Aufgabe 1

Morgens zwischen 8:00 Uhr und 8:10 Uhr treffen zufällig und unabhängig voneinander 24 Personen an einer Bushaltestelle ein.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 3 der 24 Personen wischen 8:05 Uhr und 8:07 Uhr eintreffen?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 24 Personen zwischen 8:06 Uhr und 8:07 Uhr eintreffen.

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot x} & \text{für } 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c.

b) Skizzieren Sie $f_X(x)$.

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X und tragen Sie $\mathrm{E}\{X\}$ in die Skizze b) ein. (Alle Rechnungen auf 3 Nachkommastellen genau.)

Aufgabe 3

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien normalverteilt und auch der Vektor $\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ besitze eine Normalverteilung mit dem Erwartungsvektor $\vec{\mu} = (2,1)^T$ und der Kovarianzmatrix:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ von $\vec{X}$ an.

b) Sind X_1 und X_2 stochastisch abhängig? (Begründung)

c) Skizzieren Sie die Randdichte $f_{X_1}(x_1)$.

Aufgabe 4

Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ kommt in den Zeitabständen Δt_i jeweils eine Spammail in Ihrer Mailbox an. Insgesamt finden Sie für t_{ges} 100 Spammails. Die Zeitabstände Δt_i sind unabhängig voneinander und exponentialverteilt mit $\lambda = 0{,}0013 s^{-1}$ und der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{T_i}(t_i)$. Der Zeitpunkt t_{ges} bezeichne die Ankunftszeit der hundertsten Spammail.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{T_{ges}}(t_{ges})$ von T_{ges} geschrieben werden kann als

$$f_{T_{ges}}(t_{ges}) = f_{T_1}(t_1) * f_{T_2}(t_2) * \cdots * f_{T_{100}}(t_{100}),$$

wobei * den Faltungsoperator representiert.

b) Berechnen Sie approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass Sie innerhalb von 24 Stunden alle an Sie gesendeten Spammails auch wirklich empfangen.

Aufgabe 5

Eine Irrfahrt über der Zustandsmenge $Z = \{1, 2, 3\}$ werde durch eine homogene Markoffkette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

beschrieben.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

b) Bestimmen Sie (exakt) die Zustandsverteilung zum Zeitpunkt 4, wenn die Irrfahrt im Zustand 3 beginnt.

Aufgabe 6

Gegeben sei der stochastische Prozess $Z(\xi, t) = A_x(\xi, t)\cos(\omega t + \phi_x) + jA_y(\xi, t)\sin(\omega t + \phi_y)$. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(A_x(\xi, t_1), A_x(\xi, t_2), \cdots, A_x(\xi, t_N))$ gilt für $\forall t$ und $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$f(A_x(\xi, t_1), A_x(\xi, t_2), \cdots, A_x(\xi, t_N)) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^N} & (A_x(\xi, t_1), A_x(\xi, t_2), \cdots, A_x(\xi, t_N) \in [0, 2\pi]^N \\ 0 & sonst \end{cases}$$

a) Ist der Prozess $A_x(\xi, t)$ stark stationär, schwach stationär oder instationär? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Unter welcher Bedingung wird die Autokorrelation $\phi_{ZZ}(t_1, t_2)$ für $\forall t_1$, t_2 reell? In welcher Beziehung müssen $A_x(\xi, t)$ und $A_y(\xi, t)$ zueinander stehen?

Musterlösung WT-Klausur SS 04

Aufgabe 1

Das Eintreffen einer Person wird als zufälliges Ereignis interpretiert. Die Wahrscheinlichkeit im Intervall $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ einzutreffen ist

$$P(A) = p = \frac{t_1 - t_2}{T}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in (t_1, t_2) genau n von N Personen eintreffen, ist dann

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Hier gilt $T = 10$ und $N = 24$.

