

Energiesignale: Endliche Energie: $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty$

• Norm: $\|y(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}$ • Innenprodukt: $\langle y_1(t), y_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(t) y_2^*(t) dt$

Leistungssignal: mittl. Leistung ist endlich: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt < \infty$

• Norm: $\|y(t)\| = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt}$ • Innenprodukt: $\langle y_1(t), y_2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_1(t) y_2^*(t) dt$

Orthonormales Fetsystem: Bed. für Orthonormalität: $\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Schmidt'sches Orthonormalisierung: Geg. $B_i(x)$, $i=1,2,3$

1. Berechnung der Hilfsfunktion: $L_i = B_i(x) - \sum_{n=0}^{i-1} \langle B_i(x), P_n(x) \rangle \cdot P_n(x)$

2. Normierung der Hilfsfkt.: $P_i(x) = \frac{L_i(x)}{\|L_i(x)\|} = \frac{L_i(x)}{\sqrt{\langle L_i(x), L_i(x) \rangle}} \rightarrow \text{neue Basis!}$

Approximierung: geg. $f(x)$, $P_i(x)$ ges. $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i P_i(x)$ (2.)

$b_i = \langle f(x), P_i(x) \rangle$ (1.)

Faltung: Im Zeitbereich: $x(t) * y(t) = \langle x(t-\tau), y^*(\tau) \rangle_c = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau$

Im Frequenzbereich: $x(t) * y(t) \rightarrow X(f) \cdot Y(f)$

Dirac-Impuls: $y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) y(t) dt$

kleinste gdw. Anteil der Signalenergie an einer Schwingung (Frequenz: $\frac{1}{T_0}$)

Komplexe Fourier-Reihe: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t}$ mit $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt$

Reelle Fourier-Reihe: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi \frac{k}{T_0} t) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{T_0} t)$ (Für jede Fkt. hat man best. a_k und b_k)

Ableitung: $\frac{d}{dt} x(t) \rightarrow j2\pi f X(f)$

$a_k \cos(2\pi \frac{k}{T_0} t) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{T_0} t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(2\pi \frac{k}{T_0} t - \arctan(\frac{b_k}{a_k}))$

Poisson'sche Summenformel: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$

Verschiebung: $\mathcal{F}\{y(t-\tau)\} = \mathcal{F}\{y(t)\} e^{-j2\pi f \tau}$ • $\mathcal{F}^{-1}\{Y(f-u)\} = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} e^{j2\pi f \tau}$

• $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ • $y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow Y(f) = \delta(f-f_0)$ • $\mathcal{F}\{1-f\} = Y^*(f)$

Rechteck! • $r_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \rightarrow Y(f) = T \text{sinc}(fT)$ • $\mathcal{F}\{y(at)\} = \frac{1}{|a|} Y(\frac{f}{a})$

Zeitkontinuierliche Systeme $y_e(t) \rightarrow [S] \rightarrow y_a(t)$ $y_a(t) = S\{y_e(t)\}$

LTI-System: $y_a(t) = y_e(t) * g(t)$

• Linearität: $S\{m y_1(t) + n y_2(t)\} = m S\{y_1(t)\} + n S\{y_2(t)\}$ (Superposition und skalare Multiplikation)

• Zeitinvarianz: System unabhängig von Zeitpunkt: $S\{y_e(t-t_0)\} = y_a(t-t_0)$

• Kausalität: Ausgang hängt nur von vergangenen und aktuellen Eingangswerten ab.

• Stabilität: Auf ein beschränktes Eingangssignal reagiert das System mit beschränktem Ausgangssignal
 $y_e(t) < M < \infty \Rightarrow y_a(t) < M < \infty$ (BIBO-Stabilität)

(Linearität und Zeitinvarianz müssen erfüllt sein): System lässt sich durch eine Funktion beschreiben. (LTI)

linearer time-invariant System

Zeitdiskrete Signale

Darstellung: Folge: $y_n = y(n \cdot t_A)$

Impulsreihe: $y_*(t) = y(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n t_A)$

Abtastfrequenz: $f_A = \frac{1}{t_A}$ ← Abtastzeit

Abtasttheorem: Bed., dass sich das Signal nicht zu schnell zwischen Abtastpunkten ändert

Satz: Signal $y(t)$ sei bandbegrenzt $\Rightarrow Y(f) = 0$ für $|f| \geq B$

$f_A > 2 f_{max}$

$f_A > 2 B$

Bsp: $y(t) = \sin(40\pi t)$
 $\Rightarrow f = 20 \text{ kHz}$
 $f_A > 2 \cdot f$
 $f_A > 40 \text{ kHz}$
 $t_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{40 \text{ kHz}} = 25 \text{ ns}$

