Aufgabe 1

a) Ein Sender überträgt binäre Daten, und zwar eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ und eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit p. Der Empfänger entscheidet mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit ϵ. A_i bezeichne das Ereignis „i wurde gesendet", B_j das Ereignis „j wurde empfangen", $i, j \in \{0; 1\}$.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P\{A_i \cap B_j\}$ für alle $i, j \in \{0; 1\}$ an.

b) Jetzt sei $p = 0,5$: Für welche Werte von ϵ entscheidet der Empfänger aufgrund der größeren a posteriori Wahrscheinlichkeit auf eine 1, wenn eine 0 gesendet wurde?

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Gas in einem abgeschlossenen Raum. Das Gas besteht aus N Teilchen. Idealerweise wird $N \to \infty$ angenommen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß zum Zeitpunkt t_0 genau n Teilchen ($n \geq 2$) zusammenstoßen, sei P_n und ist um den Faktor $\frac{a}{n}$ höher als die Wahrscheinlichkeit für die Kollision von $n-1$ Teilchen. Die Wahrscheinlichkeit, daß kein Zusammenstoß erfolgt, d.h. $n = 1$, ist $P_1 = a$.

a) Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit P_n in Abhängigkeit von a und n her.

b) Berechnen Sie a.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als 3 Teilchen gleichzeitig zusammenstoßen

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X_N beschreibe den Wurf einer fairen Münze in $N = 6$ voneinander unabhängigen Versuchen.

a) Nach dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert für $N \to \infty$ die Verteilungsfunktion von X_N gegen die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable Y. Geben Sie die Dichte $f_Y(y)$ an!

b) Berechnen Sie auf 3 Stellen hinter dem Komma die Abweichungen der Wahrscheinlichkeiten $k = 2, 3, 4$ mal „Kopf" zu werfen von den Werten von $f_Y(y)$ für $y = 1, 2, 3$.

c) Zeichnen Sie $f_Y(y)$.

Aufgabe 4

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)^T$ sei über der im Bild 1 grau hinterlegten Fläche G gleichverteilt.

a) Bestimmen Sie die Dichte $f_{X,Y}(x, y)$.

b) Berechnen Sie die Randdichte $f_Y(y)$.

c) Skizzieren Sie die Randdichte $f_Y(y)$.

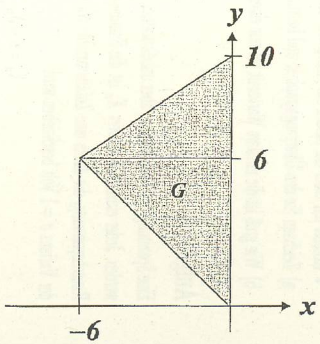

Bild 1: Aufgabe 4

Aufgabe 5

Ein Fußballspieler steht in einer Entfernung c vor einer Torwand (siehe Bild 2). Der Spieler schießt entweder mit links und zielt auf die obere Öffnung 1 oder er schießt mit rechts und zielt auf die untere Öffnung 2. Beide Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. Der Treffer $\vec{X} = (X, Y)^T$ mit dem linken Fuß auf die Torwandebene ist normalverteilt $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ mit $\vec{\mu} = (a_1, b_1)^T$ und $\Sigma = diag\left(\sigma_1^2, \sigma_1^2\right)$. Der Treffer mit dem rechten Fuß auf die Torwandebene ist auf der Torwand gleichverteilt. Die Torwand ist in horizontaler x-Richtung von 0 bis

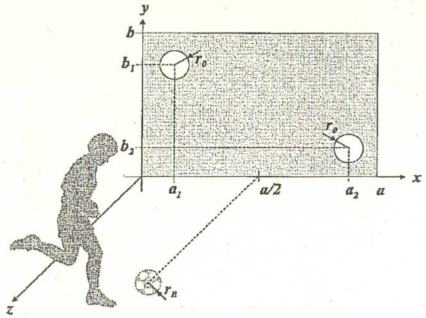

Bild 2: Torwandbeschreibung zu Aufgabe 5

a ausgedehnt und in y-Richtung von 0 bis b. Der Radius beider Öffnungen beträgt jeweils r_0. Der Mittelpunkt der Öffnung 1 besitzt die Koordinaten (a_1, b_1), diejenigen von Öffnung 2 betragen (a_2, b_2). Der Ball wird als ideale, inelastische Kugel mit Radius r_B ($r_B < r_0$) angenommen

Werte: $a = 3m$; $b = 2m$; $a_1 = 0,5m$; $b_1 = 1,5m$; $a_2 = 2,5m$; $b_2 = 0,5m$; $r_0 = 0,25m$; $r_B = 0,1m$; $\sigma_1 = 0,20m$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(t_1|1)$, daß der Fußballspieler die Öffnung 1 trifft, falls er den Ball mit dem linken Fuß spielt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(t_1)$, daß der Spieler die Öffnung 1 trifft.