a) $t_2 - t_1 = 2 \Rightarrow p = 0,2$

$$\begin{aligned} P(n \geq 3) &= 1 - P(n < 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) \\ &= 1 - 0,005 - 0,028 - 0,081 = 0,886 \end{aligned}$$

b)$t_2 - t_1 = 3 \Rightarrow p = 0,3$

$$P(24) = \binom{24}{24} 0,3^{24} \cdot 0,7^0 = 2,82 \cdot 10^{-13}$$

Aufgabe 2

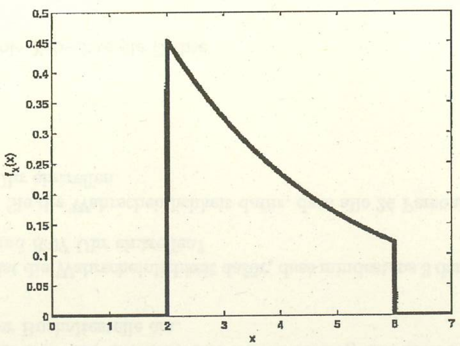
a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow c^{-1} = \int_2^6 e^{-\frac{1}{3}x} dx = 1,134$$

$\Rightarrow c = 0,882$

b)



c)

$$\begin{aligned} E\{x\} &= c \int_2^6 x e^{-\frac{x}{3}} dx \\ &= 9 \cdot c \cdot (-3) e^{-2} + 9 \cdot c \cdot \frac{5}{3} e^{-\frac{2}{3}} = 3,570 \\ D^2\{X\} &= E\{X^2\} - E^2\{X\} \\ E\{X^2\} &= c \int_2^6 x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx = 13,960 \\ \Rightarrow D^2\{X\} &= 15,828 \cdot c - 12,745 = 1,215 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es ist geschickt, zuerst b) zu beantworten: Wegen

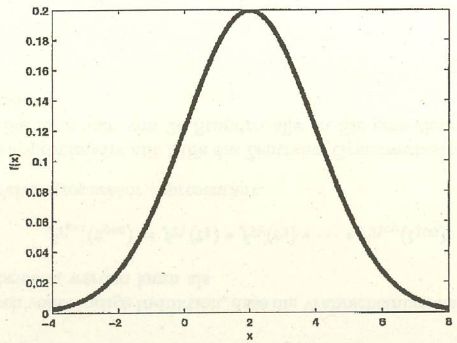
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_2\sigma_1 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

folgt $\sigma_1 = 2$ und $\sigma_2 = 1$ sowie insbesondere $\rho = 0$. X_1 und X_2 sind daher unkorreliert. Da sowohl X_1 und X_2 als auch $\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ Normalverteilungen besitzen, folgt aus der Unkorreliertheit von X_1 und X_2 ihre stochastische Unabhängigkeit.

c) Mit der Lösung von b) und $\mu = (2, 1)^T$ folgt

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-2)^2}{8}}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-1)^2}{2}}$$



a) Es gilt

$$\begin{aligned} f_{\vec{X}}(\vec{x}) &= f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-2)^2}{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_2-1)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{8}(x_1^2+4x_2^2-4x_1-8x_2+8)} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

n=2 $t_{ges}=\sum_{i=1}^{2}t_i \Rightarrow f_{T_{ges}}(t_{ges})=f_{T_2}(t_2)*f_{T_1}(t_1)$

n=3 $t_{ges}=\sum_{i=1}^{3}t_i=\sum_{i=1}^{2}t_i+t_3=t_{ges,2}+t_3 \Rightarrow f_{T_{ges}}(t_{ges})=f_{T_{ges,2}}(t_{ges,2})*f_{T_3}(t_3)=f_{T_3}(t_3)*f_{T_2}(t_2)*f_{T_1}(t_1)$

n=k $t_{ges}=\sum_{i=1}^{k}t_i \Rightarrow f_{T_{ges}}(t_{ges})=f_{T_k}(t_k)*f_{T_{k-1}}(t_{k-1})*\ldots*f_{T_1}(t_1)$

k→ k+1 $t_{ges}=\sum_{i=1}^{k+1}t_i=\sum_{i=1}^{k}t_i+t_{k+1}=t_{ges,k}+t_{k+1} \Rightarrow f_{T_{ges}}(t_{ges})=f_{T_{ges,k}}(t_{ges,k})*f_{T_{k+1}}(t_{k+1})=f_{T_1}(t_1)*\ldots f_{T_k}(t_k)*f_{T_{k+1}}(t_{k+1})q.e.d.$

