UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2008
08.10.2008

Wahrscheinlichkeitstheorie

für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Urne enthält drei ideale Würfel W_1, W_2 und W_3. Der Würfel W_1 ist mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet, der Würfel W_2 trägt die Ziffern 1, 3 und 5 jeweils zweimal und der Würfel W_3 trägt die Beschriftung 3 auf allen sechs Seiten.
Ein Zufallsexperiment besteht daraus, dass ein Würfel rein zufällig aus der Urne gezogen und einmal geworfen wird. Die Zufallsvariable X_1 bezeichne die bei diesem Wurf erzielte Augenzahl.

a) Ermitteln Sie die Verteilung von X_1.

b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel W_1 gezogen wurde, unter der Bedingung, dass die geworfene Augenzahl 3 ist.

c) Zeigen Sie: $E(X_1) = \frac{19}{6}$.

d) Das obige Zufallsexperiment werde nun insgesamt N-mal in unabhängiger Folge durchgeführt. Die Zufallsvariable X_k bezeichne die beim k-ten Mal geworfene Augenzahl ($k = 1, \ldots, N$) und $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ die insgesamt erzielte Augensumme. Berechnen Sie

i) $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(\frac{6}{\sqrt{N}} S_N \le 19\sqrt{N}\big)$; **ii)** $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(\frac{6}{N} S_N \le 19\sqrt{N}\big)$; **iii)** $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(S_N \le 19\sqrt{N}\big)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sie brauchen in dieser Aufgabe die erhaltenen Formeln nicht zu vereinfachen!

a) Zwei Sender A und B übertragen unabhängig voneinander binäre Daten "0", "1". Eine "0" wird vom Sender A mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ sowie vom Sender B mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ gesendet.

i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine "0" übertragen wird, wenn beide Sender zeitgleich jeweils ein binäres Datum senden.

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sender A bei sechs unabhängig voneinander übertragenen binären Daten

α) genau zweimal eine "0" gesendet hat?

β) mindestens fünfmal eine "0" gesendet hat?

b) Beim Pokerspiel Texas Hold'em wird ein 52-Blatt-Kartenspiel, das vier Asse enthält, gut gemischt, und jedem der fünf Spieler A, B, C, D, E werden zwei Karten ausgegeben.

i) Wie viele mögliche Verteilungen gibt es für die Karten?

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält mindestens ein Spieler mindestens ein Ass?

iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Spieler je zwei Asse bekommen?

c) Eine Firma fertigt mit zwei Maschinen die gleichen Bauteile. Für die Ereignisse $A = \{$das Bauteil ist fehlerhaft$\}$ und $B = \{$das Bauteil wurde von der ersten Maschine produziert$\}$ gelte $0 < P(B) < 1$ sowie $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.
Sind die Ereignisse A und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Die homogene Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $\{1, 2, 3, 4\}$ besitze die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2/5 & a & 1/5 \\ 1/10 & 1/10 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$. Der Anfangszustand der Markoffkette sei $X_0 = 3$.

i) Ermitteln Sie a.

ii) Geben Sie den zugehörigen Übergangsgraphen an.

iii) Berechnen Sie $P(X_2 = 3)$.

iv) Bestimmen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption im Rand.

b) Ein Kartenstapel, bestehend aus den vier Karten Bube, Dame, König und Ass, soll gemischt werden. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ wird hierzu eine der folgenden Mischmethoden benutzt:

I: Die oberste Karte wird mit der untersten Karte getauscht. (Die Reihenfolge der beiden inneren Karten bleibt unverändert.)

II: Die beiden oberen Karten werden unter Beibehaltung der Reihenfolge unter die beiden anderen gelegt.

III: Die unterste Karte wird zuoberst gelegt. (Die Reihenfolge der anderen Karten bleibt unverändert.)

Die Mischweise I wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ angewandt, während die Mischweisen II bzw. III mit den Wahrscheinlichkeiten $1/3$ bzw. $1/6$ verwendet werden.

Die vier möglichen Positionen des Buben seien mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ durchnummeriert. Bezeichnet Y_n die Position des Buben nach dem n-ten Mischvorgang, dann stellt $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markoffkette dar. (Dies muss nicht begründet werden!)

Bestimmen Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es seien $\alpha > 0$ und X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x/\alpha^2 & \text{für } x \in [0, \alpha) \\ 2/\alpha - x/\alpha^2 & \text{für } x \in [\alpha, 2\alpha) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

i) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

ii) Berechnen Sie $P(X^2 \le \alpha^2/4)$.

iii) Bestimmen Sie sowohl den Erwartungswert als auch die Varianz von X.

b) Gegeben seien zwei unabhängige, jeweils mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen Y und Z. Bestimmen Sie die Dichten von $Y + Z$ und $\sqrt{|Y|}$.

Lösungsvorschläge

Lösung 1

Definiere die Ereignisse

$$A_j := \{\text{Es wird der Würfel } W_j \text{ aus der Urne gezogen}\} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Dann gilt

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

a) Der Wertebereich von X_1 ist $\{1,2,3,4,5,6\}$. Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man

$$\begin{aligned}
P(X_1=1) &= P(X_1=1|A_1)\cdot P(A_1)+P(X_1=1|A_2)\cdot P(A_2)+P(X_1=1|A_3)\cdot P(A_3)\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6},\\
P(X_1=2) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18},\\
P(X_1=3) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2},\\
P(X_1=4) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18},\\
P(X_1=5) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6},\\
P(X_1=6) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Also lautet die Verteilung von X_1:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

b) Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel W_1 gezogen wurde, unter der Bedingung, dass die geworfene Augenzahl 3 ist, ergibt sich mit Hilfe der Formel von Bayes

$$P(A_1|X_1=3)=\frac{P(X_1=3|A_1)\cdot P(A_1)}{P(X_1=3)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{9}.$$

c) Für den Erwartungswert von X_1 gilt

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{k=1}^{6} k\cdot P(X_1=k) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{18}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{18}\\
&= \frac{3+2+27+4+15+6}{18}=\frac{57}{18}=\frac{19}{6}.
\end{aligned}$$

d) i) Da die Zufallsvariable X_1 nur endlich viele Werte annimmt, ist $D^2(X_1)=:d^2$ endlich. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ sind unabhängig und identisch verteilt. Aufgrund von $E(X_1)=\frac{19}{6}$ liefert der zentrale Grenzwertsatz

