebrochenrationaler Übertragungsfunktion, mit Amplitudengang $A(\omega) = |G(\omega)| = 1$
- Zählergrad = Nennergrad, keine Pol-/Nullstellen auf imag. Achse

Minimalphasensystem (MPS)

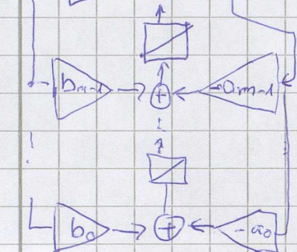
- Stabiles System mit gebrochenrationaler Übertragungsfunktion, bei dem alle Nullstellen ≤ 0
- Kausale LTI-Systeme lassen sich in Minimalphasensystem und Allpass aufspalten

MPS besitzen für geg. $A(\omega)$ kleinste mögliche Gruppenlaufzeit

Strukturdarstellung kontinuierlicher LTI-Systeme

ARMA-Filter: Übertragungsfunktion besteht aus Zähler- und Nennerpolynom: $G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{l=0}^n a_l s^l}$

$u, v \rightarrow$ allg. Form eines gebrochenrationalen Übertragungsglieds



Numerische Integration

- Rechteckregel vorwärts: $S = \frac{z-1}{b_1}$
- Rechteckregel rückwärts: $S = \frac{z-1}{b_1 \cdot z}$
- Trapezregel/bilineare Transform.: $S = \frac{z}{b_1} \frac{z-1}{z+1}$

Frequenzselektive Filter (S. 355)

und ~~stabil~~ instabil werden, wenn Pole ^{oder} nicht im Inneren des Einheitskreises liegen.
 • liegen alle Pole von $G(s)$ in der linken Halbebene ist das System stabil