$\Rightarrow y(t)$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , durch $y(t_n) = y(n \cdot t_A) = y_n$ festgelegt, die sie in zeitlichen Abständen $t_A = \frac{1}{f_A}$ annimmt

$\Rightarrow f_A \geq 2B \Rightarrow$ Signal wird durch $\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t_n) \frac{\sin(\pi f_A (t - t_n))}{\pi f_A (t - t_n)}$ rekonstruiert, $f_A = \frac{1}{t_A}$

$Y_*(f) = \frac{1}{t_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - \frac{n}{t_A})$ Rechteckfaltung

Rekonstruktion: $\hat{Y}(f) = Y_*(f) \cdot t_A \cdot f_A(f) \Leftrightarrow \hat{y}(t) = y_*(t) * \tilde{t}_A \{t_A f_A(f)\}$
 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t_n) \text{sinc}(f_A(t - n t_A))$ Faltung

(Aliasing (Bandüberlappungsfehler))

Rekonstruktion: Durch Faltung mit Rekonstruktionsfilter: $\hat{y}(t) = y_*(t) * g(t)$ [entspricht Multiplikation im Frequenzbereich]

• Idealer Tiefpass: Spektrum von $Y_*(f)$ wird auf Nyquist-Band begrenzt: $[-\frac{f_A}{2}, \frac{f_A}{2}]$

Rekonst. $\hookrightarrow$ Multiplikation mit Rechteckfilter $G(f)$ über Nyquist-Band $\hat{=}$ Faltung mit sinc-Fkt im Zeitbereich
 $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \text{sinc}(f_A(t - n t_A))$

- Halteglied 0. Ordnung
 - hält letzten Abtastwert, bis neuer verfügbar ist $\rightarrow$ Treppenfunktion
 - gut für langsam ändernde Signale $\rightarrow$ mit Überabtastung verwendbar

Rekonst. • Impulsantwort: $g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

• Frequenzgang: $G(f) = t_A \cdot \frac{\sin(\pi f t_A)}{\pi f t_A} \cdot e^{-j\pi f t_A/2}$
 $\hookrightarrow$ - starke Verzerrung innerhalb Nyquist-Band
 - Signalanteile oberhalb der Nyquist-Frequenz $\frac{f_A}{2}$

- Linearer Interpolator
 - verbindet Abtastwerte mit geraden Linien
 - abwärts (Man gibt Signal verzögert wieder)

Impulsantwort: $g(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{t_A}, & -t_A \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{t_A}, & 0 \leq t < t_A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $G(f) = t_A \frac{\sin^2(\pi f t_A)}{(\pi f t_A)^2} = t_A \text{sinc}^2(f t_A)$

Unterabtastung: Man wählt f_A so, dass kein Aliasing auftritt: $f_A = \frac{f_0}{r}$

f_0 : Mittelfrequenz
 B : Bandbreite
 $\Delta f_{max} - f_{min}$

Symm. Spektrum (f_0^{proj} auf $f=0$) $\Rightarrow f_A = \frac{f_0}{r}$, $f_{A,min} > B \Rightarrow r \leq r = \frac{f_0}{B}$

Unsymm. Spektrum ($f_0^{proj} = f = \frac{f_A}{2}$) $f_A = \frac{4 f_0}{4r+1}$, $f_{A,min} > 2B \Rightarrow r \leq r = \frac{f_0}{2B} - \frac{1}{4}$

r : Grad der Überabtastung

Überabtastung (reduziert Aufwand)

Analoge Filter • Nyquist-Band wird um Faktor r aufgeweitet: $f_A' = r f_A = r 2 f_A$ $r \gg 1$

- Anti-Aliasing-Filterung:
 1. einfacher Anti-Aliasing-Filter mit geringer Flankensteilheit
 2. gefilterte Signal wird mit deutlich höherer Abtastfrequenz abgetastet (f_A')
 3. res. Signal y_n wird mit mit zeitdiskreten Filter hoher Flankensteilheit auf Nyquist-Band beschränkt
 4. Abtastfrequenz wird wieder auf $f_A = 2 f_A$ reduziert.

dynamisch: Antwort $y_a(t)$ hängt vom augenblicklichen Eingang und von vergangenen Werten ab
 $\hookrightarrow$ Gedächtnis der Dauer T