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{6}{\sqrt{N}}S_N \le 19\sqrt{N}\Big) &= \lim_{N\to\infty} P\Big(S_N-\frac{19}{6}N\le 0\Big)\\
&= \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{S_N-\frac{19}{6}N}{\sqrt{N}\,d}\le 0\Big)=\Phi(0)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

ii) *1. Lösungsweg:* Für jedes $N\in\mathbb{N}$ mit $N\ge 2$ ist $\frac{19}{6}\sqrt{N}>\frac{20}{6}$. Mit Hilfe des Chintschinschen Gesetzes der großen Zahlen ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{6}{N}S_N\le 19\sqrt{N}\Big) &= \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{N}S_N\le\frac{19}{6}\sqrt{N}\Big)\ge\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{N}S_N<\frac{20}{6}\Big)\\
&= \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{N}S_N-\frac{19}{6}<\frac{1}{6}\Big)\ge\lim_{N\to\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{N}S_N-\frac{19}{6}\Big|<\frac{1}{6}\Big)=1,
\end{aligned}$$

woraus $\lim_{N\to\infty} P(\frac{6}{N}S_N\le 19\sqrt{N})=1$ folgt.

2. Lösungsweg: Nach Konstruktion des Zufallsexperiments gilt $P(S_N\le 6N)=1$ für alle $N\in\mathbb{N}$. Ist $N\ge 4$, so gilt $\frac{19}{6}\sqrt{N}\ge\frac{19}{6}\cdot 2\ge 6$ und damit

$$P\Big(\frac{6}{N}S_N\le 19\sqrt{N}\Big)=P\Big(S_N\le\Big(\frac{19}{6}\sqrt{N}\Big)N\Big)\ge P\Big(S_N\le 6N\Big)=1,$$

woraus $\lim_{N\to\infty} P(\frac{6}{N}S_N\le 19\sqrt{N})=1$ folgt.

WT - H 2008

iii) Für jedes $N\ge 400$ gilt wegen $19\sqrt{N}<20\sqrt{N}\le\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}=N$

$$P(S_N\le 19\sqrt{N})\le P(S_N<N).$$

Da nach Konstruktion des Zufallsexperiments $P(S_N<N)=0$ ist, folgt

$$\lim_{N\to\infty} P(S_N\le 19\sqrt{N})=0.$$

Lösung 2

a) i) Definiere die Ereignisse $C:=\{\text{Sender } A \text{ überträgt eine "0"}\}$,
$D:=\{\text{Sender } B \text{ überträgt eine "0"}\}$.

Dann sind C und D unabhängig und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D)=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{25}{32}.$$

ii) Der Sender A übertrage nun sechs Bits. Gibt die Zufallsvariable X die Anzahl der dabei gesendeten Bits "0" an, dann ist X binomialverteilt mit den Parametern 6 und $\frac{3}{4}$.

α) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal eine "0" gesendet wurde, ist gleich

$$P(X=2)=\binom{6}{2}\Big(\frac{3}{4}\Big)^2\Big(\frac{1}{4}\Big)^4=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{3^2}{4^6}=5\cdot\frac{3^3}{4^6}.$$

β) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünfmal eine "0" gesendet wurde, beträgt

$$\begin{aligned}
P(X\ge 5)=P(X=5)+P(X=6) &= \binom{6}{5}\Big(\frac{3}{4}\Big)^5\Big(\frac{1}{4}\Big)^1+\binom{6}{6}\Big(\frac{3}{4}\Big)^6\Big(\frac{1}{4}\Big)^0\\
&= \frac{6\cdot 3^5+3^6}{4^6}=\frac{3^7}{4^6}.
\end{aligned}$$

b) i) Es gibt

$$\binom{52}{2}\cdot\binom{50}{2}\cdot\binom{48}{2}\cdot\binom{46}{2}\cdot\binom{44}{2}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot\ldots\cdot 43}{2^5}$$

mögliche Verteilungen für die Karten.

ii) Sind die Ereignisse $A:=\{\text{Mindestens ein Spieler erhält mindestens ein Ass}\}$,
$B:=\{\text{Kein Spieler erhält ein Ass}\}$

definiert, so gilt $B=\overline{A}$ und daher

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{\binom{48}{2}\cdot\binom{46}{2}\cdot\binom{44}{2}\cdot\binom{42}{2}\cdot\binom{40}{2}}{\binom{52}{2}\cdot\binom{50}{2}\cdot\binom{48}{2}\cdot\binom{46}{2}\cdot\binom{44}{2}}=1-\frac{42\cdot 41\cdot 40\cdot 39}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}.$$

iii) Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Spieler je zwei Asse bekommen, beträgt

$$\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{2}\cdot\binom{46}{2}\cdot\binom{44}{2}}{\binom{52}{2}\cdot\binom{50}{2}\cdot\binom{48}{2}\cdot\binom{46}{2}\cdot\binom{44}{2}}=\frac{5\cdot 4\cdot 4\cdot 3}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=\frac{4\cdot 4}{52\cdot 17\cdot 10\cdot 49}=\frac{2}{5\cdot 13\cdot 17\cdot 49}.$$

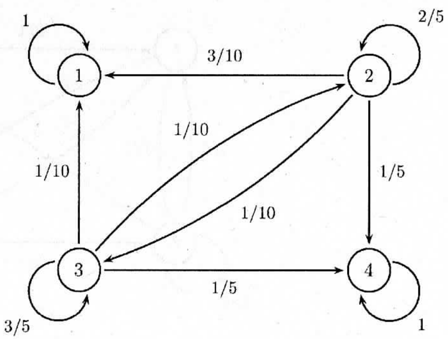
c) Die Ereignisse A und B sind unabhängig, denn mit Hilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und der Voraussetzung $P(A|B)=P(A|\overline{B})$ ergibt sich

$$P(A)=P(A|B)\cdot P(B)+P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B})=\big(P(B)+P(\overline{B})\big)P(A|B)=P(A|B).$$

