Aufgabe 1

In einem Kästchen befinden sich drei gleich aussehende Würfel. Zwei der drei Würfel sind gezinkt, der dritte Würfel ist ideal und es sind folgende Auftrittswahrscheinlichkeiten bekannt:

1. Würfel: $P(\{6 \text{ wird gewürfelt}\}) = 1/3$
2. Würfel: $P(\{6 \text{ wird gewürfelt}\}) = 1/9$
3. Würfel: $P(\{6 \text{ wird gewürfelt}\}) = 1/6$

Es wird nun rein zufällig ein Würfel aus dem Kästchen genommen und einmal mit ihm gewürfelt. Es wird eine 6 gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um den

a) ersten Würfel handelt.

b) zweiten Würfel handelt.

c) dritten Würfel handelt.

Aufgabe 2

Die Wahrscheinlichkeit einer allergischen Reaktion gegen einen bestimmten Impfstoff beträgt 0,002. Bei einer Impfaktion werden 2000 Personen mit dem Impfstoff behandelt.

a) Erklären Sie, warum die Poissonverteilung eine gute Näherung für den oben geschilderten Fall ist.

Bestimmen Sie sowohl über die Poissonverteilung als auch über die Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass

b) genau drei Personen eine allergische Reaktion zeigen.

c) mindestens zwei Personen eine allergische Reaktion zeigen.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 3 \cdot e^{-3x} & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ an.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ der Zufallsvariablen $Y = 5 - 3X$.

c) Berechnen Sie die Dichte $f_Y(y)$.

d) Skizzieren Sie $f_Y(y)$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{Z} = (X;Y)^T$, die im Gebiet G aus Bild 1 gleichverteilt mit der Dichte $\frac{81}{16}$ ist.

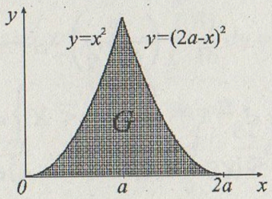


Bild 1: Gebiet G

a) Berechnen Sie die Konstante a ($a > 0$).

b) Berechnen Sie die Randverteilungen $F_X(x)$ und $F_Y(y)$.

c) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y abhängig voneinander sind.

Aufgabe 5

Die vorgeschriebene Maximallast eines Fahrstuhls beträgt 600 kg oder 8 Personen. Das Gewicht der einzelnen Personen, die den Fahrstuhl nutzen, ist näherungsweise normalverteilt mit $\mathcal{N}(70 \text{ kg}, (10 \text{ kg})^2)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) 8 Personen tatsächlich weniger als 600 kg wiegen.

b) auch 9 Personen den Fahrstuhl nutzen können, ohne das Maximalgewicht von 600 kg zu überschreiten.

c) 4 Personen zwischen 270 und 290 kg wiegen.

Aufgabe 6

Die Zufallsvariable $X(\xi)$ nimmt den Wert a mit der Wahrscheinlichkeit p und den Wert b mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ an ($b > a > 0$). Der stochastische Prozess $Y(\xi, t)$ sei wie folgt definiert:

$$Y(\xi, t) = \begin{cases} X(\xi) & \text{für } t < T \\ -X(\xi) & \text{für } t \geq T \end{cases}$$

mit $T > 0$.

a) Skizzieren Sie zwei verschiedene Realisierungen des stochastischen Prozesses $Y(\xi, t)$.

b) Berechnen Sie den Scharmittelwert $E\{Y(\xi, t)\}$ und die AKF $\varphi_{YY}(t_1, t_2)$ des stochastischen Prozesses.

c) Ist $Y(\xi, t)$ stark stationär, (schwach) stationär oder instationär (Begründung!)?

Musterlösung zur Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie SS 2001

Aufgabe 1

$$P(1./2./3.W) = P(\{1./2./3.\text{Würfel wird aus dem Kästchen genommen}\}) = \frac{1}{3}$$

a)

$$\begin{aligned} P(1.W|6) &= \frac{P(6|1.W)\cdot P(1.W)}{P(6)} \qquad (Bayes) \\ \text{mit } P(6) &= P(6|1.W)\cdot P(1.W) + P(6|2.W)\cdot P(2.W) + P(6|3.W)\cdot P(3.W) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6+2+3}{54} = \frac{11}{54}. \\ \Rightarrow P(1.W|6) &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{11}{54}} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

b)

$$P(2.W|6) = \frac{P(6|2.W)\cdot P(2.W)}{P(6)} = \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{11}{54}} = \frac{2}{11}$$

c)

$$P(3.W|6) = \frac{P(6|3.W)\cdot P(3.W)}{P(6)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{11}{54}} = \frac{3}{11}$$

Aufgabe 2

a) Da N sehr groß und p sehr klein ist, ist die Poissonverteilung eine gute Annäherung an die Binomialverteilung.