Impulsantwort: Antwort $g(t)$ auf Dirac-Impuls: $g(t) = S\{\delta(t)\}$

Bei LTI-System:
 • $y_a(t) = y_e(t) * g(t)$
 • Kausal, wenn Impulsantwort für $t < 0$ verschwindet: $S \text{ kausal} \Leftrightarrow g(t) = 0, t < 0$
 • Stabil, wenn $g(t)$ absolut integrierbar ist: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$

Frequenzgang: LTI-System mit komplexer Schwingung mit Frequenz f_0 : $y_e(t) = A e^{j2\pi f_0 t}$ antwortet mit Signal derselben Frequenz
 $\Rightarrow$ Komplex Frequenzgang

Frequenzgang des Systems: komplex. Proportionalitätsfaktor zw. y_e und y_a ist die Fourier-Transf. $G(f)$ der Impulsantwort $g(t)$ bei Frequenz f_0

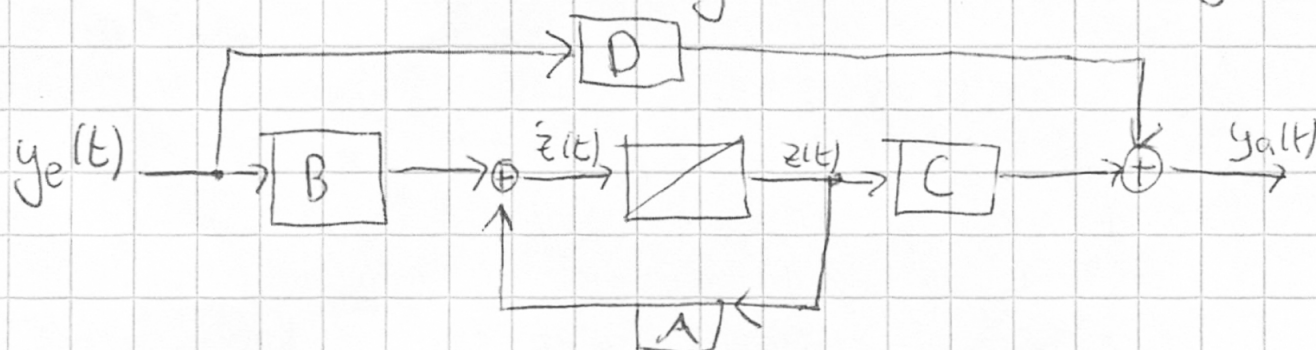
Amplitudengang: $|G(f)|$ Phasengang: $\arg(G(f))$

4.2. Beschreibung durch Differentialgleichungen

LTI-System: DGL $\rightarrow$ lineare DGL: $\sum_{v=0}^n a_v y_a^{(v)}(t) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} y_e^{(\mu)}(t)$

Zustandsraumgleichung
 Zustandsgleichung: $\dot{z}(t) = f(z(t), y_e(t), t)$
 Ausgangsgleichung: $y_a(t) = g(z(t), y_e(t), t)$

Zustandsraumdarstellung (LTI):
 $\dot{z}(t) = A \cdot z(t) + B y_e(t)$
 $y_a(t) = C \cdot z(t) + D y_e(t)$
 mit $\begin{cases} A: \text{Systemmatrix} \\ B: \text{Steuermatrix} \\ C: \text{Beobachtungsmatrix} \\ D: \text{Durchschaltmatrix} \end{cases}$



$$\Rightarrow G(f) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Zweiseitige Laplace-Transformation

$$y(t) \mapsto Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-(\sigma + j2\pi f)t} dt$$

$$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t)e^{-\sigma t}\}$$

Konvergenzbereich umfasst stets eine Streife parallel zur j -Achse.

Fourier-Transfo. zeitdiskreter Signale (DTFT)

$$y_T = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_A) \quad \longleftrightarrow \quad Y_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j2\pi f n T_A}$$

inverse Fourier-Transformation: $y_n = T_A \int_{-\frac{1}{2T_A}}^{\frac{1}{2T_A}} Y_*(f) e^{j2\pi f n T_A} df$

(DTFT)

(DFT) Diskrete Fourier-Transformation

Problem: - Rechner können nur endliche viele Abtastwerte y_n verarbeiten
- Frequenz f muss auch diskretisiert werden.

