Aufgabe 1

Aus zwei verschiedenen Urnen wird je eine Kugel gezogen. Die erste Urne enthält drei rote Kugeln, zwei schwarze Kugeln und eine weiße Kugel. In der zweiten Urne befinden sich eine rote Kugel, eine schwarze Kugel und zwei blaue Kugeln.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zwei rote Kugeln zu ziehen, falls bekannt ist, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen wurden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen, falls bekannt ist, dass beide Kugeln verschiedene Farben haben?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen, falls bekannt ist, dass beide Kugeln verschiedene Farben haben?

Aufgabe 2

Ein Mann greift einmal in einen Korb mit Bällen und nimmt mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 einen, mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 zwei und mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 drei Bälle aus dem Korb. Die Bälle versucht er nun nacheinander, in einen zweiten Korb zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er den Korb trifft ist 0,4. Sie ist unabhängig von der Anzahl der gezogenen Bälle und der bisherigen Treffer. Die Zufallsvariable T bezeichnet die Summe der Treffer, die der Mann durch das Werfen aller gezogenen Bälle erzielt hat.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung (diskrete „Dichte") von T.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von T.

c) Es sei jetzt bekannt, dass der Mann genau einen Treffer erzielt hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei Bälle gezogen hat?

Aufgabe 3

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X;Y)^T$ sei in den Gebieten G_1 und G_2 mit $0 < a \leq b < a+2$ aus Bild 1 wie folgt verteilt

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot x & \text{für } (x,y) \in G_1, G_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

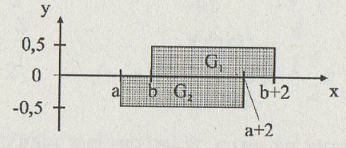


Bild 1: Gebiet G_1 und G_2

a) Berechnen Sie die Konstante c.

b) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

c) Zeigen Sie, dass X und Y *nicht für alle* a, b unabhängig sind.

d) Geben Sie alle Fälle an, in denen X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 4

Gegeben seien die beiden unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen X und Y mit $\mathcal{N}_X(4, 5)$ bzw. $\mathcal{N}_Y(-3, 2)$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X \geq 0$ ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $Y \geq 0$ ist.

c) Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X \geq -Y$ ist?

Aufgabe 5

Gegeben sei folgender zeitdiskreter Zufallsprozess $Y(n)$

$$Y(n) = X(n) \cdot X(n-1).$$

Dabei ist $X(n)$ ein zeitdiskreter stationärer Zufallsprozess, der mit der Wahrscheinlichkeit p den Wert a und mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert b annimmt $(b > a > 0)$ und dessen Werte für $n \neq k$ unkorreliert sind.

a) Skizzieren Sie eine Realisierung von $X(n)$ (zeichnen Sie mindestens 6 Werte von $X(n)$ ein). Skizzieren Sie nun $Y(n)$ für die entsprechende Realisierung.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Y(n)$.

c) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion von $Y(n)$.

Aufgabe 6

Gegeben sei eine homogene Markoffkette mit den vier Zuständen: $Z = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ mit $i,j \in Z$ der Markoffkette sind in der folgenden Übergangsmatrix zusammengefasst:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

a) In welchem Wertebereich müssen sich a, b, c und d befinden. Geben Sie den Zusammenhang zwischen a, b, c und d an.

b) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen für die Übergangsmatrix $\overline{P}$.

c) Wählen Sie a, b, c und d so, dass eine Markoffkette mit genau einem absorbierenden Zustand entsteht.

d) Es gelten nun die Werte für a, b, c und d aus c). Wie groß ist die mittlere Dauer bis zur Absorption für jeden der vier möglichen Startzustände: 1, 2, 3 und 4?