Aufgabe 6

In einer Fabrik produziert eine Maschine kontinuierlich. Die Maschine fällt im Mittel $\lambda = 0,125/h$ aus. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist proportional der Zeit.

a) Mit welchem stochastischen Prozeß kann die Aufgabe beschrieben werden?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X < 3)$, daß die Maschine höchstens 3 Mal in 24 h ausfällt.

c) Mit $P = 0,4$ fällt die Maschine in $16h$ genau 1 Mal aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Maschine in $24h$ genau 2 Mal ausfällt, wobei genau 1 Ausfall nur in den ersten $16h$ passieren darf.

d) Erreicht man eine geringere Ausfallwahrscheinlichkeit, falls N unabhängige Maschinen mit einer mittleren Ausfallrate $\lambda_m = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n$ parallel die Zeit T arbeiten läßt oder eine Maschine mit einer Ausfallrate λ_m und einer Arbeitszeit von NT einsetzt? Begründen Sie ihre Antwort formal.

Musterlösung zur Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie SS 2005

Aufgabe 1

a) $P\{A_0 \cap B_0\} = (1-p)(1-\epsilon)$
$P\{A_0 \cap B_1\} = (1-p)\epsilon$
$P\{A_1 \cap B_0\} = p\epsilon$
$P\{A_1 \cap B_1\} = p(1-\epsilon)$

b) $P\{B_0\} = P\{B_0|A_0\}P\{A_0\} + P\{B_0|A_1\}P\{A_1\} = 0{,}5$
$P\{A_1|B_0\} = \frac{P\{B_0|A_1\}P\{A_1\}}{P\{B_0\}} = \epsilon$
$P\{A_0|B_0\} = \frac{P\{B_0|A_0\}P\{A_0\}}{P\{B_0\}} = 1-\epsilon$
$\rightarrow \epsilon > 0{,}5$

Aufgabe 2

a) $n = 1 \rightarrow P_1 = a$
$n = 2 \rightarrow P_2 = \frac{a}{2}P_1 = \frac{a^2}{2}$
$n = 3 \rightarrow P_3 = \frac{a}{3}P_3 = \frac{a^3}{3!}$
$V.I.\ P_n = \frac{a}{n}P_{n-1} \wedge P_{n-1} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$
$n-1 \rightarrow n \rightarrow P_n = \frac{a}{n}P_{n-1} = \frac{a^n}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} + 1 - 1 = e^a - 1$
$\rightarrow a = ln2$

c) $P(n > 3) = 1 - a - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3!} = 0{,}0111$

Aufgabe 3

a) $X_N = \sum_{n=1}^{N} X_n \wedge Binomialverteilung \rightarrow E\{X_N\} = Np, D^2\{X_N\} = Np(1-p)$
Mit N=6 und p=0,5 $\rightarrow E\{X_6\} = 3, D^2\{X_6\} = 1{,}5$
Nach Satz von Moivre-Laplace:
$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{(y-3)^2}{3}}$

b) $P\{X_6 = k\} = \binom{6}{k} \cdot 2^{-6}$

y=k	2	3	4
$P\{X_6 = k\}$	0,2344	0,3125	0,2344
$f_Y(y)$	0,2334	0,3257	0,2334
$\lvert\Delta\rvert$	0,001	0,013	0,001

c)

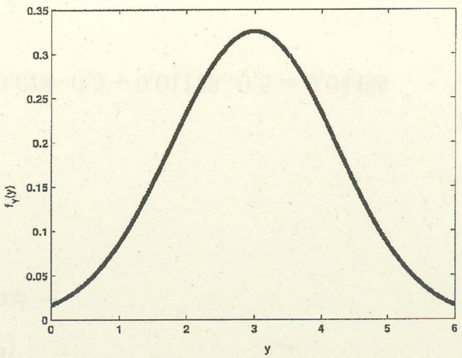

Bild 1. Lösung 3c)