b) • Binomialverteilung:

$$\begin{aligned} P(X_N = K) &= \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} \quad \text{mit } N = 2000; K = 3 \\ &= \binom{2000}{3}(0{,}002)^3(0{,}998)^{1997} \approx 0{,}19546 \end{aligned}$$

• Poissonverteilung: $\lambda = p \cdot N = 4$

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!}\cdot e^{-\lambda} = \frac{4^3}{3!}\cdot e^{-4} \approx 0{,}19537$$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

• Binomialverteilung:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= (0{,}998)^{2000} \approx 0{,}01824 \\ P(X = 1) &= \binom{2000}{1}\cdot 0{,}002\cdot(0{,}998)^{1999} \approx 0{,}07312 \\ \Rightarrow P(X \geq 2) &\approx 0{,}90864 \end{aligned}$$

• Poissonverteilung:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{4^0}{0!}\cdot e^{-4} \approx 0{,}01832 \\ P(X = 1) &= \frac{4^1}{1!}\cdot e^{-4} \approx 0{,}07326 \\ \Rightarrow P(X \geq 2) &\approx 0{,}90842 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) X ist exponentialverteilt, d.h. mit (6.7-2) folgt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

b) Zunächst gilt (Y ist stetig!):

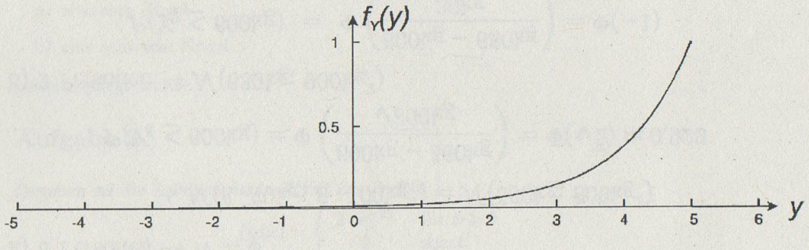
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{5 - 3X \leq y\} \\ &= P\left\{X \geq \frac{5-y}{3}\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{5-y}{3}\right\} \\ &= 1 - F_X\left(\frac{5-y}{3}\right), \end{aligned}$$

woraus sich mit der Fallunterscheidung aus $(*)$ ergibt

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{y-5} & \text{für } y < 5 \\ 1 & \text{für } y \geq 5 \end{cases}$$

c)

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y)\\
&= \begin{cases} e^{y-5} & \text{für } y < 5\\ 0 & \text{für } y \geq 5 \end{cases}
\end{aligned}
$$



d)

AUFGABE 4

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$$

$$2\cdot\int_0^a\int_0^{x^2}\frac{81}{16}\,dydx = 1$$

(Vorfaktor „2“ wegen Symmetrie und Gleichverteilung)

$$\int_0^a\left[\frac{81}{16}y\right]_0^{x^2}dx = \int_0^a\frac{81}{16}x^2\,dx = \left[\frac{81}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{27}{16}a^3 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

b) • Randdichte $f_X(x)$: (Fallunterscheidung)

$x < 0$ oder $x > 2a$ $\quad f_X(x) = 0$

$$0 \leq x < a \qquad f_X(x) = \int_0^{x^2}\frac{81}{16}\,dy = \left[\frac{81}{16}y\right]_0^{x^2} = \frac{81}{16}x^2$$

$$a \leq x \leq 2a \qquad f_X(x) = \int_0^{(2a-x)^2}\frac{81}{16}\,dy = \frac{81}{16}(2a-x)^2$$

• Randverteilung $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$:

$$
F_X(x) = \begin{cases}
0 & \text{für } x < 0\\
\int_0^x \frac{81}{16}t^2\,dt = \left[\frac{27}{16}t^3\right]_0^x = \frac{27}{16}x^3 & \text{für } 0 \leq x < a\\
\frac{27}{16}a^3 + \left[-\frac{27}{16}(2a-t)^3\right]_a^x = & \\
\frac{27}{16}a^3 + \frac{27}{16}a^3 - \frac{27}{16}(2a-x)^3 = & \\
1 - \frac{27}{16}\left(\frac{4}{3}-x\right)^3 & \text{für } a \leq x \leq 2a\\
1 & \text{für } 2a < x
\end{cases}
$$

• Randdichte $f_Y(y)$: (Fallunterscheidung)

$y < 0$ $\quad f_Y(y) = 0$

$$0 \leq y \leq a^2 \qquad f_Y(y) = 2\cdot\int_{\sqrt{y}}^{a}\frac{81}{16}\,dx = 2\cdot\left[\frac{81}{16}x\right]_{\sqrt{y}}^{a} = \frac{81}{16}(a-\sqrt{y}) = \frac{27}{4} - \frac{81}{8}\sqrt{y}$$