Musterlösung zur Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie SS 2002

Aufgabe 1

$R_{1/2} = \{$Ws. eine rote Kugel aus der 1./2. Urne zu ziehen$\}$

Urne1 :	Urne2 :
$P(R_1) = \frac{1}{2}$	$P(R_2) = \frac{1}{4}$
$P(S_1) = \frac{1}{3}$	$P(S_2) = \frac{1}{4}$
$P(W_1) = \frac{1}{6}$	$P(B_2) = \frac{1}{2}$

a) $G = \{$zwei gleichfarbige Kugeln wurden gezogen$\}$

$$P(R_1 \cap R_2 | G) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(G)}$$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

$$P(R_1 \cap R_2 | G) = \frac{1/8}{5/24} = \frac{3}{5}$$

b) $P(W_1|\overline{G}) = \dfrac{P(W_1 \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(W_1)}{P(\overline{G})} = \dfrac{1/6}{19/24} = \dfrac{4}{19}$

c)

$$P(R_1 \cup R_2|\overline{G}) = P(R_1|\overline{G}) + P(R_2|\overline{G}) - \underbrace{P((R_1 \cap R_2) \cap \overline{G})}_{=0}$$

$$P(R_1|\overline{G}) = \frac{P(\overline{G}|R_1) \cdot P(R_1)}{P(\overline{G})} = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}}{19/24} = \frac{9}{19}$$

$$P(R_2|\overline{G}) = \frac{P(\overline{G}|R_2) \cdot P(R_2)}{P(\overline{G})} = \frac{(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) \cdot \frac{1}{4}}{19/24} = \frac{3}{19}$$

$$P(R_1 \cup R_2|\overline{G}) = \frac{9}{19} + \frac{3}{19} = \frac{12}{19}$$

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable B bezeichnet die Anzahl der entnommenen Bälle.

a) Über die Binomialvert. $P(T|B) = \binom{B}{T} \cdot p^T \cdot (1-p)^{B-T}$ mit $p = 0{,}4$ folgt:

$P(B = 1) = 0{,}3$	$P(B = 2) = 0{,}5$
$P(T = 0\|B = 1) = 0{,}6$	$P(T = 0\|B = 2) = 0{,}6^2$
$P(T = 1\|B = 1) = 0{,}4$	$P(T = 1\|B = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 2$
	$P(T = 2\|B = 2) = 0{,}4^2$

$$P(B = 3) = 0{,}2$$
$$P(T = 0|B = 3) = 0{,}6^3$$
$$P(T = 1|B = 3) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2$$
$$P(T = 2|B = 3) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$$
$$P(T = 3|B = 3) = 0{,}4^3$$

Über die Formel von der totalen Ws. folgt:

$$P(T = 0) = P(T = 0|B = 1) \cdot P(B = 1) + P(T = 0|B = 2) \cdot P(B = 2) + P(T = 0|B = 3) \cdot P(B = 3) = 0{,}4032$$
$$P(T = 1) = 0{,}4464$$
$$P(T = 2) = 0{,}1376$$
$$P(T = 3) = 0{,}0128$$

b) Für Erwartungswert $E\{T\}$ und Varianz $D^2\{T\}$ gilt:

$$E\{T\} = 0{,}4032 \cdot 0 + 0{,}4464 \cdot 1 + 0{,}1376 \cdot 2 + 0{,}0128 \cdot 3 = 0{,}76$$
$$D^2\{T\} = 0{,}4032 \cdot (0 - 0{,}76)^2 + 0{,}4464 \cdot (1 - 0{,}76)^2 + 0{,}1376 \cdot (2 - 0{,}76)^2 + 0{,}0128 \cdot (3 - 0{,}76)^2 = 0{,}5344$$

c) Ws. mind. 2 Bälle gezogen zu haben unter der Voraussetzung eines Treffers:

$$P(B \geq 2|T=1) = P(B=2|T=1) + P(B=3|T=1)$$

$$P(B=2|T=1) = \frac{P(T=1|B=2)\cdot P(B=2)}{P(T=1)} = \frac{0{,}48\cdot 0{,}5}{0{,}4464} \approx 0{,}5376$$

$$P(B=3|T=1) = \frac{P(T=1|B=3)\cdot P(B=3)}{P(T=1)} = \frac{0{,}432\cdot 0{,}2}{0{,}4464} \approx 0{,}1935$$

$$P(B \geq 2|T=1) \approx 0{,}5376 + 0{,}1935 \approx 0{,}7312$$

Aufgabe 3

a) $\int\limits_{-0,5}^{0}\int\limits_{a}^{a+2} cx\,dx\,dy + \int\limits_{0}^{0,5}\int\limits_{b}^{b+2} cx\,dx\,dy$ muss 1 ergeben!