$\rightarrow y_n$ kann nur während Intervall T_0 beobachtet werden
 $\rightarrow N$ Abtastwerte $T_0 = N \cdot T_A$

$\Rightarrow$ DTFT-Näherung: $Y_*(f) \approx \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi f n T_A}$

Frequenzdiskretisierung: $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{f_A}{N}$

$$\begin{matrix} y_{-n} & \longleftrightarrow & Y_n^* \\ y_n & \longleftrightarrow & Y_{-n}^* \end{matrix}$$

mit $f = k \cdot \frac{f_A}{N}$

$$\Rightarrow \text{DFT: } Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

Faltung: $X_n * y_n \longleftrightarrow X_k \cdot Y_k$

Hinzufügen von Nullen zu x_n und y_n auf Länge N
 $\rightarrow$ sog. Randeffekt

Eigenschaften: - DFT setzt implizit y_n und Y_k periodisch fort:

$$y_n = y_{n + lN}$$

$$Y_k = Y_{k + lN}$$

- DFT beschreibt Signal im Bereich $-\frac{f_A}{2}$ bis $\frac{f_A}{2}$

- y_n sind Abtastwerte von $y(t)$

Abweichung wegen: - Aliasing
- Leckeffekt

Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

- identische Rechnung wie DFT, nur weniger Rechenoperationen, Sortierung der Werte

Auflösen im Zeit- und Frequenzbereich

$t_A = \frac{1}{f_A}$, $T_0 = N \cdot t_A = \frac{N}{f_A}$ $\Rightarrow$ Frequenzauflösung: $\Delta f = \frac{1}{T_0}$

Bsp. geg. $y(t)$ mit $f \in [2 \text{ kHz}, 20 \text{ kHz}]$, $\Delta f_{\text{wünsch}} = 0,1 \text{ kHz}$ $N = \frac{f_A}{\Delta f}$

Lsg: 1. $T_0 \geq \frac{1}{\Delta f} = 10 \text{ s}$

2. $f_A \geq 2 f_{\text{max}} = 40 \text{ kHz}$

$\Rightarrow N = T_0 \cdot f_A \geq 500$

$\Rightarrow$ wähle 512 um FFT anzuwenden

DFT einer Schwingung ohne Leckeffekt: Verhältnis von Schwingfrequenz

Verhältnis von Schwingfrequenz f_0 und Auflösung Δf ganzzahlig: $\frac{f_0}{\Delta f} = n \in \mathbb{N}$

mit Leckeffekt: $\frac{f_0}{\Delta f}$ nicht ganzzahlig

Zero-Padding Problem: Beobachtungsintervall nicht beliebig groß $\rightarrow$ Lösung: Signalverlängerung: Anhängen von Nullen

$\Rightarrow$ feinere Frequenzauflösung

$\Rightarrow$ quasikontinuierliche Spektren lassen sich berechnen

Einseitige Laplace - Transformation

$$y(t) \leftrightarrow Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j2\pi f$$

→ Wird bei kausalen Funktionen verwendet, da diese = 0 für $t < 0$

Bsp: $y(t) = e^{-\alpha t} \rightarrow Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{-1}{s+\alpha} [e^{-(s+\alpha)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$

Konvergenz? $\text{Re}\{s+\alpha\} > 0 \Rightarrow \sigma > -\alpha$

Inverse Laplace - Transformation

$$Y(s) \leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds$$

Eigenschaften:

Linearität: $\mathcal{L}\{\sum_i a_i y_i(t)\} = \sum_i a_i \mathcal{L}\{y_i(t)\}$

Verschiebung im Zeitbereich: $t_0 > 0: \mathcal{L}\{y(t-t_0)\} = e^{-st_0} \mathcal{L}\{y(t)\}$

$t_0 < 0: \mathcal{L}\{y(t-t_0)\} = e^{-st_0} \left[\mathcal{L}\{y(t)\} - \int_0^{-t_0} y(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right]$

Verschiebung im Frequenzbereich: $Y(s+b) = \mathcal{L}\{y(t) e^{-bt}\}$

Frequenzbereich

Differentiation im Zeitbereich: $\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0_-)$

Skalierung: $\mathcal{L}\{y(at)\} = \frac{1}{a} Y\left(\frac{s}{a}\right)$

Faltung: Multiplikation im Zeitbereich $\hat{=}$ Faltung der Laplace Transformationen.

