Aufgabe 1

In einer Geldbörse befinden sich drei Münzen. Die erste zeigt auf beiden Seiten einen Kopf, die zweite zeigt beim Werfen Zahl und Kopf mit gleicher Wahrscheinlichkeit und die dritte ist so beschaffen, dass sie beim Werfen mit Wahrscheinlichkeit 0,8 Kopf und mit Wahrscheinlichkeit 0,2 Zahl zeigt.

a) Der Börse wird zufällig eine Münze entnommen und geworfen. Nach dem Wurf zeigt sie Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es die erste Münze?

b) Es werden zwei Münzen **gleichzeitig** aus der Börse entnommen und geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münzen Kopf und Zahl zeigen?

Aufgabe 2

Bei der Übertragung von $N = 800$ Bits, die von Bit zu Bit stochastisch unabhänig voneinander erfolgt, wird jedes Bit mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 falsch empfangen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 1,5 % der Bits falsch empfangen werden?
(Hinweis: Denken Sie an den Satz von DE MOIVRE-LAPLACE).

b) Die oben genannte Übertragung erfolge in 16-Bit-Wörtern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Wort mehr als einen Bitfehler enthält, wenn man weiß, dass bei der Übertragung insgesamt genau 4 Bitfehler aufgetreten sind?

Aufgabe 3

X sei eine im Intervall $[-\pi, \pi)$ gleichverteilte Zufallsvariable und $a > 0$ eine reelle Konstante.

a) Berechnen Sie Dichte und Verteilungsfunktion von $Y = a\cos X$.

b) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Y?

Aufgabe 4

Die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{Z} = (X, Y)^T$ habe eine Gleichverteilung im Gebiet $x^2 + y^2 \le 1$.

a) Skizzieren Sie die Projektion der Dichte $f_{\vec{Z}}(\vec{z}) = f_{\vec{Z}}(x; y)$ auf die x-y-Ebene.

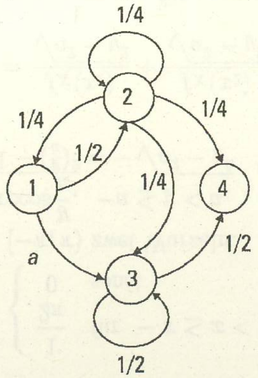
b) Berechnen Sie die Randdichte $f_X(x)$ der Zufallsvariable X sowie deren Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

Aufgabe 5

Durch $X(t) = R(\xi)\cos(\omega t + \Theta(\xi))$ ist ein stochastischer Prozess gegeben. Die Zufallsvariablen R und Θ seien unabhängig und ω sei eine reelle Konstante. Die ersten beiden Momente von R existieren. Θ sei im Intervall $[-\pi, \pi)$ gleichverteilt. Zeigen Sie, dass der Prozess $X(t)$ (schwach) stationär ist!

Aufgabe 6

Gegeben sei folgender Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette. Der Anfangszustand zum Zeitpunkt $t = 0$ ist 1.



a) Geben Sie die Übergangsmatrix an. Welcher Wert muss für a gesetzt werden?

b) Welcher Zustand ist nach drei Schritten ($t = 3$) am wahrscheinlichsten?

c) Wie groß ist die mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand 4?

AUFGABE 1

a) $M_j = \{\text{Münze j wird gezogen}\}$
$K \;= \{\text{Kopf wird geworfen}\}$

$$P(K|M_1) = 1, \quad P(K|M_2) = \frac{1}{2}, \quad P(K|M_3) = 0,8$$

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(M_1|K) \overset{Bayes}{=} \frac{P(K|M_1)\cdot P(M_1)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(K|M_j)P(M_j)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0,8\cdot\frac{1}{3}} \approx 0,4348$$

b) $A_1 = (M_1, M_2), \quad A_2 = (M_2, M_3), \quad A_3 = (M_1, M_3)$

$$P(A_i) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Kopf und Zahl}) = P((K,Z)) + P((Z,K))$$
$$= \sum_{j=1}^{3} P((K|Z)/A_i)\cdot P(A_i) + \sum_{j=1}^{3} P((Z|K)/A_i)\cdot P(A_i)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0,2 + 1\cdot 0,2 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 0,8 + 0\right) = \frac{1,2}{3} = 0,4$$

AUFGABE 2

a) S_N: Anzahl des falsch empfangenen Bits ist binomial verteilt mit $N = 800$ und $p = 0,01$

$$P(S_N \le 12) = \sum_{i=0}^{12}\binom{800}{i}(0,01)^i(0,99)^{800-i}$$

1

Approximativ poissonverteilt mit $\lambda = p\cdot N = 8$ oder mit Satz (7.7-5) ist $\frac{S_N - N\cdot p}{\sqrt{N\cdot p\cdot(1-p)}}$ approximativ $\mathcal{N}(0;1)$ - verteilt:

$$P(S_N \le 12) = P\left(\frac{S_N - N\cdot p}{\sqrt{N\cdot p\cdot(1-p)}} \le \frac{12-8}{\sqrt{7,92}}\right) = \Phi(1,42) \overset{Tabelle}{\approx} 0,922196$$

b) 800 Bits, 16-Bit-Wörter $\longrightarrow$ 50 Wörter

A=$\{$Aus 50 Wörter 4 ohne Wiederholung falsch empfangen$\}$ entspricht Variation ohne Wiederholung

$$P(A) = \frac{4!\cdot\binom{50}{4}}{50^4} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}{50^4} \approx 0,884352$$