$$\Rightarrow 0{,}5\cdot c\cdot \frac{(a+2)^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0{,}5\cdot c\frac{(b+2)^2}{2} - \frac{b^2}{2}$$

$$= \frac{c}{4}\cdot(a^2+4a+4-a^2+b^2+4b-b^2+4) = c\cdot(a+b+2) \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{a+b+2}$$

b) Randdichte von X:

$$\begin{array}{ll} x<a & f_X(x)=0 \\ a\leq x<b & f_X(x)=\int\limits_{-0,5}^{0} cx\,dy = \frac{c}{2}x \\ b\leq x<a+2 & f_X(x)=\int\limits_{-0,5}^{0} cx\,dy + \int\limits_{0}^{0,5} cx\,dy = cx \\ a+2\leq x<b+2 & f_X(x)=\int\limits_{0}^{0,5} cx\,dy = \frac{c}{2}x \\ b+2\leq x & f_X(x)=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}x & a\leq x<b \\ cx & b\leq x<a+2 \\ \frac{c}{2}x & a+2\leq x<b+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randdichte von Y:

$$\begin{array}{ll} -0{,}5\leq y<0 & f_Y(y)=\int\limits_{a}^{a+2} cx\,dx = \frac{c}{2}\cdot(4a+4) = 2c\,(a+1) \\ 0\leq y\leq 0{,}5 & f_Y(y)=2c\,(b+1) \\ \text{sonst} & f_Y(y)=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2c\,(a+1) & -0{,}5\leq y<0 \\ 2c\,(b+1) & 0\leq y\leq 0{,}5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Bsp.: $a=\frac{1}{8}$, $b=1$, Punkt $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$
$f_{X,Y}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = 0 \neq \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2c\cdot 2 = f_X\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f_Y\left(\frac{1}{4}\right)$

d) $f_{X,Y}(x,y) = cx$ für $(x,y)\in G_1, G_2$
$0\leq y\leq 0{,}5$ und $b\leq x<a+2$ $\quad f_X(x)\cdot f_Y(y) = 2c\,(b+1)\cdot cx$
$\Rightarrow cx = 2c^2x(b+1) \quad \Rightarrow c=\frac{1}{2b+2} \quad \Rightarrow 2b+2 = a+b+2$
$\Rightarrow a=b$
Für $a=b$ fallen die Bereiche $(a\leq x<b)$ und $(a+2\leq x<b+2)$ für die Dichte $f_X(x)$ weg. Für den Bereich $(-0{,}5<y<0)$ gilt für $f_Y(y)$ eine analoge Herleitung. Außerhalb der Gebiete G_1, G_2 wird $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ und $f_{X,Y}(x,y)$ zu Null.
$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ für $a=b \Rightarrow X,Y$ unabhängig

Aufgabe 4

a) Über normierte NV: $P(x<z) = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(x\geq 0) = 1-\Phi\left(\frac{0-4}{\sqrt{5}}\right) \approx 1-(1-\Phi(1{,}789)) = \Phi(1{,}789) \approx 0{,}962$$

b) $P(y\geq 0) = 1-\Phi\left(\frac{0-(-3)}{\sqrt{2}}\right) \approx (1-\Phi(2{,}121)) \approx 1-0{,}983 = 0{,}017$

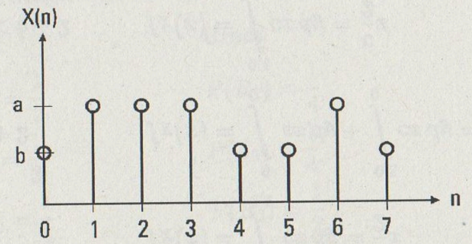
c) $\mathcal{N}_Z = (\mu_z, \sigma_z^2)$
$\mu_z = \mu_x + \mu_y = 4-3 = 1$
$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 5+2 = 7 \quad \Rightarrow \mathcal{N}_Z = (1,7)$
(Additionssatz der NV)