Lösung 3

a) i) Es gilt $$a=1-\frac{3}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}.$$

ii) Der Übergangsgraph der Markoffkette lautet:



iii) *1. Lösungsweg:* Anhand des Übergangsgraphen erkennt man

$$P(X_2 = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{37}{100}.$$

2. Lösungsweg: Mit

$$P^2 = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 43 & 17 & 10 & 30 \\ 19 & 10 & 37 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\big(P(X_2 = 1), P(X_2 = 2), P(X_2 = 3), P(X_2 = 4)\big) = \big(0, 0, 1, 0\big)\, P^2 = \frac{1}{100}\big(19,\, 10,\, 37,\, 34\big).$$

Also ist $P(X_2 = 3) = \frac{37}{100}$.

iv) Es bezeichne m_i die mittlere Dauer, um vom Zustand i aus bis zur Absorption im Rand $R = \{1, 4\}$ zu gelangen ($i = 1, 2, 3, 4$). Für jeden inneren Zustand $i = 2, 3$ gilt dann

$$m_i = 1 + \sum_{j=1}^{4} p_{ij}\, m_j,$$

wobei $p_{ij} := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnen. In der vorliegenden Situation gilt

$$m_1 = m_4 = 0$$

$$m_2 = 1 + p_{22}\, m_2 + p_{23}\, m_3 = 1 + \frac{2}{5} m_2 + \frac{1}{10} m_3 \iff \frac{3}{5} m_2 = 1 + \frac{1}{10} m_3 \qquad (1)$$

$$m_3 = 1 + p_{32}\, m_2 + p_{33}\, m_3 = 1 + \frac{1}{10} m_2 + \frac{3}{5} m_3. \qquad (2)$$

Da der Anfangszustand 3 ist, muss m_3 bestimmt werden.
Die Gleichung (1) ist äquivalent zu $\frac{1}{10} m_2 = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{10} m_3)$. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man

$$m_3 = 1 + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{10} m_3\Big) + \frac{3}{5} m_3 = \frac{7}{6} + \frac{37}{60} m_3 \iff \frac{23}{60} m_3 = \frac{7}{6} \iff m_3 = \frac{70}{23}.$$

Die mittlere Absorptionsdauer beträgt also etwa drei Zeitschritte.

b) Nummeriert man die vier Positionen mit 1, 2, 3, 4 und symbolisiert den Kartenstapel durch

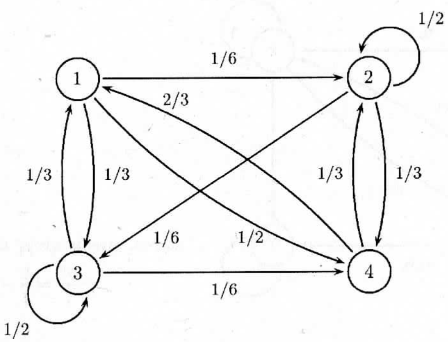
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

so bewirken die drei Mischvarianten die folgenden Umordnungen:

$$\mathrm{I}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{III}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Befindet sich der Bube in Position 1, so gelangt dieser durch die Mischmethode I zur Position 4, durch die Methode II zur Position 3 und durch III zu 2. Da die Mischweisen I, II bzw. III mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2, 1/3 bzw. 1/6 angewandt werden, ergeben sich die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_{11} = 0$, $p_{12} = 1/6$, $p_{13} = 1/3$, $p_{14} = 1/2$.

Entsprechende Überlegungen kann man für die übrigen Ausgangspositionen durchführen. Der Übergangsgraph von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ lautet:



Die Übergangsmatrix von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

a) i) Die Verteilungsfunktion F_X von X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Für $x < 0$ gilt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dy = 0.$$

Für $x \in [0, \alpha)$ gilt

$$F_X(x) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x y\, dy = \frac{1}{2\alpha^2} x^2.$$

Für $x \in [\alpha, 2\alpha)$ gilt

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \int_\alpha^x \frac{2}{\alpha} - \frac{y}{\alpha^2}\, dy = \frac{1}{2} + \Big(\frac{2y}{\alpha} - \frac{y^2}{2\alpha^2}\Big)\Big|_{y=\alpha}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{2x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} - \Big(2 - \frac{1}{2}\Big)$$

$$= 1 - \frac{1}{2\alpha^2}(4\alpha^2 - 4\alpha x + x^2) = 1 - \frac{1}{2\alpha^2}(2\alpha - x)^2.$$

Für $x \geq 2\alpha$ gilt $\quad F_X(x) = F_X(2\alpha) = 1.$

Also ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2\alpha^2} x^2 & \text{für } x \in [0, \alpha) \\ 1 - \frac{1}{2\alpha^2}(2\alpha - x)^2 & \text{für } x \in [\alpha, 2\alpha) \\ 1 & \text{für } x \geq 2\alpha \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

ii) Es gilt

$$P(X^2 \leq \alpha^2/4) = P(|X| \leq \alpha/2) = P(-\alpha/2 \leq X \leq \alpha/2) = F_X(\alpha/2) - F_X(-\alpha/2) \overset{\text{i)}}{=} 1/8.$$

iii) Für den Erwartungswert von X ergibt sich

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha x^2\, dx + \int_\alpha^{2\alpha} \frac{2}{\alpha} x - \frac{1}{\alpha^2} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\alpha + \Big(\frac{1}{\alpha} x^2 - \frac{1}{3\alpha^2} x^3\Big)\Big|_{x=\alpha}^{2\alpha} = \frac{1}{3}\alpha + 4\alpha - \frac{8}{3}\alpha - \alpha + \frac{1}{3}\alpha = \alpha.$$

Mit

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha x^3\, dx + \int_\alpha^{2\alpha} \frac{2}{\alpha} x^2 - \frac{1}{\alpha^2} x^3\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2 + \Big(\frac{2}{3\alpha} x^3 - \frac{1}{4\alpha^2} x^4\Big)\Big|_{x=\alpha}^{2\alpha} = \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{16}{3}\alpha^2 - 4\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{7}{6}\alpha^2$$

folgt für die Varianz von X

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}\alpha^2.$$

b) Da die Zufallsvariablen Y und Z mit Parameter λ exponentialverteilt sind, besitzen diese die Dichte

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von Y und Z ist die Dichte h von $Y + Z$ gegeben durch die Faltung $h = g * g$, d.h. durch

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)g(x-y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Nach Definition von g ergibt sich $h(x) = 0$ für $x < 0$. Ist $x \geq 0$, so gilt

$$h(x) = \int_0^x g(y)g(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 e^{-\lambda x}x.$$