AUFGABE 3

a) Die Dicht von X ist:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{für } -\pi \le x < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$y = g(x) = a\cos x$ hat in $[-\pi, \pi)$ zwei Wurzeln:

$x_1 = \arccos\frac{y}{a}$, $x_2 = -\arccos\frac{y}{a}$, $-a \le y < a$

$g'(x) = -a\sin x = -a\sqrt{1-(\frac{y}{a})^2} = -\sqrt{a^2-y^2}$

Mit Gleichung (4.2-9):

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{f_X(x_2)}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}} & \text{für } -a \le y < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,du = \int_{-a}^{u} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-u^2}}\,du \\ &= \left[\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{u}{a}\right]_{-a}^{u} = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{y}{a} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -a \\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{y}{a} + \dfrac{1}{2} & \text{für } -a \le y < a \\ 1 & \text{für } y \ge a \end{cases}$$

b) $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(y)\,dy$ mit $f(y)$ aus a) Teil

$$\textbf{oder } E(Y) = E(a\cos x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a\cos x \frac{1}{2\pi}\,dx$$

$$= \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 0 = E(Y)$$

$$D^2(Y) = E(Y^2) - \underbrace{E^2(Y)}_{=0}$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} a^2\cos^2 x\,dx = \frac{a^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

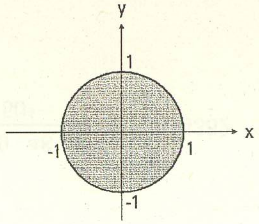
$$\Rightarrow D^2(Y) = \frac{a^2}{2}$$

WT - H2007

AUFGABE 4

a)

$$f_{\vec{z}}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{für } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



b)

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{für } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{x} \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{1}{\pi}\left[u\sqrt{1-u^2} + \arcsin u\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right] + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ \dfrac{1}{\pi}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right] + \dfrac{1}{2} & \text{für } -1 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

AUFGABE 5

a) Nach Definition (8.2-3) muß gezeigt werden:

- $E\{X(t)\} = \text{konst. } \forall\, t$
- $\varphi_{XX}(t_1,t_2) = \varphi_{XX}(t_2-t_1) = \varphi_{XX}(\tau)$

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= E\{R\cos(\omega t+\Theta)\} \overset{R,\Phi \text{ unabh.}}{=} E\{R\}\cdot E\{\cos(\omega t+\Theta)\} \\ &= E\{R\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t+\vartheta)\,d\vartheta \\ &= E\{R\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\omega t}^{\pi+\omega t} \cos x\,dx = 0 = \text{konst. } \forall\, t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(t_1,t_2) &= E\{R\cos(\omega t_1+\Theta)R\cos(\omega t_2+\Theta)\} \\ &= E\{R^2\}\cdot E\{\cos(\omega t_1+\Theta)\cos(\omega t_2+\Theta)\} \\ &= E\{R^2\}\cdot E\left\{\frac{1}{2}\cos[\omega(t_2-t_1)] + \frac{1}{2}\cos[\omega(t_2+t_1)+2\Theta]\right\} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$E\left\{\frac{1}{2}\cos\left[\omega(t_2+t_1)+2\Theta\right]\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left[\omega(t_2+t_1)+2\vartheta\right]d\vartheta = 0$$

und damit

$$\begin{aligned}\varphi_{XX}(t_1,t_2) &= E\{R^2\}\frac{1}{2}\cos\left[\omega(t_2-t_1)\right]\\ &= \frac{1}{2}E\{R^2\}\cos(\omega\tau)\end{aligned}$$

AUFGABE 6

a)

$$\overline{P}\begin{bmatrix}0 & 1/2 & a & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{da} \quad \sum_{j=1}^{4} p_{ij} \stackrel{!}{=} 1 \;\forall\, i \;\rightarrow\; a=\frac{1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{p}(0)^{\,T} &= (1,\,0,\,0,\,0)\\ \vec{p}(3)^{\,T} &= \vec{p}(0)\cdot\overline{P^3}\\ &= (1,\,0,\,0,\,0)\begin{bmatrix}1/32 & 3/32 & 9/32 & 19/32\\ 3/64 & 5/64 & 15/64 & 41/64\\ 0 & 0 & 1/8 & 1/8\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= (1/32,\,3/32,\,9/32,\,19/32)\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Zustand 4 am wahrscheinlichsten

c)

$$\begin{aligned}m_1 &= 1+\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}m_3\\ m_2 &= 1+\frac{1}{4}m_1+\frac{1}{4}m_2+\frac{1}{4}m_3\\ m_3 &= 1+\frac{1}{2}m_3\\ m_4 &= 0\\ \Rightarrow m_1 &= 3,6\end{aligned}$$