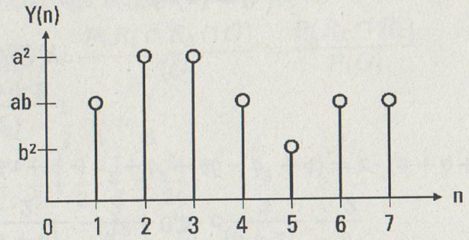
d) $P(X \geq -Y) = P(X + Y \geq 0) = P(Z \geq 0)$

$$P(Z \geq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-1}{\sqrt{7}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx \Phi(0{,}378) \approx 0{,}648$$

Aufgabe 5

a) Beispiel für Realisierung von $X(n)$ und $Y(n)$.





b) Für Erwartungswert $E\{Y(n)\}$ und Varianz $D^2\{Y(n)\}$ gilt:

$$E\{Y(n)\} = E\{X(n) \cdot X(n-1)\} = E\{X(n)\} \cdot E\{X(n-1)\} = [a \cdot p + b \cdot (1-p)]^2$$

$$D^2\{Y(n)\} = E\{(X(n) \cdot X(n-1) - E\{Y(n)\})^2\} = E\{X^2(n) \cdot X^2(n-1)\}$$

$$-E^2\{Y(n)\} = \left[a^2 \cdot p + b^2 \cdot (1-p)\right]^2 - [a \cdot p + b \cdot (1-p)]^4$$

c) Für die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(n_1, n_2)$ gilt:

$$\varphi_{YY}(n_1, n_2) = E\{X(n_1) \cdot X(n_1 - 1) \cdot X(n_2) \cdot X(n_2 - 1)\}$$

für $|n_1 - n_2| \geq 2$:

$$\varphi_{YY}(n_1, n_2) = E\{Y(n_1)\} \cdot E\{Y(n_2)\} = E^2\{Y(n)\} = [ap + b\,(1-p)]^2$$

für $|n_1 - n_2| = 1$:

$$\varphi_{YY}(n_1, n_2) = E\{X(n_1)\} \cdot E\{X^2(n_1 - 1)\} \cdot E\{X(n_1 - 2)\}$$

$$= [ap + b\,(1-p)]^2 \cdot (a^2 \cdot p + b^2(1-p))$$

für $|n_1 - n_2| = 0$:

$$\varphi_{YY}(n_1, n_1) = E\{X^2(n_1) \cdot X^2(n_1 - 1)\} = E\{X^2(n_1)\} \cdot E\{X^2(n_1 - 1)\}$$

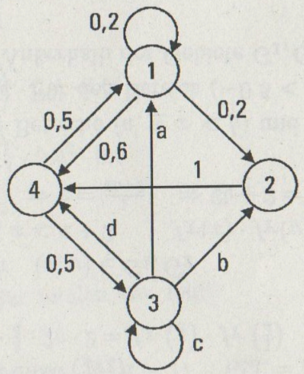
$$= [a^2 p + b^2(1-p)]^2$$

Aufgabe 6

a) Folgende zwei Bedingungen müssen gelten:

$a, b, c, d \in [0, 1]$ und $a + b + c + d = 1$

b) Übergangsgraph:



c) $a = b = d = 0$ und $c = 1$

$\Rightarrow$ Zustand 3 ist ein absorbierender Zustand.

d) aus (9.3-7): $m_i = 1 + \sum_{k=1}^{4} p_{ik}\, m_{ik}$ und $m_3 = 0$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} m_1 = 1 + 0{,}2m_1 + 0{,}2m_2 + 0{,}6m_4 \\ m_2 = 1 + m_4 = 2 + 0{,}5m_1 \\ m_3 = 0 \\ m_4 = 1 + 0{,}5m_1 + 0{,}5m_3 = 1 + 0{,}5m_1 \end{array}$$

$$m_1 = 1 + 0{,}2m_1 + 0{,}4 + 0{,}1m_1 + 0{,}6 + 0{,}3m_1 \qquad \Rightarrow m_1 = 5$$

$$m_2 = 4{,}5 \qquad m_3 = 0 \qquad m_4 = 3{,}5$$