Also ist
$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x}x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{die Dichte von } Y + Z.$$

Wir bestimmen zunächst die Verteilungsfunktion F von $\sqrt{|Y|}$: Für $x < 0$ gilt

$$F(x) = P(\sqrt{|Y|} \leq x) = 0.$$

Für $x \geq 0$ gilt $\quad F(x) = P(\sqrt{|Y|} \leq x) = P(|Y| \leq x^2) = P(Y \leq x^2) = F_Y(x^2) = 1 - e^{-\lambda x^2}.$

Die Verteilungsfunktion von $\sqrt{|Y|}$ ist also

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Dichte f von $\sqrt{|Y|}$ ergibt sich aus der Verteilungsfunktion durch Ableiten

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis

Herbst 2009
05.10.2009

Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) Es seien A, B, C Ereignisse, also Teilmengen, des Ergebnisraums Ω. Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von A, B, C in Mengenschreibweise aus.
  (i) Unter den drei Ereignissen A, B, C tritt nur das Ereignis C ein.
  (ii) Es treten genau zwei der drei Ereignisse ein.
  (iii) Es tritt mindestens ein Ereignis ein.

(b) Ein Kartenspiel besteht aus 32 Karten, darunter 4 Buben. Die Karten werden gut gemischt und dann nacheinander aufgedeckt.
  (i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte aufgedeckte Karte ein Bube ist?
  (ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste und die sechste aufgedeckte Karte jeweils ein Bube ist und unter den Karten zwei bis fünf kein Bube ist?

Aufgabe 2 (10 Punkte). In einer Fabrik werden Kirschen entkernt. Dazu werden zwei Maschinen verwendet. Jede Roh-Kirsche wird entweder an Maschine A oder an Maschine B entkernt. Maschine A bearbeitet 80% der Kirschen und entfernt 95% aller Kerne. Maschine B bearbeitet 20% der Kirschen und entfernt 70% aller Kerne.

Zum Schluss werden die bearbeiteten Kirschen noch kontrolliert. Dabei werden 90% aller Kirschen, die fälschlicherweise den Kern noch enthalten, aussortiert. Allerdings werden auch 10% der Kirschen ohne Kern aussortiert.

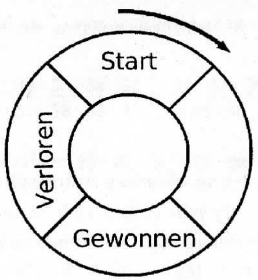
Die nicht aussortierten Kirschen werden dann verkauft.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Roh-Kirsche nach Bearbeitung einen Kern enthält und verkauft wird.
(b) Ein Kunde kauft eine Packung mit 100 Kirschen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kirschen der Packung entkernt sind?
(c) Es werden N verkaufte Kirschen betrachtet. X_N sei die Anzahl der entkernten Kirschen. Zeigen Sie:

$$\lim_{N\to\infty} P(X_N > \frac{163}{164}N) = 0.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, mit $P(Y_n = k) = \frac{1}{5}$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Wir betrachten folgendes Spielbrett, das aus vier Feldern besteht.



Man stellt zu Beginn seine Spielfigur auf das Feld "Start". Dann zieht man die Figur im Uhrzeigersinn weiter, zunächst um Y_1 Felder, dann um Y_2 Felder, usw., wobei man unter Umständen mehrere Umrundungen durchführt. Sobald die Figur jedoch auf dem Feld "Gewonnen" oder "Verloren" landet, wird sie nicht mehr bewegt.

(a) Modellieren Sie die Position $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Spielfigur als Markoffkette auf einer vierelementigen Zustandsmenge: Geben Sie den Übergangsgraphen an.
(b) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.
(c) Bestimmen Sie die Verteilung der zufälligen Position der Spielfigur nach zwei Zügen.
(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielfigur auf dem Feld "Gewonnen" landet.
(e) Bestimmen Sie die mittlere Spieldauer (also die Anzahl der Züge, bis die Figur auf "Gewonnen" oder "Verloren" landet).

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 : & x \in [-2, 2] \\ 0 : & x \notin [-2, 2] \end{cases},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Weiter sei Y eine Zufallsvariable, gegeben durch $Y = X^2$.

(a) Wie muss a gewählt werden, damit f eine Dichte wird?
(b) Bstimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y.
(c) Ermitteln Sie eine Dichte von Y.
(d) Bestimmen Sie $P(Y \geq 1 | X \leq 0)$.
(e) Bestimmen Sie $E(X), V(X)$ und $E(Y)$.
(f) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie für Elektrotechniker

Lösung 1.

(a) Es gibt jeweils mehrere Möglichkeiten, die Ereignisse darzustellen. Hier einige Möglichkeiten:
  (i) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ oder $C \setminus (A \cup B)$.
  (ii) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$ oder $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\setminus(A\cap B\cap C)$.
  (iii) $A \cup B \cup C$.

(b) Wir nummerieren die Karten von 1 bis 32 durch, wobei die vier Buben die Nummern 1 bis 4 erhalten sollen.
  (i) Die Reihenfolge, in der die Karten aufgedeckt werden, spielt hier keine Rolle. Daher kann das Problem modelliert werden durch den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega_1 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_j \in \{1, \ldots, 32\}, k_i \neq k_j \text{ für } i \neq j\}$, wobei k_i die i-te gezogene Karte beschreibt, mit Gleichverteilung. Es ist $|\Omega_1| = 32 \cdot 31 \cdot 30$. Die günstigen Ausgänge sind:

  Die ersten beiden Karten sind kein Bube, und die dritte Karte ist ein Bube
  oder
  die erste Karte ist ein Bube, die zweite Karte nicht, und die dritte Karte ist ein Bube
  oder
  die erste Karte ist kein Bube, die zweite und dritte Karte sind ein Bube
  oder
  die ersten drei Karten sind ein Bube.

  Daher ist die Anzahl der günstigen Ausgänge

$$= 28 \cdot 27 \cdot 4 + 4 \cdot 28 \cdot 3 + 28 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 28 \cdot 4 \cdot 30 + 30 \cdot 4 \cdot 3 = 31 \cdot 30 \cdot 4.$$

Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit = Anzahl der günstigen Ausgänge / Anzahl aller Ausgänge $= 31 \cdot 30 \cdot 4/(32 \cdot 31 \cdot 30) = 1/8$.