$y_1(t) \cdot y_2(t) \leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s) * Y_2(s)\}$

$\mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} = Y_1(s) \cdot Y_2(s)$

Grenzwertsatz 1 - Anfangswertsatz: Falls $\mathcal{L}\{y(t)\}$ exist. folgt $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = y(0_-) + \Delta y = y(0_+)$

Endwertsatz: $\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = y(\infty)$ Bed.: $y(\infty)$ existiert und ist endlich

Rücktransformation mittels Residuensatzes: $y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} Y(s) e^{st} dt = \sum_{k=1}^M \text{Res}\{Y(s) e^{st}; s_{\text{pk}}\}$

Bsp. $Y(s) = \frac{3s^2 - 2s + 1}{s^3 - s^2 + s - 1}$ 4. Pole (NS des Nenners): $s_{\text{pk}1} = -j$ $s_{\text{pk}2} = j$ $s_{\text{pk}3} = 1$

2. Residuensatz: $y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} Y(s) e^{st} dt = \sum_{k=1}^3 \text{Res}\{Y(s) e^{st}; s_{\text{pk}k}\}$

3. Residuen einfache Polstellen: $\text{Res}\{Y(s) e^{st}; s_{\text{pk}k}\} = \lim_{s \rightarrow s_{\text{pk}k}} (s - s_{\text{pk}k}) Y(s) e^{st}$

$\Rightarrow y(t) = (e^{-jt} + e^{jt} + e^t + 2 \cos t + e^t) \cdot \sigma(t)$

Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Bsp: $Y(s) = \frac{3s^2 - 2s + 1}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{A}{s+j} + \frac{B}{s-j} + \frac{C}{s-1}$

Koeff.-vgl.: $A = B = C = 1$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+j} + \frac{1}{s-j} + \frac{1}{s-1} \rightarrow y(t) = e^{-jt} + e^{jt} + e^t = 2 \cos t + e^t$

Zeitdiskrete Signale

Eigenschaften:

- Linearität: $S\{C_1 \cdot y_{e1,n} + C_2 \cdot y_{e2,n}\} = C_1 \cdot S\{y_{e1,n}\} + C_2 \cdot S\{y_{e2,n}\}$
- Zeitinvarianz: $y_{a,n} = S\{y_{e,n}\} \Rightarrow y_{a,n-n_0} = S\{y_{e,n-n_0}\}$ (antwortet mit gleicher zeitlicher Verschiebung)
- Kausal: Antwort nicht abhängig von zukünftigen Werten
- dynamisch: $y_{a,n}$ abh. von Augenblick und von vergangenen/zukünft. Werten (Gedächtnis)
- (BIBO) • Stabil: beschränktes $y_{e,n} \Rightarrow$ beschränktes $y_{a,n}$

Zeitdiskreter Dirac-Impuls: $\delta_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

Impulsantwort: $y_n = S\{\delta_n\}$ Faltung: $x_n * y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{n-i} y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_{n-i}$

LTI-System: $y_{a,n} = y_{e,n} * g_n$ (dadurch vollst. definiert)

FIR-System: zeitdiskretes System, mit endlicher Impulsantwort IIR-System: unendlich lange Impulsantwort

Eigenschaften bei LTI: • Kausal, wenn Impulsantwort g_n für neg. Indizes verschwindet: $g_n = 0, n < 0$
• stabil, wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty$

Frequenzgang: Proportionalitätsfaktor zw. Ein/Ausgang bei f_0 : $Y(f) \xrightarrow{\text{System}} g_n \xrightarrow{\text{Stimme}}$

Beschreibung durch DGL's: Zustandsraum: $\begin{aligned} z_{n+1} &= \overset{\text{System}}{A} \cdot z_n + \overset{\text{Stimme}}{B} \cdot y_{e,n} \\ y_{a,n} &= \overset{\text{Beobachtet}}{C} \cdot z_n + \overset{\text{Durchschnitt}}{D} \cdot y_{e,n} \end{aligned}$ $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$
 $(2 \times 2 \text{ Matrix})^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Z-Transformation

$$Y(z) = Z\{y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n}$$

• Immer Konvergenzgebiet angeben!