Aufgabe 4

a) Dreiecksfläche $F = 30$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{30} & : \text{für}\{-6 \le x \le 0\} \wedge \{-x \le y \le \frac{2}{3}x + 10\} \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

i) $y < 0 \wedge y > 10$: $f_Y(y) = 0$
ii) $0 \le y \le 6$: $f_Y(y) = \int_{-y}^{0} \frac{1}{30}dx = \frac{1}{30}y$
iii) $6 \le y \le 10$: $f_Y(y) = \int_{-\frac{2}{3}y-15}^{0} \frac{1}{30}dx = -\frac{1}{20}y + 0{,}5$

c)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & : \text{für } y < 0 \\ \frac{1}{30} & : \text{für } 0 \le y \le 6 \\ -\frac{1}{20}y + 0{,}5 & : \text{für } 6 \le y \le 10 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

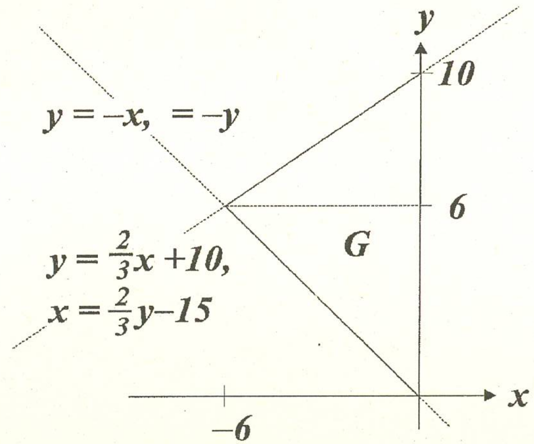

Bild 2. Lösung 4b)

c)

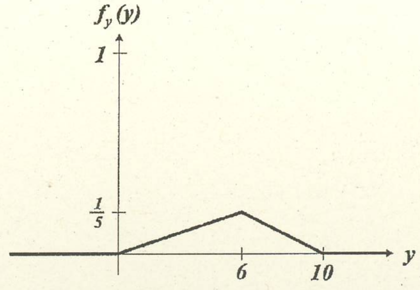

Bild 3. Lösung 4c)

Aufgabe 5

a) $N(\vec{\mu},\Sigma)$ mit $\vec{\mu} = (a_1,b_1)^T$ und $\Sigma = diag(\sigma_1^2,\sigma_1^2) \rightarrow \rho = 0 \rightarrow X,Y$ unabhängig

$\rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a_1)^2+(y-b_1)^2\right)}$

mit $x = (r - a_1)\cos\phi \wedge y = (r - b_1)\sin\phi \rightarrow$

$f_R(r) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} r$

$P(t_1|1) = \int_0^{r_T} f_R(r)dr = 0{,}078$

b) gleichverteilt $\wedge a = 3m \wedge b = 2m$

$P(t_1|2) = \frac{r_T^2 \pi}{ab} = 0{,}01178$

$P(t_1) = P(t_1|1)P(1) + P(t_1|2)P(2) = 0{,}078 \cdot 0{,}5 + 0{,}01178 \cdot 0{,}5 = 0{,}04489$

Aufgabe 6

a) Poissonprozeß

b) $P(X = l) = \frac{(\lambda 24h)^l}{l!} e^{-\lambda 24h} = \frac{(3)^l}{l!} e^{-3}$

$P = e^{-3}(1 + 3 + 4{,}5) = 0{,}423$

c) $P\left(X_{0<t<16h} = 1 \wedge X_{16h<t<24h} = 1\right) = P\left(X_{16h<t<24h} = 1 | X_{0<t<16h} = 1\right) P\left(X_{0<t<16h}\right.$

$0{,}4 \cdot e^{-1} = 0{,}147$

d) $\lambda_m = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n$

$\frac{(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n T)^l}{l!} e^{-\sum_{n=1}^{N} \lambda_n T} = \frac{(N\lambda_m T)^l}{l!} e^{-N\lambda_m T} = \frac{(\lambda_m (NT))^l}{l!} e^{-\lambda_m (NT)}$