(ii) Diesmal modellieren wir das Problem mit dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega_2 = \{(k_1, \dots, k_6) : k_j \in \{1, \dots, 32\},\ k_i \neq k_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Wieder liegt Gleichverteilung vor. Die Menge der günstigen Ausgänge ist also

$$G = \{(k_1, \dots, k_6) : k_1, k_6 \in \{1,2,3,4\} \text{ und } k_2, \dots, k_5 \in \{5, \dots, 32\}\},$$

und die Anzahl der günstigen Ausgänge ist $|G| = 4 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 3$. Die Anzahl aller Ausgänge ist $|\Omega_2| = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$, und somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$|G|/|\Omega_2| = \frac{4 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 3}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{12 \cdot 26 \cdot 25}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{13 \cdot 5}{31 \cdot 29 \cdot 8}.$$

Lösung 2.

(a) Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit p_1, dass die Kirsche nicht entkernt wird:

$$p_1 = 0,8 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,04 + 0,06 = 0,1.$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0,1 \cdot p_1 = 0,01$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit p_3, dass eine Kirsche entkernt wird und verkauft wird, ist

$$p_3 = 0,9 \cdot (1 - p_1) = 0,81.$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine verkaufte Kirsche entkernt ist:

$p_4 = P(\text{"Kirsche wird entkernt "}|\text{"Kirsche wird verkauft"})$
$= P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"})/P(\text{"Kirsche wird verkauft"})$
$= P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"})$
$/P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft" oder "Kirsche wird nicht entkernt und verkauft"})$
$= P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"})$
$/\,[P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"}) + P(\text{"Kirsche wird nicht entkernt und verkauft"})]$
$= 0,81/[0,81 + 0,01]$
$= \frac{81}{82}.$

Dann ist die gesuchte Warscheinlichkeit, dass eine 100er-Packung aus nur entkernten Kirschen besteht, gleich

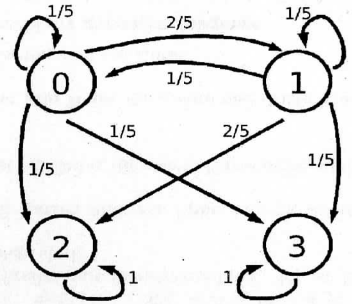
$$p_5 = p_4^{100} = \left(\frac{81}{82}\right)^{100}.$$

(c) Es sei Y_n die Zufallsvariable mit $Y_n = 0$, falls die n-te Kirsche nicht entkernt ist und $Y_n = 1$, falls die n-te Kirsche entkernt ist. Dann sind $Y_1, \dots, Y_N$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt, und es gilt $X_N = \sum_{n=1}^N Y_n$. Außerdem ist $E(Y_1) = p_4 = \frac{81}{82}$. Nach dem Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\begin{aligned} P(X_N > \frac{163}{164}N) &= P(\frac{1}{N}X_N - \frac{163}{164} > 0) = P(\frac{1}{N}X_N - \frac{81}{82} > \frac{163}{164} - \frac{81}{82}) \\ &\leq P(|\frac{1}{N}X_N - \frac{81}{82}| > \underbrace{\frac{163}{164} - \frac{162}{164}}_{>0}) \to 0 \text{ für } N \to \infty. \end{aligned}$$

Lösung 3.

(a) Wir nummerieren die Felder durch: Startfeld = 0, unbeschriftetes Feld = 1, "Gewonnen" = 2, "Verloren" = 3. Wir erhalten folgenden Übergangsgraphen.



(b) Die zugehörige Übergangsmatrix lautet

$$P = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Durch Quadrieren der obigen Matrix erhält man die Übergangsmatrix vom Zustand zum Zeitpunkt Null zum Zustand zum Zeitpunkt zwei. Aus ihr bestimmen wir die Verteilung der Figur nach zwei Zügen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/25 & 4/25 & 10/25 & 8/25 \end{pmatrix}.$$

Also lautet die Verteilung nach zwei Zügen

$P(X_2 = 0) = 3/25$, $P(X_2 = 1) = 4/25$, $P(X_2 = 2) = 2/5$, $P(X_2 = 3) = 8/25$.

(d) Es sei p_k die Wahrscheinlichkeit, dass die Markoffkette im Zustand 2, also "Gewonnen", absorbiert wird, wenn das Startfeld k ist ($k = 0,1,2,3$). Der Rand der Markoffkette ist $R = \{2,3\}$. Gemäß Skript S.28, 7.10, gilt dann für $k = 0,1$:

$$p_k = \sum_{j=0}^{3} p_j p_{kj},$$

wobei p_{kj} die Einträge der Übergangsmatrix bezeichne. Außerdem gilt $p_2 = 1$, $p_3 = 0$. Somit erhalten wir

$$p_0 = \frac{1}{5}p_0 + \frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{5},\quad p_1 = \frac{1}{5}p_0 + \frac{1}{5}p_1 + \frac{2}{5}.$$

Dieses LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten löst sich zu

$$p_0 = \frac{4}{7},\ p_1 = \frac{9}{14}.$$

Daher ist die gesuchte Gewinnwahrscheinlichkeit $= \frac{4}{7}$.

(e) Es sei t_k die mittlere Spieldauer, vorausgesetzt, dass die Markoffkette im Feld k startet ($k = 0, 1, 2, 3$). Gemäß Skript S.28, 7.10, gilt für $k \notin R$:

$$t_k = 1 + \sum_{j=0}^{3} p_{kj} t_j$$

und für $k \in R$ natürlich $t_k = 0$. Daher erhalten wir

$$t_0 = 1 + \frac{1}{5}t_0 + \frac{2}{5}t_1,\ t_1 = 1 + \frac{1}{5}t_0 + \frac{1}{5}t_1.$$

Die Lösung dieses LGS lautet $t_0 = \frac{15}{7}$, $t_1 = \frac{25}{14}$, sodass die mittlere Spieldauer $\frac{15}{7}$ Züge beträgt.

Lösung 4.

(a) Es muss gelten: $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Also $\displaystyle\int_{-2}^{2} ax^2 dx = [a\frac{1}{3}x^3]_{-2}^{2} = a\frac{1}{3}(8+8) = \frac{16}{3}a = 1.$ Daher $a = \frac{3}{16}$.