$\hookrightarrow$ Kreisring: $r^+ < |z| < r^-$
Innenkreis Außenkreis

akausale y_n : $Y(z) = Y^+ + Y^- - y_0$
mit $Y^+ = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$ (kausal) $Y^- = \sum_{n=0}^{\infty} y_{-n} z^n$ (antikausal)

Bsp. Best. des Konvergenzradius
 $y_n = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases} \Rightarrow Y^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a}$
 $Y^- = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n = \frac{b}{b-z} \rightarrow$ konv. für $|z| > |a| = r^+$
 $\Rightarrow Y(z) = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}$ Konvergenz: $|a| < |z| < |b|$

inverse Z-Transfo: $y_n = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{n-1} dz$
 $\hookrightarrow$ math. pos. geschlossener Weg im Inneren des Konvergenzgebietes von $Y(z)$

Eigenschaften: • Linearität: $Z\left\{\sum_i c_i y_{i,n}\right\} = \sum_i c_i Y_i(z)$

• Zeitumkehr: $\hat{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = Y\left(\frac{1}{z}\right)$ (Grenze: $\frac{1}{r^-} < |z| < \frac{1}{r^+}$)
($y_n \rightarrow y_{-n}$)

• Zeitverschiebung ($y_n \rightarrow y_{n-l}$): $\hat{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{n-l} z^{-n} = z^{-l} Y(z)$

Faltung: $x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$; $Z\{x_n * y_n\} = X(z) \cdot Y(z)$

• Anfangswertsatz: $\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = y_0$ (für kausale Folgen!)

• Endwertsatz: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z)$

Pol-/Nullstellenplan von $G(s)$

1. Nullstelle berechnen (Zähler = 0) $S_{01} = -1$ Bsp. $G(s) = \frac{8(s+1)}{(s+2)^3} \Rightarrow NS = +1$
2. Polstellen (Nenner = 0) Bsp. $S_{01,2,3} = -3$
3. Koordinatensystem mit Achsen $Re\{s\}$, $Im\{s\}$
4. NS durch $\circ$ Symbol einzeichnen
5. PS durch $\times$ Symbol einzeichnen (Mehrfache Stelle durch (n) kennzeichnen)

Systemplot

3b. $\odot$

Systemfunktion : $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt$

$\uparrow$ Systemplot $\uparrow$ Impulsantwort

LTI: $y_a(t) = g(t) * y_e(t)$

Konvergenzgebiet angeben!

Stabilität : Ein LTI-System ist stabil, wenn alle Polstellen von $G(s)$ in der linken Halbebene liegen ($Re\{s_{00v}\} < 0$ für alle v)

Reellwertige Systeme : System, das auf reelles y_e mit reellem y_a antwortet

• LTI-System: $G^*(s) = G(s^*) \rightarrow$ reellwertig

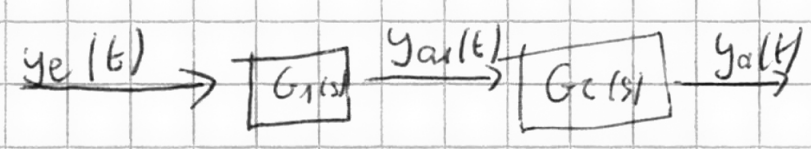
Symbole

Integration $\rightarrow \int x(\tau) d\tau, \frac{1}{s} X(s)$

Verstärker

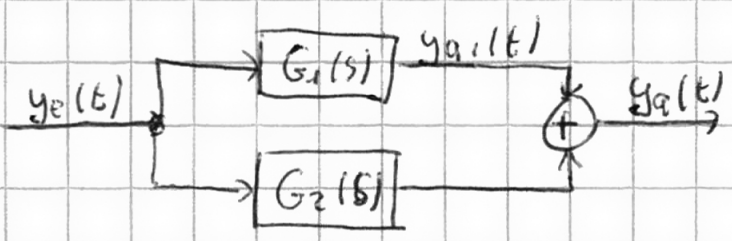
Verknüpfung von Systemfunktionen

• Reihenschaltung:



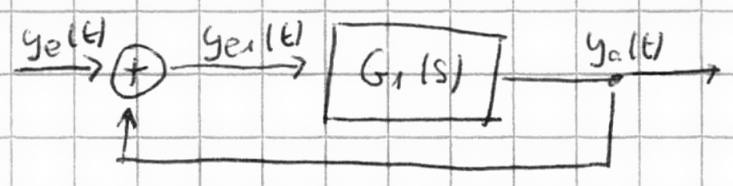
$Y_a(s) = (G_1(s) G_2(s)) Y_e(s)$

• Parallelschaltung:



$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

• Rückkopplung



$y_{er}(t) = y_e(t) + y_a(t)$
 $Y_a(s) = G_1(s) (Y_e(s) + Y_a(s))$

$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)}$

Frequenzgang $G(f) = G(s)$ mit $s = j\omega f$

Amplitudengang : $A(f) = |G(f)| = \sqrt{Re\{G(f)\}^2 + Im\{G(f)\}^2}$

Dämpfung : $a(f) = -20 \lg |G(f)|$ in dB

Phasengang, Phase : $\psi(f) = \arg\{G(f)\} = \arctan\left(\frac{Im\{G(f)\}}{Re\{G(f)\}}\right)$