(Vorfaktor „2“ wegen Symmetrie und Gleichverteilung)

$a^2 < y$ $\quad f_Y(y) = 0$

- Randverteilung $F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ \int\limits_0^y \frac{27}{4} - \frac{81}{8}\sqrt{v}\,dv = & \\ \frac{27}{4}y - \left[\frac{81}{8}\cdot\frac{2}{3}v^{3/2}\right]_0^y = & \\ \frac{27}{4}y - \frac{27}{4}y^{3/2} & \text{für } 0 \le y \le a^2 \\ 1 & \text{für } a^2 < y \end{cases}$$

c) X und Y abhängig falls $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ an mind. einem Punkt gilt:

z.B. Punkt $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2}\right)$: $f_{X,Y}(x,y) = 0 \neq \frac{27}{16}\cdot\frac{a^2}{2^2}\cdot\left(\frac{27}{4} - \frac{81}{8}\left(\frac{a^2}{2}\right)^{1/2}\right)$

$\Rightarrow$ **X und Y abhängig!**

Aufgabe 5

Additionssatz der NV: $Y = \sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ mit X_n: $\mathcal{N}(\mu_n;\, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\mu_n;\, \sum\limits_{n=1}^{N}\sigma_n^2\right)$

a) 8 Personen $\to N = 8$

$$\Rightarrow \mathcal{N}(8\cdot 70\text{kg};\ 8\cdot 100\text{kg}^2) = \mathcal{N}(560\text{kg};\ 800\text{kg}^2)$$

$$P(Y_8 \le 600\text{kg}) = \Phi\left(\frac{600\text{kg} - 560\text{kg}}{\sqrt{800}\text{kg}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0{,}922$$

b) 9 Personen $\to \mathcal{N}(630\text{kg};\ 900\text{kg}^2)$

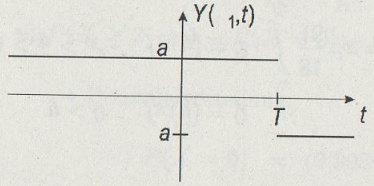
$$\begin{aligned} P(Y_9 \le 600\text{kg}) &= \Phi\left(\frac{600\text{kg} - 630\text{kg}}{30\text{kg}}\right) = \Phi(-1) \\ &= 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587 \end{aligned}$$

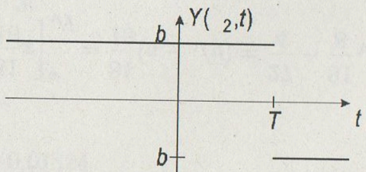
c) 4 Personen $\to \mathcal{N}(280\text{kg};\ 400\text{kg}^2)$

$$\begin{aligned} P(270\text{kg} < Y_4 \le 290\text{kg}) &= -\Phi\left(\frac{270\text{kg} - 280\text{kg}}{20\text{kg}}\right) + \Phi\left(\frac{290\text{kg} - 280\text{kg}}{20\text{kg}}\right) \\ &= -1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2\cdot\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\approx 0{,}3829 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Realisierungen von $Y(\xi, t)$:





b) • $E\{Y(\xi,t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_{t_n} f(y_{t_n})\,dy_{t_n}$

Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} t < T \quad & E\{Y(\xi,t)\} = p\cdot a + (1-p)\cdot b \\ t \ge T \quad & E\{Y(\xi,t)\} = -p\cdot a - (1-p)\cdot b \\ \Rightarrow \quad & E\{Y(\xi,t)\} = \begin{cases} pa + (1-p)b & \text{für } T > t \\ -pa - (1-p)b & \text{für } T \le t \end{cases} \end{aligned}$$

- AKF: $\varphi_{YY}(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\}$

Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} t_1,t_2 < T \quad & \varphi_{YY}(t_1,t_2) = a\cdot a\cdot p + b\cdot b\cdot(1-p) = a^2p + b^2(1-p) \\ t_1 \ge T,\ t_2 < T \quad & \varphi_{YY}(t_1,t_2) = -a^2p - b^2(1-p) \\ \text{oder } t_1 < T,\ t_2 \ge T \quad & \\ t_1,t_2 \ge T \quad & \varphi_{YY}(t_1,t_2) = (-a)\cdot(-a)\cdot p + (-b)\cdot(-b)\cdot(1-p) \\ & = a^2p + b^2(1-p) \\ \Rightarrow \varphi_{YY}(t_1,t_2) & = \begin{cases} a^2p + b^2(1-p) & \text{für } t_1,t_2 < T \text{ oder } t_1,t_2 \ge T \\ -a^2p - b^2(1-p) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

c) Da der Erwartungswert von $Y(\xi,t)$ nicht konstant ist, handelt es sich um einen **instationären Prozess!**