(b) Gemäß Definition: $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. Falls $y < 0$, dann ist also $0 \leq F_Y(y) \leq P(X^2 < 0) = 0$. Falls $y > 4$, dann gilt $1 \geq F_Y(y) \geq P(X^2 \leq 4) = 1$. Falls $y \in [0, 4]$, so gilt

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx = [\frac{a}{3}x^3]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{2}{3}a\sqrt{y}^3 = \frac{1}{8}y^{3/2}.$$

Insgesamt also

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0: & y < 0 \\ \frac{1}{8}y^{3/2}: & y \in [0, 4] \\ 1: & y > 4. \end{cases}$$

(c) Da F_Y stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, besitzt Y eine Dichte, die gegeben ist durch $g(y) = F_Y'(y)$ für y dort, wo F_Y stetig differenzierbar (an den sonstigen Stellen setze $g(y)$ beliebig fest). Somit erhält man als eine Dichte

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3}{16}y^{\frac{1}{2}}: & y \in [0, 4] \\ 0: & y \notin [0, 4] \end{cases}.$$

(d) Es gilt

$$P(Y \geq 1 | X \leq 0) = P(X^2 \geq 1, X \leq 0)/P(X \leq 0) = P(X \leq -1)/P(X \leq 0).$$

Wir bestimmen Zähler und Nenner: $P(X \leq -1) = a\int_{-2}^{-1} x^2 dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot (8-1) = \frac{7}{16}$ und $P(X \leq 0) = a\int_{-2}^{0} x^2 dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot (8-0) = \frac{8}{16}$, und somit

$$P(Y \geq 1 | X \leq 0) = \frac{7}{8}.$$

(e) Es gilt

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = a\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0,$$

da der Integrand gerade ist. Ferner gilt

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = a\int_{-2}^{2} x^4 dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 32 = \frac{12}{5}.$$

Schließlich haben wir $E(Y) = E(X^2) = \dfrac{12}{5}$.

(f) Es gilt $P(Y \geq 1, X \geq 1) = P(X \geq 1 \text{ oder } X \leq -1, X \geq 1) = P(X \geq 1) = \dfrac{7}{16}$,

und $P(Y \geq 1)P(X \geq 1) = P(X \geq 1 \text{ oder } X \leq -1)P(X \geq 1) = \dfrac{14}{16} \cdot \dfrac{7}{16}$.

Diese beiden Werte sind verschieden, damit sind X und Y nach Definition nicht stochastisch unabhängig.

WT - H 2010

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2010
04.10.2010

Wahrscheinlichkeitstheorie

für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

Gegeben sei eine Urne mit 4 roten, 4 schwarzen und 4 weißen Kugeln. Der Urne werden nacheinander drei Kugeln entnommen, in jedem Zug jeweils genau eine Kugel.
Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

$$A_1 = \{\textbf{keine} \text{ der drei gezogenen Kugeln ist } \textbf{rot}\}$$
$$A_2 = \{\textbf{alle} \text{ drei gezogenen Kugeln sind } \textbf{rot}\}$$
$$A_3 = \{\textbf{mindestens eine} \text{ der drei gezogenen Kugeln ist } \textbf{nicht rot}\}$$
$$A_4 = \{\textbf{genau eine} \text{ der drei gezogenen Kugeln ist } \textbf{schwarz}\}$$
$$B = \{\textbf{die erste} \text{ gezogene Kugel ist } \textbf{rot}\}$$
$$C = \{\textbf{die zweite} \text{ gezogene Kugel ist } \textbf{weiß}\}$$

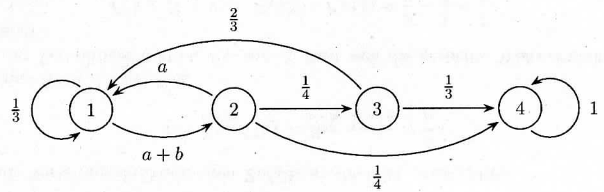
a) Bestimmen Sie $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_3)$ für den Fall, dass die Kugel nach jedem Zug wieder zurück in die Urne gelegt werden.

b) Bestimmen Sie $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_4)$ für den Fall, dass die Ziehungen ohne Zurücklegen der Kugeln erfolgen.

c) Die Ziehungen werden ohne Zurücklegen der Kugeln durchgeführt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Ereignisse B und C stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2 (7+3=10 Punkte)

a) Die homogene Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf der Zustandsmenge $\{1,2,3,4\}$ besitze den Übergangsgraphen



mit zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Ermitteln Sie a und b.

(ii) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

(iii) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 2),$$
$$P(X_3 = 3,\ X_2 = 2 \,|\, X_0 = 1),$$
$$P(X_5 = 4 \,|\, X_2 = 2).$$

(iv) Der Anfangszustand der Markoffkette sei $X_0 = 1$. Bestimmen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption im Rand.

b) Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment:
Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird ein Würfel geworfen, der auf drei Seiten mit der Ziffer 1, auf zwei Seiten mit der Ziffer 2 und auf einer Seite mit der Ziffer 4 beschriftet ist. Das Experiment endet, sobald zum ersten Mal die Ziffernfolge 24 auftritt.
Geben Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments durch eine Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zustandsmenge mit weniger als neun Zuständen, den zugehörigen Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

Aufgabe 3 **(3+2+2+3=10 Punkte)**

Die stetige Zufallsvariable X habe mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$ die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c|x| & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Bestimmen Sie c und geben Sie die Verteilungsfunktion F_X von X an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $D^2(X)$ von X.

c) Berechnen Sie $P(|X| > \frac{1}{10})$.

d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von $\sqrt{|X|}$.