$G(f) = A(f) \cdot e^{j\psi(f)}$

Gruppenlaufzeit : $T_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \psi'(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(f)}{df}$

Signalflussplan

	Symbol	Zeitbereich	Laplacebereich
Integration	$\rightarrow \int \rightarrow$	$\int_{-\infty}^\infty x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
Verstärkung	$\rightarrow \triangle \rightarrow$	$a \cdot x(t)$	$a \cdot X(s)$
Summation	$\rightarrow \oplus \rightarrow$	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
Verzweigung	$\rightarrow \downarrow$		

Bode - Diagramm

Logarithmierter Betrag und Phase über dem Logarithmus der Frequenz wird dargestellt

• reelle Polstelle : $-20 \lg |j \frac{2\pi f}{\sigma_{00v}} - 1| \xrightarrow{2\pi f \gg \sigma_{00v}} -20 \lg |\sigma_{00v}| - 20 \lg |2\pi f|$

reelle NS: wie Polstelle, nur mit anderer ω

Bsp: $G(s) = \dots$ Seite 184 Bsp. einfache Polstelle mit $|s_{00v}| = 0,5$

Systemfunktion

Impulsantwort $g_n \rightarrow G(z)$ Systemfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad - \text{Bei LTI-Systemen z\u00f4hler und Nenner Polynom}$$

LTI-System ist stabil, wenn alle Polstellen v. $G(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen: $|z_{\text{pol}}| < 1$

- Amplitudengang: $A(f) = |G(z = e^{j2\pi fT})|$ • Gruppenlaufzeit: $\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f)$
- Phasengang: $\varphi(f) = \angle G(z = e^{j2\pi fT})$

Minimalphasensystem: NS von $G(z)$ liegen in Einheitskreis: $|z_{\text{pol}}| \leq 1$

Allpass: $A(f) = 1, f \in \mathbb{R}$ (NS spiegelbildlich bzgl. Einheitskreis)
 $\rightarrow$ Beitr\u00e4ge zum A(f) kompensieren sich

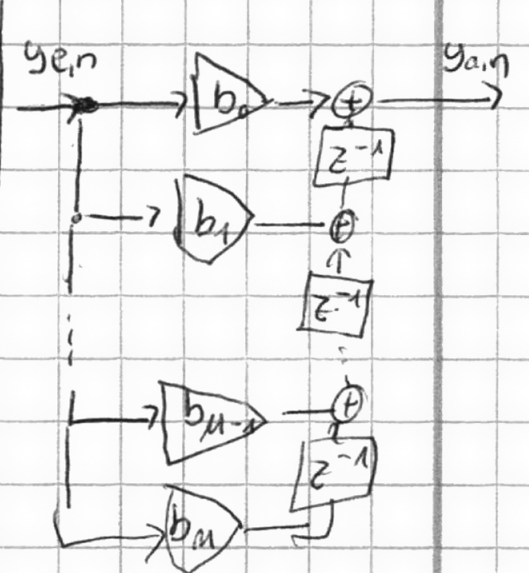
$$G(z) = \underbrace{G_m(z)}_{\text{Minimal}} \cdot \underbrace{G_A(z)}_{\text{Allpass}}$$

FIR-System $n_1 = n_2$

Man erkennt auch: $a_{n_1} y_{a,n-n_1} = \sum_{\mu=n_1}^m b_{\mu} y_{e,n-\mu}$
 $\rightarrow$ Zur Berechnung von $y_{a,n-n_1}$ werden nur $y_{e,n-\mu}$ herangezogen $\rightarrow$ Nichtrekursives System

$$G(z) = \sum_{\mu=n_1}^{n_2} \frac{b_{\mu}}{a_{n_1}} z^{n_1-\mu} \quad g_n = \sum_{\mu=n_1}^{n_2} \frac{b_{\mu}}{a_{n_1}} \delta_{n+n_1-\mu}$$