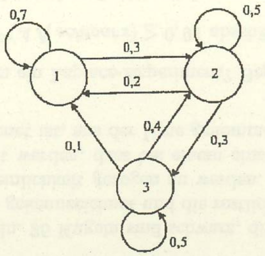
b)

$$E\{T_i\}=\frac{1}{\lambda},D^2(T_i)=\frac{1}{\lambda^2},N=100$$

$$\begin{aligned} P(t_{ges}<24h) &= P\left(\frac{t_{ges}-NE\{T_i\}}{\sqrt{N}D\{T_i\}}\le\frac{86400s-NE\{T_i\}}{\sqrt{N}D\{T_i\}}\right) \\ &= P\left(\frac{t_{ges}-\frac{100s}{0{,}0013}}{\frac{10s}{0{,}0013}}\le\frac{t_{ges}-\frac{100s}{0{,}0013}}{\frac{10s}{0{,}0013}}\right) \\ &\approx \lim_{N\to\infty}P\left(\frac{t_{ges}-\frac{100s}{0{,}0013}}{\frac{10s}{0{,}0013}}\le\frac{t_{ges}-\frac{100s}{0{,}0013}}{\frac{10s}{0{,}0013}}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}P\left(\frac{t_{ges}-\frac{100s}{0{,}0013}}{\frac{10s}{0{,}0013}}\le 1{,}23\right)=\Phi(1{,}23)=0{,}8907 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a)



b) Es ist

$$P^2=\begin{bmatrix}0{,}55 & 0{,}36 & 0{,}09\\ 0{,}27 & 0{,}43 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}43 & 0{,}37\end{bmatrix}$$

und

$$P^4=\begin{bmatrix}0{,}4177 & 0{,}3915 & 0{,}1908\\ 0{,}3246 & 0{,}4111 & 0{,}2643\\ 0{,}3001 & 0{,}4160 & 0{,}2839\end{bmatrix}$$

und damit

$$\vec{p}(4)=\vec{p}(0)P^4=(0{,}3001;0{,}4160;0{,}2839)^T$$

Aufgabe 6

a)

$$f(A_x(\xi,t_1),A_x(\xi,t_2),\cdots,A_x(\xi,t_N))=f(A_x(\xi,t_1+h),A_x(\xi,t_2+h),\cdots,A_x(\xi,t_N+h))\forall N,t,h$$

Dichte ist nicht zeitabhängig!⇒ stark stationär

b)

$$\begin{aligned} \phi_{ZZ}(t_1,t_2) &= E\{Z(t_1)Z(t_2)^*\} \\ &= E\{(A_x(t_1)\cos(\omega t_1+\phi_x)+jA_y(t_1)\sin(\omega t_1+\phi_y)) \\ &\cdot (A_x(t_2)\cos(\omega t_2+\phi_x)+jA_y(t_2)\sin(\omega t_2+\phi_y))\} \\ &= E\{(A_x(t_1)(A_x(t_2)\}\cos(\omega t_1+\phi_x)\cos(\omega t_2+\phi_x) \\ &- \underbrace{j\,E\{(A_x(t_1)(A_y(t_2)\}\cos(\omega t_1+\phi_x)\sin(\omega t_2+\phi_y)}_{I} \\ &+ \underbrace{j\,E\{(A_x(t_2)(A_y(t_1)\}\cos(\omega t_2+\phi_x)\sin(\omega t_1+\phi_y)}_{II} \\ &+ E\{(A_y(t_1)(A_y(t_2)\sin(\omega t_1+\phi_y)\sin(\omega t_2+\phi_y) \end{aligned}$$

$$\phi_{ZZ}\in\mathcal{R}\Rightarrow I=II\forall t_1,t_2\Rightarrow E\{(A_x(t_1)(A_y(t_2)\}=E\{(A_x(t_2)(A_y(t_1)\}=0$$

⇒ A_x und A_y sind orthogonal.