Aufgabe 4 **(7+3=10 Punkte)**

a) Ein Unternehmen stellt Kugelschreiber her, die jeweils aus einer Schreibmine, einer Metallfeder und einer Kunststoffhülle bestehen. Das Gewicht einer Schreibmine hat den Erwartungswert 2,5 und die Varianz 0,14, das Gewicht der Metallfedern den Erwartungswert 0,5 und die Varianz 0,1, das Gewicht der Kunststoffhüllen den Erwartungswert 10,0 und die Varianz 0,4. Alle drei Gewichte sind voneinander stochastisch unabhängig und normalverteilt.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Gesamtgewicht eines Kugelschreibers zwischen 12,0 und 13,0?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet eine Packung mit 25 solcher Kugelschreiber das Gesamtgewicht von 330?

b) Ein fairer Würfel werde N-mal in unabhängiger Folge geworfen, wobei $N \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable X_j bezeichne die im j-ten Wurf erzielte Augenzahl ($j = 1, \ldots, N$). Bestimmen Sie

$$\lim_{N\to\infty} P\Big(\sum_{j=1}^{N} X_j \geq 4N\Big).$$

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt:

$\Phi(0.125) \approx 0.5497$, $\Phi(0.5) \approx 0.6915$, $\Phi(0.8) \approx 0.7881$, $\Phi(0.9) \approx 0.8159$, $\Phi(1.25) \approx 0.8944$.

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der gezogenen roten Kugeln, Y die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist, ist gleich $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Da die Ziehungen mit Zurücklegen der Kugeln erfolgen, ist die Zufallsvariable X binomialverteilt mit Parametern $p = \frac{1}{3}$ und $N = 3$. Folglich gilt

$$P(A_1) = P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(A_2) = P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27},$$

$$P(A_3) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}.$$

b) Da die Ziehungen nun ohne Zurücklegen der Kugeln erfolgen, ist X in diesem Fall hypergeometrisch verteilt mit Parametern $n = 3$ (Anzahl der Ziehungen), $N = 12$ (Anzahl der Kugeln insgesamt) und $M = 4$ (Anzahl der roten Kugeln). Somit ist

$$P(A_1) = P(X = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{14}{55},$$

$$P(A_2) = P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{8}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{55}.$$

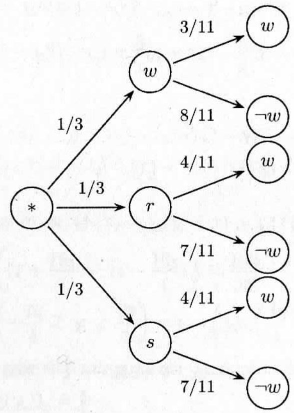
Die Zufallsvariable Y ist ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit denselben Parametern wie X. Hier gilt also

$$P(A_4) = P(Y = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55}.$$

c) Die Ereignisse B und C sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(B)\cdot P(C) = P(B \cap C).$$

Bei dem in der Aufgabenstellung beschriebenen Zufallsexperiment handelt es sich um ein mehrstufiges Experiment, das sich auch als Baumdiagramm darstellen lässt. Es soll w, r, s und $\neg w$ bedeuten, dass eine weiße, rote, schwarze bzw. nicht weiße Kugel gezogen wurde.



Hieraus lassen sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ablesen. Die Wahrscheinlichkeiten auf den einzelnen Pfaden werden dabei multipliziert. Man erhält

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} = \frac{4}{33}.$$

Da $P(B \cap C) = \frac{4}{33} \neq \frac{1}{9} = P(B)\cdot P(C)$ ist, sind die beiden Ereignisse B und C nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2

a) **(i)** Da die Zeilensummen der Übergangsmatrix P gerade 1 ergeben müssen, muss $a = \frac{1}{2}$ und $a + b = \frac{2}{3}$ und somit $b = \frac{1}{6}$ gelten.

(ii) Die zum gegebenen Übergangsgraphen gehörige Übergangsmatrix P lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Anhand des Übergangsgraphen erkennt man

$$P(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(X_3 = 3, X_2 = 2 \,|\, X_0 = 1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{18}$$

$$P(X_5 = 4 \,|\, X_2 = 2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{5}{12}.$$

iv) Es bezeichne m_i die mittlere Dauer, um vom Zustand i aus bis zur Absorption im Rand $R = \{4\}$ zu gelangen ($i = 1,2,3,4$). Für jeden inneren Zustand $i = 1,2,3$ gilt dann

$$m_i = 1 + \sum_{j=1}^{4} p_{ij}\, m_j,$$

wobei $p_{ij} := P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnen. In der vorliegenden Situation gilt

$$m_1 = 1 + p_{11}\,m_1 + p_{12}\,m_2 + p_{13}\,m_3 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_2 \iff m_1 = \frac{3}{2} + m_2 \qquad (1)$$

$$m_2 = 1 + p_{21}\,m_1 + p_{22}\,m_2 + p_{23}\,m_3 = 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{4}m_3 \qquad (2)$$

$$m_3 = 1 + p_{31}\,m_1 + p_{32}\,m_2 + p_{33}\,m_3 = 1 + \frac{2}{3}m_1 \qquad (3)$$

$$m_4 = 0.$$

Da der Anfangszustand 1 ist, muss m_1 bestimmt werden.
Setzt man die Gleichung (3) in (2) ein, so erhält man $m_2 = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}m_1$. Setzt man dieses wiederum in Gleichung (1) ein, so folgt $m_1 = \frac{33}{4}$. Die mittlere Absorptionsdauer beträgt also etwa acht Zeitschritte.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne die Zufallsvariable X_n die im $n-1$-ten und n-ten Wurf geworfene Ziffernfolge aus der Menge $\{11, 12, 14, 21, 22, 24, 41, 42, 44\}$. Mit $*$ werde der Startzustand X_0 bezeichnet. Verwendet man die Zuordnung

Ziffernfolge	*	11	12	14	21	22	24	41	42	44
Zustand	0	1	2	1	1	2	3	1	2	1

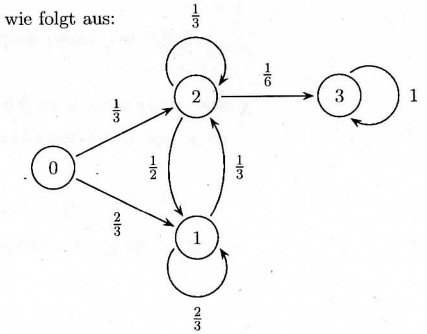
so lässt sich das Zufallsexperiment als Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Zustandsmenge $\{0,1,2,3\}$ modellieren. Hierbei gelten also die Entsprechungen

$0 \,\widehat{=}$ "Startzustand",
$1 \,\widehat{=}$ "letzte gewürfelte Ziffer ist 1 oder 4",
$2 \,\widehat{=}$ "letzte gewürfelte Ziffer ist 2",
$3 \,\widehat{=}$ "Auftreten der Ziffernfolge 24".