Struktur FIR



IIR-System $n_1 < n_2$

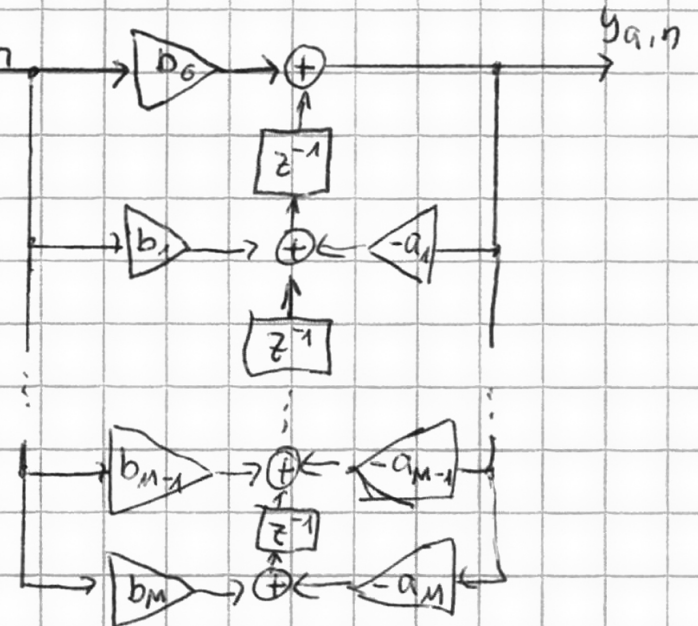
$$g_n = A_0 \delta_n + \sum_{v=1}^M A_v z_{\text{pol}}^{n-v} g_{n-1}$$

(Impulsant. unendlich lang, wenn ein Pol ungleich Null)

$\rightarrow$ autoregressives System

$$G(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^M b_{\mu} z^{M-\mu}}{\sum_{v=0}^M a_v z^{M-v}}$$

Struktur



Impulsinvarianz

- $g(t)$ wird mit t_s abgetastet: $g_n = g(n \cdot t_s)$
- Transf. in z -Bereich

$$G(s) \Rightarrow g(t) \Rightarrow g_n \Rightarrow G(z)$$

Bsp. $G(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \sigma(t) \Rightarrow g_n = \frac{1}{T} e^{-n t_s/T} \Rightarrow G(z) = \frac{1}{T} \frac{z}{z - e^{-t_s/T}}$

Pol-/Nullstellen\u00fcbertragung

- Pol/NS werden mit $z = e^{st_s}$ \u00fcbertragen. $\rightarrow$ Gleiches \u00dcbertragungsverhalten.
- NS im Unendlichen, $s_0 \rightarrow \infty$ werden auf $z_0 = -1$ \u00fcbertragen

Bsp. $G(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \Rightarrow s_0 = -\frac{1}{T} \Rightarrow z_{\infty} = e^{-t_s/T} \Rightarrow G(z) = k \cdot \frac{z+1}{z - e^{-t_s/T}}$
 $s_0 = \infty \Rightarrow z_0 = -1$

Miss immer gelten

$G(s=0) = 1 = G(z=1) \Rightarrow k = \frac{1 - e^{-t_s/T}}{z} \Rightarrow G(z) = \frac{1 - e^{-t_s/T}}{z} \cdot \frac{z+1}{z - e^{-t_s/T}}$

Allpass

$$\rightarrow f = \frac{p}{q} \text{ - Polynome}$$

- System mit gebrochenrationaler Übertragungsfunktion, mit Amplitudengang $A(f) = |G(f)| = 1$
- Zählergrad = Nennergrad, keine Pol-/Nullstellen auf imag. Achse

Minimalphasensystem (MPS)

- Stabiles System mit gebrochenrationaler Übertragungsfunktion, bei dem alle Nullstellen ≤ 0
- Kausale LTI-Systeme lassen sich in Minimalphasensystem und Allpass aufspalten

MPS besitzen für geg. $|G(f)|$ kleinstmögliche Gruppenlaufzeit

Strukturdarstellung kontinuierlicher LTI-Systeme

ARMA-Filter: Übertragungsfunktion besteht aus Zähler- und Nennerpolynom: $G(s) = \frac{\sum_{p=0}^m b_p s^p}{\sum_{v=0}^n a_v s^v}$



Numerische Integration

- Rechteckregel vorwärts: $S = \frac{z-1}{t_A}$
- Rechteckregel rückwärts: $S = \frac{z-1}{t_A \cdot z}$
- Trapezregel / bilineare Transfo.: $S = \frac{2}{t_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

Wird ~~kein~~ instabil werden, wenn Pole ^{oder} nicht im Inneren des Einheitskreises liegen.

- liegen alle Pole von $G(s)$ in der linken Halbebene ist das System stabil

Frequenzselektive Filter (S. 355)