Da der Folgezustand nur vom gegenwärtigen Zustand (d.h. der aktuellen Ziffernfolge) und nicht von der Vorgeschichte (d.h. auf welche Weise die Ziffernfolge zustande kam) abhängt, handelt es sich um eine Markoffkette.
Die zugehörige Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und der zugehörige Übergangsgraph sieht wie folgt aus:



Aufgabe 3

a) Damit f die Dichte einer Zufallsvariablen ist, muss gelten:

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_{-1}^{0}(-x)\,dx + c\int_{0}^{1} x\,dx = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = c.$$

Dies ist genau für $c = 1$ der Fall.
Die Verteilungsfunktion F_X von X berechnet sich folgendermaßen: Für $x < -1$ ist $F_X(x) = P(X \le x) = 0$ und für $x \ge 1$ ist $F_X(x) = P(X \le x) = 1$. Ist $x \in [-1, 0)$, so gilt

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \int_{-1}^{x}(-x)\,dx = \frac{1}{2}(1 - x^2),$$

und ist $x \in [0,1)$, so gilt

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

Also ist
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{1}{2}(1-x^2) & , x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & , x \in [0,1) \\ 1 & , x \ge 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Da die Funktion $x \mapsto x\,|x|$ ungerade ist, gilt für den Erwartungswert von X

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,|x|\,dx = 0.$$

Ferner ist
$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{2}$$

und somit $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2}$.

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion berechnen. Es ist

$$P\left(|X| > \frac{1}{10}\right) = 1 - P\left(-\frac{1}{10} \le X \le \frac{1}{10}\right) = 1 - \left(F_X\left(\frac{1}{10}\right) - F_X\left(-\frac{1}{10}\right)\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left((1 + \frac{1}{10^2}) - (1 - \frac{1}{10^2})\right) = \frac{99}{100}.$$

d) Wir setzen $Y := \sqrt{|X|}$. Ist $x < 0$, so ist $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(\sqrt{|X|} \le x) = 0$. Für $x \ge 0$ gilt

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(\sqrt{|X|} \le x) = P(|X| \le x^2)$$
$$= P(-x^2 \le X \le x^2) = F_X(x^2) - F_X(-x^2).$$

Hieraus folgt für $x \in [0,1)$

$$F_Y(x) = F_X(x^2) - F_X(-x^2) = \frac{1}{2}(1 + x^4) - \frac{1}{2}(1 - x^4) = x^4$$

und für $x \ge 1$
$$F_Y(x) = F_X(x^2) - F_X(-x^2) = 1 - 0 = 1.$$

Insgesamt ergibt sich
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^4 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Funktion F_Y ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ stetig differenzierbar mit

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \\ 4x^3, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Setzt man $f_Y(x) := F_Y'(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $f_Y(0) := f_Y(1) := 0$, so ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung f_Y eine Dichte von Y, d.h. es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(u)\,du.$$

Aufgabe 4

a) (i) Die Zufallsvariablen Y_S, Y_M, Y_K sollen das Gewicht einer Schreibmine, einer Metallfeder und einer Kunststoffhülle angeben. Nach Aufgabenstellung sind diese Zufallsvariablen normalverteilt mit

$$Y_S \sim N(2.5, 0.14), \qquad Y_M \sim N(0.5, 0.1), \qquad Y_K \sim N(10.0, 0.4).$$

Das Gesamtgewicht eines Kugelschreibers werde durch die Zufallsvariable X beschrieben, es ergibt sich als Summe der drei Einzelgewichte. Da Y_S, Y_M, Y_K voneinander stochastisch unabhängig sind, ist auch $X = Y_S + Y_M + Y_K$ wieder normalverteilt mit

$$\mu := E(X) = E(Y_S) + E(Y_M) + E(Y_K) = 2.5 + 0.5 + 10.0 = 13.0,$$
$$\sigma^2 := D^2(X) = D^2(Y_S) + D^2(Y_M) + D^2(Y_K) = 0.14 + 0.1 + 0.4 = 0.64.$$

D.h. die Zufallsvariable $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ist $N(0,1)$-verteilt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich somit durch

$$\begin{aligned}
P(12.0 \le X \le 13.0) &= P\left(\frac{12-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{13-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{12-13}{0.8} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{13-13}{0.8}\right) = P\left(-1.25 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 0\right) \\
&= \Phi(0) - \Phi(-1.25) = \Phi(0) - (1 - \Phi(1.25)) \\
&\approx 0.5 - (1 - 0.8944) = 0.3944.
\end{aligned}$$

(ii) Bezeichnet für $j \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_j das Gesamtgewicht eines Kugelschreibers, so ergibt sich das Gewicht einer Packung mit 25 solcher Kugelschreiber als

$$S := \sum_{j=1}^{25} X_j.$$

Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_j)_j$ ist auch S wieder normalverteilt. Mit Hilfe von (i) ergibt sich

$$\mu_S := E(S) = \sum_{j=1}^{25} E(X_j) = 25 \cdot 13 = 325,$$

$$\sigma_S^2 := D^2(S) = \sum_{j=1}^{25} D^2(X_j) = 25 \cdot 0.64 = 16.$$

Die Zufallsvariable $\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$ ist also $N(0,1)$ verteilt und es gilt

$$\begin{aligned}
P(S > 330) &= P\left(\frac{S-325}{4} > \frac{330-325}{4}\right) = P\left(\frac{S-325}{4} > 1.25\right) \\
&= 1 - \Phi(1.25) \approx 1 - 0.8944 = 0.1056.
\end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $E(X_j) = 3.5$ für $j = 1, 2, \ldots, N$. Nach dem Chintschinschen Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\begin{aligned}
0 &\le P\Big(\sum_{j=1}^{N} X_j \ge 4N\Big) = P\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \ge 4\Big) \\
&= 1 - P\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j - 3.5 < 0.5\Big) \le 1 - P\Big(\Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j - 3.5\Big| < 0.5\Big) \\
&\longrightarrow 1 - 1 = 0 \qquad \text{für } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\lim_{N\to\infty} P\Big(\sum_{j=1}^{N} X_j \ge 4N\Big) = 0$.